国家自然科学基金资助项目

经济均衡的数学原理

Mathematical Principles Of Economic Equilibrium

潘吉勋 张顺明 编著

吉林大学出版社

国家自然科学基金资助项目

经济均衡的数学原理

潘吉勋　张顺明　编著

吉林大学出版社

经济均衡的数学原理
潘吉勋　张顺明　编著

责任编辑、责任校对:卢喜观　　　封面设计:孙　群

吉林大学出版社出版　　　吉林大学出版社发行
(长春市东中华路 37 号)　长春市永昌福利印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米　1/32　　1997 年 12 月第 1 版
印张:8.875　插页:4　　1997 年 12 月第 1 次印刷
字数:228 千字　　　印数:1—1200 册

ISBN 7—5601—2077—6/0·229　　定价:12.00 元

内容简介

经济均衡理论是现代经济学理论的核心.本书以公理化方式系统地阐述了经济均衡理论以及与之配套的分析方法和数学工具，涉及多位诺贝尔经济学奖得主的工作，介绍了80年代以来该领域的最新进展.

本书可作为经济学和数学的高年级学生及研究生的选修课教材，也可作为理论研究工作的参考书.

序　言

> 凡是遵从科学思维并准备发展成为一门理论的研究，能够也必须运用数学表达处理.
>
> ——D. Hilbert

19 世纪末期，以 Walras 和 Pareto 为代表的经济学家创立了数理经济学派，提出了一般经济均衡学说的构想. 20 世纪中叶，以 von Neumann、Arrow 和 Debreu（后两人分别是 1972 年和 1983 年诺贝尔经济学奖得主）为代表的数学家为这一学说奠定了理论基础；随之，数理经济学逐渐成熟为一门独立学科. 它是经济学家和数学家通力合作的结果，堪称是社会科学和自然科学交叉的成功典范.

进入 60 年代，来自不同的数学分支的数学家投身到经济学研究领域. 数理经济学进入了综合发展时期，经济学与数学相辅相成，彼此为对方照亮了前进的道路. 自 1969 年设立诺贝尔经济学奖以来，有半数以上的获奖者是得益于有效地应用了数学，这表明数学在经济理论中起着至关重要的作用而且大有用武之地. 多年来，已经形成了"经济—数学—经济"这样的模式，即从经济的实际问题出发，建立数学模型；运用数学理论和方法求解模型，形成经济理论；最后，在实践中验证理论，并应用它指导经济运作. 数学总是其它学科的合作伙伴，它着眼于"能够做什么"和"怎样做得更好"，这大概正是它在许多边缘学科中获得成功所遵循的路线，这条路线已经并将继续在经济研究领域得到贯彻.

数学化已成为现代经济学研究领域中的重要趋势，这招致了

人们的怀疑：有没有必要应用多数人难以弄懂的高深数学来论证经济规律和解释经济现象？问题在于经济事实本身非常复杂，用文字和图示只能描述现象的表面；单凭直觉思维难以理清经济要素之间的内在联系，更不要说还要给出数量的刻划．面对困难的经济问题，简单的数学已无能为力，必须运用与之相匹配的数学工具建立逻辑严密的理论框架，在此基础上逐步地予以解决．70年代，Black、Merton 和 Scholes 运用高深的数学发明了期权定价公式，把处理风险从猜想变成为科学，引起金融领域的深刻变革（美国人称为“华尔街革命浪潮”），带来了巨大的经济效益，他们也因此获得了1997年诺贝尔经济学奖的殊荣．著名的经济学家Samuelson（1970年诺贝尔经济学奖得主）曾经表述过如下见解：与过去经济理论往往缺乏可操作性相比较，现在的情况不同了．在华尔街，你常会看到搞数理经济学的年轻人被金融集团聘用为高薪顾问．由此类事实可见，数理经济学不仅能启迪思维解释经济现象，而且已经步入实用化，成为人们创造财富和防范风险（乃至危机）的有力武器．

数理经济学已经作为人类的共同知识财富被肯定下来，但在中国开展这门学科的研究却是很迟的事情．70年代末，著名数学家华罗庚率先开始了这方面的探索．数理经济学家王毓云（中科院）从事资源问题研究，在“黄淮海农业综合治理”国家攻关项目中，建立了“农业资源配置数学模型”，1987年获得了国际运筹学会IFORS奖．这项工作开创了在我国数学与经济实践相结合的先例，树起了研究和发展数理经济学的旗帜．数学家史树中（南开大学）对发展我国的数理经济学具有使命感，他耗去许多时间和精力考证了大量科学文献，撰写了《数学与经济》一书，向人们展示了数学在经济学研究中所取得的成就，启迪读者关注这一极具魅力的学术领域．近年来，国家把数理经济学这门学科作为急需发展的重点加以扶持，唤起许多院校和学者投入这方面的研究，取得了长足的进展．诚然，数理经济学在我国还是一个新学

科，在搞好学科建设和发展学术研究方面还有大量的基础性工作需要做，这也正是作者编著本书的初衷.

数理经济学基本上是以经济均衡理论研究为主线发展和成形的，本书以公理化方式系统地阐述了经济均衡理论以及与之配套的分析方法和数学工具，涉及多位诺贝尔经济学奖得主的工作，介绍了80年代以来该领域的最新进展. 在内容的处理上，我们以经济问题和经济数学模型为纲. 数学作为辅助工具，以满足解决问题的需要为限，适可而止，不去过多地追求数学自身的系统化. 本书的内容大致可分为三部分. 第一章至第三章讲述线性经济模型，辅以非负矩阵理论及凸分析作为数学工具. 这部分讲述了投入产出模型、数学规划及一般线性生产模型，这些成果已被广泛地应用于经济实践. 我们则侧重弄清它们的数学原理，这对于应用和发展这些模型是至关重要的. 第四章至第六章系统地阐述一般经济均衡理论. 不动点定理在论证中起着关键性作用，书中对该定理给出了完整的证明，并且介绍了计算均衡价格的基本思路. 微分拓扑学是解决非线性问题的重要数学工具，也是深入研究经济均衡理论所必需的. 然而，在本书中不可能为此作很多的铺垫，只能采用较为节约的方式讲述微分流形的基本原理，以便保证对经济命题的论证能够顺理成章. 第七章介绍了80年代以来关于不完全市场理论的新进展，运用微分流形理论证明了现货-金融市场均衡的普适存在性. 与此有关的研究方兴未艾，并且构成了宏观经济学和金融经济学的重要理论基础.

我们假定读者掌握了微积分和线性代数的基础知识. 本书基本上作到了知识自给，除去少数几个引用而未予证明的定理之外，主要的结论和定理均给出完整的证明.

作者的工作得到国家自然科学基金的资助，吉林大学和空军长春飞行学院给予了有力的支持和保障，借此机会，我要表示敬意和感激. 王毓云教授对发展中国的数理经济学做出了特殊的贡献，他在生前热情地鼓励我撰写本书，并提出了许多宝贵的建

议. 史树中教授多年来给予作者许多雪中送炭般地帮助. 我与孙以丰教授有过卓有成效的合作，他在拓扑学方面的高深造诣使我受益匪浅，借此机会，向他们表示衷心的感谢.

本书的部分内容曾作为选修课在吉林大学讲授过，于维生和姜杰两位副教授以其教学实践提出了不少修改意见. 吉林大学出版社卢喜观先生花费了许多心力，使本书得以顺利地出版. 李凤翔先生的精湛的排版技术令人称道. 在此，向他们致以诚挚的谢意.

最后，我要感谢读者光顾本书，希望它能成为我们共同攀登经济学研究领域前沿的阶梯. 书中的疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正.

潘吉勋

1997 年 11 月于长春

书中常用符号

1. 集合

$x \in X$	x 属于集合 X
$x \notin X$	x 不属于集合 X
$\varnothing$	空集
R	实数集合
R^n	n 维实空间
R^n_+	具有非负分量的 n 维向量所构成的集合
R^n_{++}	具有正分量的 n 维向量所构成的集合
$X \subset Y$	集合 Y 包含了集合 X
$X = Y$	集合 X 等于集合 Y
$X \cup Y$	集合 X 和 Y 的并集
$X \cap Y$	集合 X 与 Y 的交集
$X + Y$	集合 X 与 Y 的向量和(即 $\{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$)
$X \setminus Y$	$\{x \mid x \in X, x \notin Y\}$
$X \times Y$	集合 X 与 Y 的笛卡尔乘积(即 $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$)
$\overline{X}$	集合 X 的闭包
$\mathrm{int}X$	集合 X 的全部内点
$\mathrm{conv}X$	集合 X 的凸包
∂X	集合 X 的边界

2. 向量及矩阵

$x \in R^n$	n 维列向量
x_i	向量 x 的第 i 个分量
$xy = x \cdot y$	向量 x 与 y 的内积，$xy = \sum_1^n x_i y_i$

$\|x\|$ 向量x的范数，$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

$\|x\|_1$ 向量x的范数，$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

$x\geqslant 0$ 向量x的所有分量$x_i\geqslant 0$

$x>0$ 向量$x\geqslant 0$且$x\neq 0$

$x\gg 0$ 向量x的所有分量$x_i>0$

x^T 向量x的转置(行向量)，在不引致误解的情况下，有时也记成x.

A^T 矩阵A的转置

$p\Box x$ 向量束$p=(p^1, p^2, \cdots, p^k)$和向量束$x=(x^1, x^2, \cdots, x^k)$的盒积，$p\Box x=(p^1\cdot x^1, p^2\cdot x^2, \cdots, p^k\cdot x^k)^T$

Ax 矩阵A右乘以向量x（x为列向量）

pA 矩阵A左乘以向量p（p为行向量）

3. 其它

$\preceq$ 偏好记号

$\mathrm{Re}(\omega)$ 复数ω的实部

$r(A)=\mathrm{rank}A$ 矩阵A的秩数

$\dim E$ 集合E的维数

$\bar{x}=\arg\max\{u(x)|x\in B\}$ $u(x)$于$\bar{x}\in B$处达到最大值.

$f: X\rightarrow Y$ 从集合X到集合Y的映射(或函数)

$f: X\rightrightarrows Y$ 从集合X到集合Y的集值映射

$\nabla f(x)$ 函数$f(x)$的梯度，$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$

$\mathrm{span}[a^1, \cdots, a^n]$ 向量$a^1, \cdots, a^n$张成的线性空间

目　　录

第一章　投入产出分析

“投入产出分析”是美国经济学家W. W. Leontief①于本世纪20年代提出的，是一种对经济系统进行数学分析的方法. 目前，这种方法已经被世界许多国家广泛采用，而且联合国社会经济部建议会员国把投入产出表作为国民经济核算体系的一部分. 投入产出方法作为一种经济分析的工具，它已被应用于多种经济问题的探讨和研究. 这些问题包括：生产结构、动态分析、成本与价格、计划与预测、地域间的经济关联、对外贸易、人口和资源、环境与经济发展的关系等等. 如此说来，“投入产出分析”及其应用是一个内容十分丰富的经济学研究课题，以至于有必要独树一帜，于是形成了“投入产出经济学”这样的经济学分支. 本章主要阐述它的数学原理，以此作为掌握和运用这种分析方法的理论基础.

§1.1　投入产出表

早在18世纪中叶，法国经济学家F. Quesnay②创立了《经济表》，把无数个别的生产和交易活动综合为社会总产品的生产和流通，用图解的形式表现出来. 19世纪中叶，K. Marx的简单再生产方案也是运用图解的方式表达的. 从价值形态和实物形态考察了产品各组成部分的流通. 19世纪末期，瑞士经济学家

---

① W. W. Leontief(1906—　)，美籍俄国经济学家，20年代在前苏联和德国攻读经济学，1931年移居美国，在哈佛大学任教，1973年获诺贝尔经济学奖.

② F. Quesnay(1694—1774)，法国国王路易十五世的顾问医生，以发明了《经济表》而闻名.

L. Walras 带领数理经济学派创立了“一般均衡理论”，提出了以社会总供给与总需求相平衡作为一种理想的经济模式. 正是在这些先驱者的工作基础之上，W. W. Leontief 发明了《投入产出表》，他本人以及后继者对此建立了一整套的理论和实实在在的应用范例，使得数理经济学的理论和实践形成了两翼振飞的形势.

1. 实物型投入产出表

在一个确定的时期(如一年)，某个经济系统内每个部门的产品在各部门之间的流通情况，可以用一张图表表现出来，这就是所谓的“投入产出表”，也称“产业关联表”，它简明扼要地概括了经济系统所有部门的各种投入的来源以及各类产出的去向.

设经济系统内有 n 个部门，分别用 $1,2,\cdots,n$ 来表示并记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 为了理论的展开，我们作如下假定：

假定1 每个部门仅生产单一产品，而且不同产品是由不同部门生产的.

这个假定容许我们把产品和部门对应起来，因此，也可以用 $1,2,\cdots,n$ 来表示产品. 当然，在不同的投入产出表中，部门的划分可能是不同的. 例如，在某个表中，汽车制造业和机械制造业是两个部门，而在另一个表内，这两种制造业是属于同一个工业部门.

设第 i 部门的总产出数量为 x_i，其中有数量 x_{ij} 的产品用作对第 j 部门的投入，称作中间投入或中间产品；第 i 部门的剩余产品的数量为 c_i，这部分产品(在本系统内)将不再加工，用作消费或积累，称作最终产品或最终需求，于是，建立起如下的平衡关系：

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} + c_1 \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} + c_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} + c_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

其实，这就是一般均衡理论的具体化，即

$$\text{总供给} = \text{总需求}$$

必须明确上述公式中出现的各个量的计量单位. 可用实物单位(如米、千克等)作计量单位，也可用货币单位(元或万元作计量单位)，这便导致了投入产出表有实物型和价值型之分.

现在，我们采用实物计量单位，把(1.1)式中各量填写入一张棋盘式的表格内，便得到实物型投入产出表，例如表1.1.

表1.1 实物型投入产出表

主要产品名称 / 消耗物质名称	计量单位	中间产品								量终产品				总产品
		粮食	棉花	棉纱	原煤	发电	钢	货运	…	消费	积累	…	小计	
粮 食	万吨	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	…	g_1	s_1	…	c_1	x_1
棉 花	万吨	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	…	g_2	s_2	…	c_2	x_2
棉 纱	万吨	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{37}	…	g_3	s_3	…	c_3	x_3
原 煤	万吨	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}	x_{47}	…	g_4	s_4	…	c_4	x_4
发 电	亿度	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	x_{56}	x_{57}	…	g_5	s_5	…	c_5	x_5
钢	万吨	x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	x_{65}	x_{66}	x_{67}	…	g_6	s_6	…	c_6	x_6
货 运	亿吨/千米	x_{71}	x_{72}	x_{73}	x_{74}	x_{75}	x_{76}	x_{77}	…	g_7	s_7	…	c_7	x_7
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Leontief 引进了直接消耗系数

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j},\qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{1.2}$$

它表示生产1单位第j种产品所要消耗的第i种产品的数量. 将$x_{ij}=a_{ij}x_j$代入(1.1)便得

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+c_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+c_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+c_n \end{aligned} \tag{1.3}$$

今记