



宋柏生 郁大刚 罗庆来

高等数学

G A O D E N G S H U X U E

(上 册)

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学

(上册)

宋柏生 郁大刚 罗庆来 编 著

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试经济、管理类数学考试大纲和东南大学经、管、文科高等数学教学基本要求,并结合近年来东南大学、河海大学高等数学课程的教学改革实践而编写的.全书旨在反映经、管、文特点,适合经、管、文要求,围绕增强学生数学素养以获得合理的适应未来发展的知识结构为目的,为他们将来进一步学习与应用数学打下较好的基础.

全书分上、下两册.本册为上册,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、积分及其应用等五章,每章配有适量习题与小结,书后附有习题答案.

本书可供高等院校经、管、文科使用,也可适应远程教学,同时可供考研复习参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/宋柏生,郁大刚,罗庆来编著.

—南京:东南大学出版社,2002.8

ISBN 7-81089-024-7

I. 高... II. ①宋...②郁...③罗... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 061455 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷

开本:700mm×1000mm 1/16 印张:14.75 字数:297 千字

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—5000 定价:18.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换.电话:025-3792327)

前 言

本教材是参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试经济、管理类数学考试大纲和东南大学经、管、文科高等数学教学基本要求,并结合近年来东南大学、河海大学高等数学课程的教学改革实践而编写的。由于数学的自身特点与人类的进步,数学的概念、理论与方法已逐渐渗透到社会科学的各个领域,特别是经济、管理学科。与理工科学生相比较,经、管、文科学生在知识结构与实际需要等方面对高等数学课程的要求有一定的差异。本教材旨在反映经、管、文特点,适应经、管、文要求,围绕增强学生数学素养,以获得合理的适应未来发展的知识结构为目的,为他们将来进一步学习与应用数学打下较好的基础。

本书共八章,分上、下两册。上册包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、积分及其应用等五章;下册包括多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程等三章。每章配有适量习题与小结,习题答案分列于上、下册最后。

本书第一、二、八章由罗庆来编写,第三、四、七章由宋柏生编写,第五、六章由郁大刚编写。全书由宋柏生、罗庆来统稿。

限于编者水平与时间仓促,书中谬误与疏漏在所难免,望广大读者不吝指正。

编 者

2002 年 6 月

目 录

1 函数	(1)
1.1 集合	(1)
1.1.1 集合的概念及表示法	(1)
1.1.2 集合的运算	(2)
1.1.3 实数集	(4)
习题 1	(6)
1.2 映射	(7)
1.2.1 映射的概念	(7)
1.2.2 逆映射与复合映射	(7)
1.3 函数	(8)
1.3.1 函数概念及其表示法	(8)
1.3.2 复合函数与反函数	(10)
1.3.3 函数的几种常见性态	(14)
1.3.4 建立函数关系举例	(15)
习题 2	(17)
本章小结	(19)
总习题	(20)
2 极限与连续	(21)
2.1 两个实例	(21)
2.2 数列的极限	(22)
2.2.1 数列	(22)
2.2.2 数列的极限	(23)
2.3 函数的极限	(25)
2.3.1 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(25)
2.3.2 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(26)
2.3.3 左极限与右极限	(28)
习题 1	(29)
2.4 极限的性质	(30)
2.4.1 极限的性质	(30)
2.4.2 函数极限与数列极限的关系	(31)
2.5 无穷大量与无穷小量	(32)
2.5.1 无穷大量	(32)

2.5.2 无穷小量	(32)
2.6 极限的运算法则	(34)
2.6.1 极限的四则运算法则	(34)
2.6.2 复合函数的极限运算法则	(37)
习题 2	(38)
2.7 极限存在准则与两个重要极限	(40)
2.7.1 夹逼准则	(40)
2.7.2 单调有界收敛准则	(42)
习题 3	(45)
2.8 无穷小量的比较	(46)
2.8.1 无穷小量的阶	(46)
2.8.2 等价无穷小	(46)
习题 4	(48)
2.9 函数的连续性	(49)
2.9.1 连续函数的概念	(49)
2.9.2 连续函数的运算	(50)
2.9.3 初等函数的连续性	(51)
2.9.4 函数的间断点	(53)
2.9.5 闭区间上连续函数的性质	(54)
习题 5	(56)
本章小结	(58)
总习题	(59)
3 导数与微分	(60)
3.1 导数概念	(60)
3.1.1 导数的引进	(60)
3.1.2 导数的定义	(61)
3.1.3 函数可导与连续的关系	(63)
3.1.4 导数的几何意义	(65)
习题 1	(66)
3.2 导数的基本公式与运算法则	(68)
3.2.1 几个基本初等函数的导数	(68)
3.2.2 导数的四则运算法则	(69)
3.2.3 反函数的导数与复合函数的导数	(72)
3.2.4 其他表示形式的函数的求导方法	(77)
3.2.5 导数公式	(79)
习题 2	(80)

3.3 高阶导数	(82)
3.4 微分	(86)
3.4.1 微分的概念	(86)
3.4.2 微分的几何意义	(87)
3.4.3 微分的运算法则	(89)
3.4.4 微分形式的不变性	(89)
习题 3	(90)
本章小结	(92)
总习题	(93)
4 中值定理与导数的应用	(94)
4.1 中值定理	(94)
4.1.1 罗尔(Rolle)定理	(94)
4.1.2 拉格朗日(Lagrange)定理	(96)
4.1.3 柯西(Cauchy)定理	(98)
习题 1	(99)
4.2 未定式的极限	(101)
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式	(101)
4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(103)
4.2.3 其他类型的未定式	(104)
习题 2	(108)
4.3 函数的单调性与极值	(110)
4.3.1 函数的单调性	(110)
4.3.2 函数的极值	(113)
4.3.3 最值问题	(116)
习题 3	(119)
4.4 函数作图	(121)
4.4.1 曲线的凸向与拐点	(121)
4.4.2 曲线的渐近线	(122)
4.4.3 函数作图	(124)
习题 4	(126)
4.5 导数在经济学中的应用	(127)
4.5.1 经济学的厂商理论中常见的函数	(127)
4.5.2 边际函数(函数变化率)	(128)
4.5.3 函数的弹性	(131)
习题 5	(134)

本章小结	(136)
总习题	(137)
5 积分及其应用	(139)
5.1 定积分的概念与性质	(139)
5.1.1 定积分问题举例	(139)
5.1.2 定积分的定义	(141)
5.1.3 定积分的性质	(144)
5.2 微积分学基本定理	(147)
5.2.1 积分变上限函数及其性质	(147)
5.2.2 牛顿—莱布尼兹公式	(149)
习题 1	(151)
5.3 不定积分	(153)
5.3.1 不定积分的概念与性质	(153)
5.3.2 基本积分公式及应用	(154)
5.3.3 换元积分法	(157)
5.3.4 分部积分法	(166)
5.3.5 特殊类型函数的积分举例	(169)
习题 2	(174)
5.4 定积分的计算	(176)
习题 3	(182)
5.5 定积分的应用	(184)
5.5.1 几何应用	(184)
5.5.2 经济学应用举例	(190)
习题 4	(194)
5.6 定积分的近似计算	(196)
5.6.1 梯形法	(196)
5.6.2 抛物线法	(197)
5.7 反常积分与 Γ 函数	(199)
5.7.1 无穷积分	(199)
5.7.2 瑕积分	(201)
5.7.3 Γ 函数	(203)
习题 5	(204)
本章小结	(206)
总习题	(209)
习题答案	(211)

1 函 数

1.1 集合

集合是现代数学中一个十分重要的概念,它已渗透到数学的各个领域,有着十分重要的应用.因此,我们在本书的开始,简单地介绍一下集合的一些基本知识.

1.1.1 集合的概念及表示法

1. 集合的概念

集合是具有某种共同性质的对象的全体.例如,某班全体学生,某页书中的所有字,方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根,全体自然数,圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上所有的点,等等.我们把组成某一集合的那些对象,称为这个集合的元素.例如上述的诸多集合中,学生、字、根、数、点等都分别为相应集合的元素.

习惯上用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,而用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就记为 $a \in A$,读作 a 属于 A 或 a 在 A 中;如果 a 不是集合 A 的元素,就记为 $a \notin A$,读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.

如果一个集合的元素可以一一列举出来,我们就用一个花括号 $\{ \}$ 把这些元素括起来,以表示这个集合.例如集合 A 包含 $1, 2, 3, 4$ 这四个数,就可记为

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

由有限多个元素组成的集合,称为有限集合,如上面的集合 A ;由无限多个元素组成的集合,称为无限集合,例如正整数集 $N^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

如果一个集合 A 是由具有某种共同性质 P 的元素 x 组成,这时集合 A 仍可以用 $\{ \}$ 记为

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$$

例 1 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根构成的集合,可以记为

$$A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

例 2 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上所有点构成的集合,可以记为

$$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

例 3 全体偶数的集合,可以记为

$$A = \{x | x = 2n, n \text{ 为整数}\}$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示,称为文氏图.文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合(见图 1.1),集合内的元素以区域内的点表示.

由所研究的所有事物构成的集合称为全集,记为 U .全集是相对的,一个集合

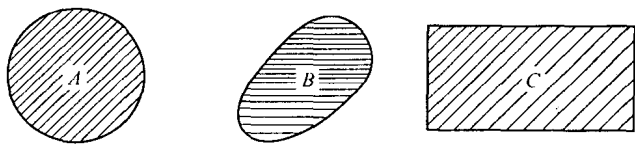


图 1.1

在某种条件下是全集,在另一种条件下就可能不是全集.例如,讨论的问题仅限于有理数,则有有理数集 Q 为全集;讨论的问题为实数集,则有有理数集 Q 就不是全集.

仅含一个元素 x 的集合称为**单元集**,记为 $\{x\}$;不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\emptyset$.例如,方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数解的集合为空集.

2. 子集

定义 1 如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B ,则称 A 为 B 的子集,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A (见图 1.2).

例如,设 N^+ 表示全体正整数的集合, Q 表示有理数的集合,则 $N^+ \subset Q$.

由定义可知,任何一个集合的本身是它的子集,即 $A \subset A$;空集 $\emptyset$ 是任何一个集合的子集.

定义 2 设有集合 A 与 B ,如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

例如,设

$$A = \{x | x \text{ 为大于 } 2 \text{ 小于 } 5 \text{ 的整数}\}$$

$$B = \{x | x^2 - 7x + 12 = 0\}$$

则 $A = B$.

由子集的定义可知,若 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$.

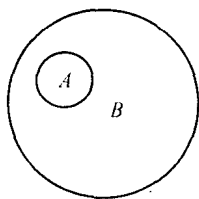


图 1.2

1.1.2 集合的运算

定义 3 设有集合 A 和 B ,由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的并,记为 $A \cup B$ (见图 1.3). 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如, $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

又如 $A_1 = \{\text{水瓶, 饮料, 洗衣粉, 塑料杯}\}$,

$A_2 = \{\text{饮料, 毛巾, 牙膏}\}$,则

$$A_1 \cup A_2 = \{\text{水瓶, 饮料, 洗衣粉, 塑料杯, 毛巾, 牙膏}\}.$$

集合的并有下列简单性质:

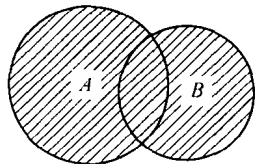


图 1.3

(1) $A \subset (A \cup B), B \subset (A \cup B)$;

(2) 对任何集合 $A, A \cup \emptyset = A, A \cup A = A, A \cup U = U$.

定义 4 设有集合 A 和 B , 由既属于 A 又属于 B 的元素所构造的集合称为 A 与 B 的交, 记为 $A \cap B$ (见图 1.4), 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例如, $\{1, 3, 2, 6\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2, 3\}$;

$\{1, 3, 2, 6\} \cap \{4, 5\} = \emptyset$.

若 $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\}, B = \{x | x < 0\}$,

则

$$A \cap B = \{x | -2 \leq x < 0\}$$

集合的交有下列简单性质:

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$;

(2) 对任何集合 A , 有

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap A = A, A \cap U = A$$

如果 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A, B 不相交或说 A, B 是分离的.

定义 5 设有集合 A 和 B , 由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A \setminus B$ (图 1.5), 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

例如, $\{1, 2, 4, 6\} \setminus \{3, 4, 6, 7\} = \{1, 2\}$;

$\{x | -2 \leq x \leq 2\} \setminus \{x | x < 0\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$.

定义 6 全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合, 称为 A 的余集或补集, 记为 A' (见图 1.6). 即

$$A' = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

例如, 在实数集 $\mathbf{R}$ 中集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 的余集

$$A' = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$$

补集有下列性质:

$$A \cup A' = U, A \cap A' = \emptyset.$$

集合的并、交与补具有与初等代数里加法和乘法相类似的性质, 现列举如下:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

(3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

(4) 摩根律: $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'.$

下面证明分配律的第二个式子和摩根律的第一个式子, 其他的关系式可类似

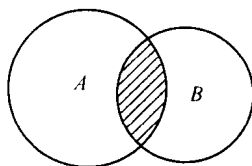


图 1.4

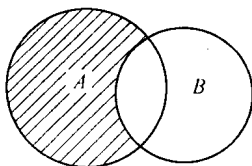


图 1.5

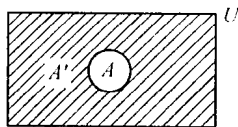


图 1.6

地证明.

设 $x \in (A \cap B) \cup C$, 则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in C$, 因此 $x \in A$ 同时 $x \in B$ 或 $x \in C$, 于是 $x \in A \cup C$ 同时 $x \in B \cup C$, 即 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, 于是 $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$; 反之, 设 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, 则 $x \in A \cup C$ 同时 $x \in B \cup C$, 因此 $x \in A$ 或 $x \in C$, 同时 $x \in B$ 或 $x \in C$, 所以 $x \in (A \cap B) \cup C$. 于是 $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$, 从而 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

设 $x \in (A \cup B)'$, 则 $x \notin A \cup B$, 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 亦即 $x \in A'$ 且 $x \in B'$, 因此 $x \in A' \cap B'$, 所以 $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$; 反之, 若 $x \in A' \cap B'$, 则 $x \in A'$ 且 $x \in B'$, 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 亦即 $x \notin A \cup B$, 因此 $x \in (A \cup B)'$, 于是 $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$, 从而 $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

1.1.3 实数集

在中学里已经学习过自然数、有理数(正、负整数, 正、负分数及零)及无理数的有关知识, 这里作一简要的回顾和总结.

1. 实数集

有理数可以表示为 $\frac{p}{q}$, 无理数不能表示为 $\frac{p}{q}$, 其中 p, q 是互质的整数, 且 $q \neq 0$. 由于分数可以用有限小数或无限循环小数表示, 而有限小数或无限循环小数亦可用分数表示, 所以, 有理数可以表示为有限小数或无限循环小数, 无理数为无限不循环小数.

任何一个有理数 $\frac{p}{q}$ 都可以在数轴上找到一个点与之对应, 这样的点称为有理点, 数 $\frac{p}{q}$ 是有理点的坐标. 反之, 数轴上任何一个有理点必对应于一个有理数.

在数轴上, 有理点是从左往右按大小顺序排列的, 即有理数是有序的. 任意两个有理点 a, b 之间必有第三个有理点, 例如有理数 $c = \frac{a+b}{2}$ 所对应的点. 因而 a, b 两点之间有无穷多个有理点, 即有理点在数轴上是处处稠密的.

虽然有理点在数轴上是处处稠密的, 但它并不是充满了整个数轴而没有空隙. 例如, 边长为 1 的正方形的对角线的长度为 $\sqrt{2}$, 可以证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数, 因此数轴上坐标为 $\sqrt{2}$ 的点不是有理点. 此外坐标为 $\sqrt{3}, \sqrt{2}+1, \sqrt{3}-1, \pi$ 等的点也不是有理点. 因此数轴上除了有理点外还有许多空隙, 这些空隙处的点称为无理点, 与无理点相对应的数称为无理数.

有理数与无理数的全体称为实数, 用字母 $\mathbf{R}$ 表示实数集. 实数点充满数轴而无空隙, 并且也没有重复, 就是说, 实数与数轴上的点成一一对应关系, 即给定一个实数, 数轴上就有惟一的点与它对应; 反之, 数轴上任意一点也一定对应着一个实数. 今后为了简单起见, 常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别, 点 a 和实数

a 是相同的意思.

实数集 $\mathbf{R}$ 有下列重要子集:

自然数集、正整数集、整数集、有理数集、正实数集, 它们分别用符号 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{N}^+$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}^+$ 表示.

2. 绝对值

我们知道, 一个实数 x 的绝对值, 记为 $|x|$, 定义为

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

它是一个大于或等于零的实数. 在数轴上, $|x|$ 表示点 x 到原点的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

- (1) $|x| = \sqrt{x^2}$;
- (2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- (3) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$;
- (4) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad (a > 0)$;
- (5) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式);
- (6) $|x - y| \geq |x| - |y|$.

3. 区间

设 a, b 为实数, 且 $a < b$.

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a 和 b 为端点的开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

(2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合, 称为以 a 和 b 为端点的闭区间, 记为 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

(3) 满足不等式 $a \leq x < b$ (或 $a < x \leq b$) 的所有实数 x 的集合, 称为以 a 和 b 为端点的半开区间, 记为 $[a, b)$ (或 $(a, b]$), 即

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

以上三类区间称为有限区间, 在数轴上它们都可以用一根线段来表示. 数 $b - a$ 称为区间的长度.

除了有限区间外, 还有几类无限区间, 规定如下:

- (4) $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$;
 - (5) $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$;
 - (6) $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, 即全体实数的集合.
- 符号“ $-\infty$ ”与“ $+\infty$ ”分别读作“负无穷”与“正无穷”.

4. 邻域

对任意正数 δ , 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $N(x_0, \delta)$, 即

$$N(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

集合 $N(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 称为点 x_0 的去心邻域(或称空心邻域), 记为 $\dot{N}(x_0, \delta)$, 即

$$\dot{N}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

去心邻域 $\dot{N}(x_0, \delta)$ 也可表示为 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

今后为了应用方便, 我们引入两个常用的逻辑符号 $\forall$ 和 $\exists$:

逻辑符号“ $\forall$ ”表示“任意给定”或“任取”. 例如 $\forall \epsilon > 0$ 表示任意给定一个正数 ϵ 或任意取一个正数 ϵ ;

逻辑符号“ $\exists$ ”表示“存在”或“至少存在一个”, 例如 $\exists n \in \mathbb{N}^+$ 表示存在正整数 n .

习 题 1

1. 用集合的记号表示下列各个集合:

- (1) 小于 100 的正整数集合;
- (2) 圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的内部一切点的集合;
- (3) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 5x - 6$ 交点的集合.

2. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$, $C = \{1, 2, 4, 7, 10\}$, 求:

- (1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $B \cup C$; (4) $B \cap C$;
- (5) $A \cup B \cup C$; (6) $A \cap B \cap C$; (7) $A \setminus B$; (8) $B \setminus C$.

3. 若 A 表示某班会说英语的人的集合, B 表示会说日语的人的集合, 问 A' , B' , $A \setminus B$, $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$ 各表示什么样人的集合?

4. 设某班级有 100 名学生, 有 80 人选修课程 I, 以集合 A 表示这些学生; 有 61 人选修课程 II, 以集合 B 表示这些学生; 有 55 人这两门课程都选修. 试用集合表示下列各类学生, 并求出各类学生的数目:

- (1) 选修课程 I 而不选修课程 II 的学生;
- (2) 选修课程 II 而不选修课程 I 的学生;
- (3) 至少选修两门课程中的一门的学生;
- (4) 两门课程都不选修的学生.

5. 解下列不等式, 并在数轴上表示出 x 的范围:

$$(1) 0 < (x - 2)^2 < 4; \quad (2) 1 < |x - 2| < 3;$$

$$(3) \frac{1}{|x + 1|} < 2; \quad (4) |x| > |x + 1|;$$

$$(5) 4 < \frac{1}{|x + 3|} < 5.$$

1.2 映射

映射也是中学数学里介绍过的概念,这里作简要的复习并作适当的扩充.

1.2.1 映射的概念

设 A, B 是两个非空集合,若存在一个对应法则 f ,使得对每一个 $x \in A$,通过法则 f ,在 B 中都有惟一的元素 y 与之对应,这样的对应法则 f 称为从集合 A 到集合 B 的映射,记作

$$f: A \rightarrow B \quad \text{或} \quad f: x \rightarrow y$$

元素 y 称为 x 在映射 f 下的像,记为 $y = f(x)$, x 称为 y 在 f 下的原像, A 称为映射 f 的定义域,记为 D_f ,而集合 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ 称为映射 f 的值域,记为 R_f ,称 $\{(x, f(x)) | x \in A\}$ 为映射 f 的图像,记为 G_f .

例1 设 A 表示平面上所有三角形的集合, $\mathbf{R}^+$ 表示所有正实数的集合, f 表示对于 A 中每一个三角形取它的面积的对应法则,则 f 便是一个由 A 到 $\mathbf{R}^+$ 的映射.

例2 设 A 是某校全体学生的集合,按某种方法给他们编学号, B 表示学号所成的集合, f 表示 A 中每一个学生取他的学号的对应法则,则 f 是一个由 A 到 B 的映射.

映射的两个基本要素是定义域和对应法则. 设 f, g 是两个从 A 到 B 的映射,若对任意 $x \in A$,都有 $f(x) = g(x)$,则称映射 f 与 g 相等,记为 $f = g$.

1.2.2 逆映射与复合映射

在映射的定义中, x 可以遍取 A 中的元素,但与它对应的 y 未必能遍取 B 中的元素. 如果 y 不能遍取 B 中的元素,则称映射 f 是由 A 到 B 内的映射;如果 y 能遍取 B 中的元素,即 $f(A) = B$,则称映射 f 是由 A 到 B 上的映射,也称为 A 到 B 的满射,如例2.

如果 f 是 A 到 B 的满射,且对每一个像, $y \in B$ 只有一个原像 $x \in A$,则称映射 f 是一一映射或一一对应. 例如 $A = [0, 2]$, $B = [0, 4]$, $f: x \rightarrow x^2$ 是 A 到 B 的一一映射.

设 f 是定义在 D_f 上的一个映射,值域为 R_f . 如果对每一个 $y \in R_f$,有惟一的满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应,其对应规则记为 f^{-1} ,这个定义在 R_f 上的映射 f^{-1} 称为映射 f 的逆映射,即

$$f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$$

由定义可知, $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$,且若 f 有逆映射 f^{-1} ,则 f 必是一一映射.

设有映射 $g: A \rightarrow B$ 及映射 $f: B \rightarrow C$, 若 $D_f \cap R_g$ 非空, 则由 g 和 f 确定了一个 A 到 C 的映射 h :

$$h(x) = f(g(x)) \quad (x \in A)$$

这个映射 h 称为 g 与 f 的复合映射(见图 1.7), 记为 $h = f \circ g$, 其中 $u = g(x)$ 称为中间元.

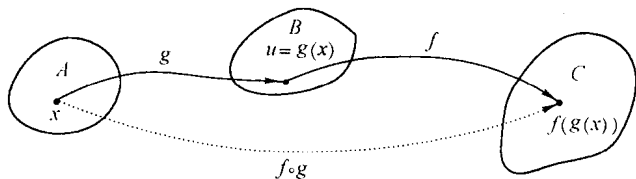


图 1.7

1.3 函数

函数概念是高等数学中一个十分重要的概念, 现在, 我们在中学学习函数的基础上利用映射概念来研究函数, 并进一步阐明函数的有关性质.

1.3.1 函数概念及其表示法

定义 1 设 A, B 是两个实数集, 称映射 $f: A \rightarrow B$ 为一元函数, 记作

$$f: x \rightarrow y = f(x) \quad (x \in A)$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, $f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的函数值, A 称为 f 的定义域, 记为 $D(f)$; 全体函数值的集合 $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ 称为 f 的值域, 记为 $R(f)$.

“函数”一词通常指的是对应法则 f , 但习惯上, 常用“ $y = f(x), x \in A$ ”来表示函数, 此时应理解为“由对应关系 $y = f(x)$ 所确定的函数 f ”.

对应法则也常常用字母 φ, h, g, F 等表示, 相应的函数也就记作 $\varphi(x), h(x), g(x), F(x)$ 等.

在平面直角坐标系中, 若取自变量在横轴上变化, 因变量在纵轴上变化, 则平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ 就是定义在 $D(f)$ 上的函数 $y = f(x)$ 在直角坐标系中的图像.

由函数的定义可知, 一个函数是由定义域 A 和对应法则 f 确定的, 值域随着 f 和 A 的给定而确定, 因此定义域和对应法则是函数定义中的两个基本要素. 两个函数, 如果它们的定义域相同, 并且对于定义域内每个自变量的值, 它们所对应的函数值也相同, 则称这两个函数相等.

例如, 函数 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是相同的函数, 而函数 $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 是两

个不同的函数,因为前者的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,而后者的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,它们的定义域不相同.

研究一个函数,必须要知道函数的定义域.但在习惯上,往往只给出函数的对应规则,而未说明其定义域.此时,对于反映实际现象的函数关系,定义域常常由函数的实际意义来确定.例如,表达真空中自由落体运动规律的函数

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其自变量 t 在 $t=0$ (物体开始下落的时刻)到 $t=T$ (物体着地的时刻)之间变化,因此该函数的定义域为区间 $[0, T]$.对于由数学式子所表示的函数,其定义域就是使该表达式有意义的自变量的所有值所构成的数集.例如,函数 $y = \sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $[-2, 2]$.

例 1 确定下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{5-x} + \lg(x-1); \quad (2) y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}.$$

解 (1) $5-x \geq 0$ 且 $x-1 > 0$, 解得 $1 < x \leq 5$, 于是函数的定义域为 $(1, 5]$.

$$(2) \left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1 \text{ 且 } 2+x-x^2 > 0, \text{ 即}$$

$$-2 \leq x-1 \leq 2 \quad \text{且} \quad (2-x)(1+x) > 0$$

所以

$$-1 \leq x \leq 3 \quad \text{且} \quad -1 < x < 2$$

因此有 $-1 < x < 2$. 于是函数的定义域为 $(-1, 2)$.

函数定义中的对应法则 f 是因变量与自变量之间函数关系的具体表现,它的表示方法很多,比较常见的有三种:公式表示法、图形表示法和列表表示法.

公式表示法就是写出函数的数学表达式和定义域,这种表示法常用在理论分析中.

图形表示法就是用一条曲线来表示因变量随自变量的变化关系,例如气象台用仪表记录下的温度曲线来表示气温随时间变化的关系.

列表表示法就是将自变量和因变量的对应数据列成表格,从表格上可以很直观地了解它们之间的关系,如三角函数表、对数表等等.

在实际应用中,常常根据需要选用或结合使用这三种表示法.

我们今后主要研究用公式表示的函数.而在用公式表示的函数中,有一些函数,对于其定义域内自变量的不同的值,不能用一个统一的数学式子表示,而要用两个或两个以上的式子表示,这类函数称为分段函数.

$$\text{例 2} \quad y = \begin{cases} 2+x, & x < 1 \\ 4-x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

这是一个分段函数,不能误认为是两个函数(见图 1.8).

例 3 符号函数(见图 1.9)