高等学校
教学用书

基础集合论

董延闿

北京师范大学出版社

ISBN 7-303-00263-4/O·58
定 价: 1.70 元

高等学校教学用书

基础集合论

董延闿

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

基础集合论

董延闿

*

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

中国科学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7.625 字数：158 千

1988 年 11 月第 1 版 1988 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—3 000

ISBN 7-303-00263-4/O·58

定价：1.70 元

前　　言

自从 G. Cantor 在上一世纪后期创立集合论以来，集合论已经成为现代数学几乎所有分支的理论基础。然而，目前在国内向读者系统介绍集合论最基本的理论并进行集合论推理的基本训练，为读者进一步学习数学打好根基的集合论教材尚不多见。有鉴于此，作者不揣谫陋，编写了这本教材。限于作者的水平，书中错误与不当之处在所不免。作者殷切希望得到读者和专家们的批评和指正。

本书是按照公理化的精神编写的。作者没有从一开始就罗列本书需要的全部公理，而是按照材料发展的需要逐步列出它们。这样可使读者更清楚地看出哪些结论只用哪些公理就足以证明。不过，本书不是一本"公理集合论"，它既不涉及现代集合论中深入的课题，也不过多地追求形式化。为了使读者易于理解，本书的推证部分写得比较详细，并且对于较难懂的证明按照作者的体会描述了这些证明的概括和直觉想法。作者希望做到，在大学数学专业学过两年的读者经过努力一般应能不很困难地自学本书。

每章后面编有习题。习题的顺序与正文相应部分的顺序基本一致。读者可以配合正文去作习题。习题是本书的有机组成部分，数量并不太多，希望读者至少完成其中的大部分。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

本书承认逻辑法则，不另作系统论述，对于希望了解逻辑知识的读者，建议参阅王宪钧著《数理逻辑引论》（北京大学出版社）。

本书的初稿曾于1985年和1986年在北京师范大学数学系试用两遍。在编写初稿以前，徐长胜同志向作者提出了一些有益的具体建议。在完成初稿以后，王世强教授对之进行了认真仔细的审阅，并指出了其中的若干错误。作者谨对他们表示深深的谢意。

董延闿
于北京师范大学数学系
1986年7月

内 容 简 介

本书向读者系统地介绍集合论最基本的理论，为学习数学各分支打下理论的根基．它是按照公理化的精神编写的，但不过多地追求形式化．为了使读者易于理解，推证部分写得比较详细，并且，对于较难懂的证明，还描述了证明的直觉想法．

本书可用作高等院校数学专业同名选课的教材．也可用作大学生，中学教师及需要集合论知识的科技工作者的自学读物(全书或前四章)．

目　　录

第一章　集合与集合的运算

§1 引　言

集合论成为一门学科，是上一世纪后期的事情. G. Cantor 在 1874-1897 发表的一系列论文奠定了集合论的基础. 从那以后，集合论的概念和结果被广泛应用于数学的各个分支，使数学科学的面貌受到了深刻的影响. 在今天，可以说集合论已成为几乎所有数学分支的基础了.

Cantor 集合论的出现在当时数学界引起极大的反应. 它受到一部分数学家，如 R. Dedekind, B. Russell, D. Hilbert 等等的支持和高度赞美，也受到一部分数学家，特别是 L. Kronecker 的激烈反对①. 同时，从上一世纪末开始，形形色色的有关集合论的悖论不断出现②，当时的集合论对这些悖论不能做出满意的回答.

在集合论的初创时期，Cantor 是以所谓“朴素的”观点来看待集合的. 他广泛地谈论集合，但他没有明确规定对于已知集合做哪些事情是合法的，就是说，对已知集合做哪些事情可以得出受到承认的集合. 尽管 Cantor 本人实际已经建立起相当广泛而深刻的集合理论，但他在理论基础上的某些

① 参看 M. 克莱因:《古今数学思想》(北京大学数学系数学史翻译组译)，第 41，51 章.

② 参看本章，§ 3.

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

不明确性使得他和他的支持者们不能有力地保卫他的理论，也不能把所有已经提出的谆论排除于集合论的大门之外.

为了填补 Cantor 在理论基础上的不足，从而维护 Cantor 的理论，在 1908，E. Zermelo 首先为集合论设立了一套比较完整的公理，这些公理主要是明确了对已知集合做哪些事是合法的. 以后经过 A. Fraenkel 等人的补充和完善，形成了现在所谓的（ZF）公理系统. 较晚一些，还有所谓的（GB）公理系统，是由 von Neumann，P. Bernays，K. Gödel 等人建立的. 在这样的公理系统中，谆论被排除了，责难的声音也就减弱了. 在本世纪，在公理化的集合论中，关于选择公理① 和连续统假设② 的研究大大推动了集合论的发展，使之成为至今活跃的数学学科之一.

本书是为学习其他学科服务的集合论教材，不包含集合论的专门课题. 不过，按照当代的要求，本书将按照公理化的精神向读者介绍集合论的基本内容，所遵循的公理系统就是上述的（ZF）系统. 另一方面，为了便于初学者理解，本书将不追求叙述的高度形式化. 最后，我们声明，本书将承认数学中通用的逻辑法则. 除在个别场合以底注形式列出一些逻辑法则外，我们将不对逻辑法则进行系统的考察.

§2 集 合

什么是集合？ 集合论的创始人 G. Cantor 曾作如下描

① 参看第四章，§ 4.

② 参看第六章，§ 12.

述:

"一个集合是我们直觉中或理智中的,确定的,互不相同的事物的一个汇集,被设想为一个整体(单体)".

这些事物叫做这集合的元素,或说这些元素属于这集合,也说这集合包含这些元素.

Cantor 的描述对于人们直观地理解集合概念是很有价值的. 例如,它说一个集合的元素是"确定的",这意味着某个事物是否属于某个集合是没有丝毫含混余地的;又如,它说一个集合的元素是"互不相同的",这意味着在一个集合中相同的元素只能算是一个;又如,它说把一个集合"设想为一个整体(单体)",这意味着要把整个集合看成一个单独的思维对象,而不再看成那些个别元素的简单积累.

读者可以在这样的理解下举出很多集合的例子,如在某一时刻在某一教室的学生的集合,平面上与某一三角形相似的一切三角形的集合等等. 但应看到,Cantor 的叙述不能当作集合概念的定义,因为,在这叙述中所谓"汇集","整体",并不比"集合"简单,不过是它的同义语罢了.

在本书中,我们把"集合"和"属于"当作不定义的原始概念. 用 $a\in A$ 记句子"a 属于集合 A",用 $a\notin A$ 记句子"a 不属于集合 A". 在 $a\in A$ 的情况下,说 a 是集合 A 的元素,或说集合 A 包含 a.

现在有个问题需要说明:集合的元素是什么?我们的答复是,集合的元素还是集合. 这就是说,当我们写下 $a\in A$ 时,其中的 a 和 A 都被认为是集合. 对读者来说,一个集合以另外一些集合为元素的情况是不生疏的. 例如,与一已知直线平行的一切直线组成一个集合,这集合的元素是直线,而直

线又可看成点的集合.读者可能感到不解的是,除了以集合为元素的集合外,为什么不考虑以其他事物为元素的集合?我们的答复是: 1) 我们讲的是抽象的集合论. 抽象集合论研究的只是集合和集合与集合之间的关系,不考虑集合以外的对象. 2)集合本来是不定义的概念,因而不能阻止我们把它们的元素仍看作是集合. 这样做并不防碍把集合论的结果应用于其他分支(在允许应用的情况下).

如上所述,"属于"关系(记为$\in$) 是集合论中一个基本关系. 此外,我们把"等于"关系(记作$=$)看作是前于集合论而在集合论中延袭下来的一个基本关系①. 集合A等于集合B(记作$A=B$)指的是A和B是同一集合,集合A不等于集合B(记作$A\neq B$)指的是A和B不是同一集合. 在$A=B$的情况下,可以理解为字母A和B是同一集合的不同记号,它们可以互相代替. 例如,如 $a\in A$ 且 $a=b$, 则 $b\in A$.

以下是关于"等于"和"属于"这两个基本关系的公理:

外延公理

对于集合 A, B, 如果对于任何的 x: $x\in A$ 当且仅当 $x\in B$, 则 $A=B$.

这就是说,如果两个集合有完全一样的元素,则它们是同一集合.

【注 1】 按照上面对于$A=B$ 的理解,外延公理的逆命题显然成立,即,如 $A=B$, 则对于任何的 x: $x\in A$当且仅

① 有的作者利用"$\in$"定义"$=$",并改动下面的外延公理. 参看,例如 G. Takeuti, W. M. Zaring 合著的《Introduction to Axiomatic Set Theory》, Ch. 3.

当 $x\in B$.

此外，读者可能认为外延公理本身也是按逻辑显然成立，不必列为公理．难道元素完全一样的两个集合不是同一集合吗？ 问题不是这样简单． 公理涉及到“$=$”和“$\in$”两个概念（“元素”概念是用“$\in$”概念解释的）． 如上所述，“$=$”概念算是明确了，但“$\in$”概念是不定义的．在日常用语中，“属于”概念并不明确．例如，用 x 记教室，用 A 记学生，从权利上看，不妨把学生 A 在教室 x 上课说成是 x 属于 A．如果两个学生 A 和 B 总在同样的教室上课（不论教室变到哪里），那么，对于任何的教室 x，x 总是同时属于 A 和 B 的．但 A 和 B 却不见得是同一个学生．可见这样意义的“属于”就不符合外延公理．外延公理实际是规定了集合论中“$\in$”的用法．

【注 2】 从外延公理和注 1 不难推出，集合 $A\neq B$ 的必要且充分条件： 存在某个 x，$x\in A$ 但 $x\notin B$，或者存在某个 y，$y\in B$ 但 $y\notin A$.

以下是我们的另一个公理：

> **空集公理**
> 存在一个不包含任何元素的集合，这就是说，存在一个集合 A，使得对于任何的 x，$x\notin A$.

空集公理含有以下两层意思：(1) 我们承认了存在至少一个集合（当然不排斥存在其他集合），这样，我们的集合论就不是无的放矢了．(2) 我们承认了不含任何元素的“汇集”是一个集合，排除通常认为集合必须包含元素的想法．

【空集公理的注】 空集公理中的集合 A 是唯一的．

这是因为，如果 A 和 B 都是这样的集合，即对于任何的

x，同时有 $x \notin A$ 和 $x \notin B$，这等于说对于任何的 x，同时有 $x \in A$ 和 $x \in B$。按外延公理，$A = B$。 ∎

【定义】 不含任何元素的集合叫空集，记以 $\varnothing$。

§3　集合论的公式和条件

现在，暂时回到直观的或经验的观点来议论集合。我们认为一个集合是由一些确定的事物组成的一个集体（参看上节 Cantor 关于集合的描述）。这就是说，任何一个事物属不属于这个集合应是完全能够判断的。例如说，某教室内一切身高超过 1.80 米的学生组成的集合。这个集合完全确定（当然，可能是空集）。但如说，"某教室内一切高个子（假定不给标准）学生"，这就不能形成集合。在第一个例子里，关于集合的元素的条件是明确的，而在第二个例子里条件却不明确。

在人们的经验里，往往认为用一句合乎语法的语言来表达某一集合的元素的"条件"是否明确，是容易判断的。但请看以下的悖论：

Berry 悖论（1906，G. Berry）①

在一切自然数中，考虑

"能用少于二十四个汉字表示的自然数"。

例如，

一千九百八十五(七个汉字)

三百九十七与五的积(九个汉字)

公元一千九百八十六年零时全世界的人口

① 当然，我们已把这悖论汉文化了。

数(十九个汉字)

它们所表示的自然数都符合"条件". 现在看这里给出的"条件"是否明确?我们知道,汉字不超过六万个,于是用少于二十四个汉字形成的字组不会超过 $60000+60000^2+\cdots+60000^{23}$ 个. 可见能用少于二十四个汉字表示的自然数只有有限多个. 但自然数是无穷尽的,故必存在自然数,不能用少于二十四个汉字表示. 设 n_0 是其中的最小数. 于是 n_0 可说成是:

"不能用少于二十四个汉字表示的自然数中最小的一个".

从纯形式上看,自然数 n_0 只用二十三个汉字就表示出来了,所以 n_0 符合"条件". 但从语义上看,n_0 是"不能用少于二十四个汉字表示的自然数",所以 n_0 不符合"条件"! 由此可见,这里给出的貌似明确的"条件"归根到底是不明确的.

以上讨论说明,用通常语言表达的"条件"是否明确并非永远容易判断的. 应该对怎样才算"明确"给出标准. 但是,这样的标准对通常语言来说是难以给出的(这个难题留给语言学家). 好在我们谈论的是数学,特别谈论的是集合论. 集合论只考虑集合和集合与集合之间的关系. 这样,我们可以把"条件"限制在一个明确的范围内.

先介绍"集合论的公式"这一概念. 在上节我们已经说过,"$=$"和"$\in$"是集合论中两个基本关系. 另外,集合论中还有七个逻辑联系,分别用以下七个符号来记(每个符号后面写的是它的原义):

$\neg$——非

$\vee$——或(非此即彼,包括亦此亦彼)

$\wedge$——且

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com