面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数及其应用

汪　雷　宋向东　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数及其应用

汪雷　宋向东　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果,是面向21世纪课程教材.本书以矩阵作为全书内容展开的主线,各章分别为矩阵及其运算,行列式及矩阵的秩,n维向量组,线性方程组、矩阵的特征值问题,二次型,线性空间,应用实例选讲.附录为Matlab简介.本书可作为高等农林院校的教材,也可作为经济管理类专业的教材.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/汪雷等主编.—北京:高等教育出版社,2001.7(2003重印)
ISBN 7-04-010028-2

Ⅰ.线…　Ⅱ.汪…　Ⅲ.线性代数　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第037838号

线性代数及其应用
汪雷　宋向东　主编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2001年7月第1版
印　　张	14.75	**印　　次**	2003年1月第4次印刷
字　　数	270 000	**定　　价**	12.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

《线性代数及其应用》编写人员

主　编：汪　雷　宋向东
副主编：贾　鹂　丁体明　德　娜　刘建慧　郑国萍
参　编：白银凤　罗蕴玲　林淑容　张凤元　刘　斌
赵立强　程　莉　熊　骏

序

同微积分学一样，线性代数也是高等院校普遍开设的一门基础性数学课程．与微积分学相比，线性代数更多地是从离散的角度研究客观世界的空间形式和数量关系．学习线性代数课程，无论是对于比较全面地培养学生的数学思维、提高数学素质，还是为进一步学习其他课程打下基础，都有着不可替代的重要意义．特别是随着计算机科学的发展，数字化处理技术渗透到科学的各个分支，学习线性代数的意义就更为突出．

为了帮助学生更好地掌握线性代数的基本知识和基本思想，一部好的教材是至关重要的．尤其是对于非数学专业的大学生，如何适应不同专业的需要，在不多的学时之内，精心选取教学内容，使其既能体现线性代数的基本思想，保持一定的系统性和完整性，又能紧密结合应用背景，有利于学生“用数学”的意识和能力的培养，即我们通常所说的融科学性、实用性于一体，都需要担任线性代数课程的教师们在认真总结多年来的教学经验和教改成果的基础上，付出艰辛的劳动，作进一步的思考和探讨．河北农业大学等校编写的这本《线性代数及其应用》，就是在这一指导思想下，通过执行教育部组织的“面向二十一世纪教学内容和课程体系改革计划”项目所取得的一项重要成果．

这部教材在内容编排上有许多特点，突出的一点是把矩阵作为全书展开的主线．开篇第一章就是矩阵，以后各章都是以矩阵为线索展开讨论．行列式看成 n 阶方阵按一定规则对应的数；而行列式又用于讨论有关矩阵的最主要的概念“秩”．n 维向量当然也是特殊的矩阵（行矩阵或列矩阵）．通过向量的线性相关性的讨论，又建立起向量组的秩与矩阵的秩的联系．线性方程组的讨论中广泛地应用了有关矩阵和向量的结论，线性方程组的结果又用于研究矩阵的特征值与特征向量．二次型的讨论则完全是又一种特殊矩阵（对称方阵）在正交变换下的性质的研究．这样，就以矩阵为线索把线性代数串成了一个整体，而不是联系不紧密的各个章节的拼合．这种编排适应了现代数学发展的潮流，同时也有利于引导学生抓住矩阵这根主线，深入地理解线性代数的精神实质，从而有利于学习和掌握这门课程．

这部教材十分注意以严谨的语言，清晰而准确地叙述线性代数的基本内容．在不大的篇幅下，所有定理均给出了证明（有的教材对某些证明采用“从略”的作法，容易给学生造成知识不够完整的印象）．同时，非常注意把典型问题的解法讲

透，并辅之以详尽的例题，引导和启发学生切实掌握基本的解题步骤和技巧.

该书的另一个显著特点是十分注意突出线性代数的应用背景，每个重要的基本概念都在一定的比较直观的几何或其他方面应用背景下引出；除各章穿插了一些实例外，还专门编写了"应用实例"一章，使学生充分看到了线性代数的广泛用途，有利于增强学生的学习兴趣.此外，本书略去了许多教材中都包含的某些计算内容，而以附录的形式介绍了 Matlab 软件，说明线性代数的计算问题，可以借助计算机来解决，这种作法既避免了教材篇幅的过于冗长，又符合现代数学中重视数学建模与计算机应用的思想.

这部教材不仅适用于农林院校，也适用于其他各类院校的非数学专业.相信它的出版，会对推动高等院校线性代数课程的改革起到良好的作用.

安幼山

2001 年春于北京

前　　言

本书是教育部高教司[1996]61号文件批准立项的“高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”的04－6课题的研究成果.

按照教育部制定并实施的“高等教育面向二十一世纪教学内容和课程体系改革计划”的目标和要求,河北农业大学作为04－6课题组成员,对“线性代数”这门课程的改革进行了研究与实践.在原有教材《线性代数》的基础上,根据兄弟院校四年来的使用情况以及新世纪高等农林教育发展的需要,在征求了多方意见之后,河北农业大学联合四川农业大学、新疆农业大学、北京农学院、河北职业技术师范学院等院校对本书初稿进行了较大的调整、补充和完善,并将书名定为《线性代数及其应用》,形成了现在这本“面向21世纪课程教材”.

在编写这本教材时,我们努力在概念与理论、方法与技巧、实践与应用这三方面作出较为合理的安排.在内容的深度和广度上力求适应农科、工科、经济等不同专业使用,并考虑了非数学类硕士生入学考试的需要;在语言表述上力求严谨简明,注意突出了矩阵的概念,并增加了几何直观的解释.另外,本书增加了“应用实例选讲”一章,目的是提高学生学习兴趣,增强学生应用数学知识解决实际问题的能力.结合非数学专业学生的实际情况,我们删除了数值计算的内容,增加了附录Matlab简介,以便使学生掌握最先进、最方便的计算手段.

本书基本内容可以用30－40学时讲授,带“*”号的章节可以供不同专业选用.在习题的编排上分为A组和B组,其中A组中包含了对农林类本科学生的基本要求,B组中包括更广泛的题型供读者选用.

在本书出版的时候,我们衷心感谢教育部适时地、富有远见地推出了“高等教育面向二十一世纪教学内容和课程体系改革计划”,为农林类本科数学教学改革指明了方向,也为我们提供了参与的机会.

我们衷心感谢农业部教学指导委员会数学组成员安幼山教授,他在百忙中为本书审稿,提出了很多前瞻性的指导意见和许多具体的修改建议,为本书增色不少.我们还要感谢农业部教学指导委员会和04－6课题组给以的支持和鼓励,感谢河北农业大学教务处、理学院、数学教研室给以的支持和帮助.

高等教育出版社负责农林类面向21世纪教材的同志们,对本书的出版给以了极大的支持,对他们的工作,我们表示由衷的敬意.

由于编者水平所限，本书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正.

编者

2000年12月

目　　录

第一章　矩阵及其运算

矩阵是线性代数这门课程贯穿始终的主要研究工具,其本身也是线性代数的主要研究对象之一.矩阵可以把一组相互独立的数用一张数表的形式联系起来,看成一个整体,并用它来参与运算,可以对原来杂乱无章的、甚至是非常庞大的数据做出简单的有序表示.矩阵在工业、农业、经济等许多领域有着广泛的应用,尤其是计算机普及后,矩阵更是被运用到物理学、力学、化学、生物学、遗传学、医学等众多学科中.

矩阵(matrix)这个词是 1850 年英国数学家剑桥大学教授 Sylvester 首先提出来的.

本章主要介绍矩阵的概念及其运算.

§1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵概念

例 1.1　有三种食品原料 A、B、C,均由蛋白质(P)、脂肪(F)、淀粉及水分(S_W)组成.各种成分含量比例如表 1－1:

表 1－1

	P	F	S_W
A	0.4	0.1	0.5
B	0.25	0	0.75
C	0.45	0.2	0.35

如果我们只关心由表 1－1 抽象出来的如下形式的一个矩形数表:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.45 & 0.2 & 0.35 \end{pmatrix}$$

就引入了矩阵的概念.

定义 1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m \times n$ 矩阵．组成矩阵的每一个数称为矩阵的**元**，横的各排称为**行**，纵的各排称为**列**．a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元．元是实数的矩阵称为**实矩阵**，元是复数的矩阵称为**复矩阵**．在本书中除了特别说明外，矩阵都是实矩阵．

通常用黑斜体大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等表示矩阵．(1.1)可以用 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 表示．

当 $m=n$ 时，矩阵称为 n 阶**方阵**，记为 $\boldsymbol{A}_n$．一阶方阵就是一个数．

当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为**行矩阵**；当 $n=1$ 时，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**．行矩阵或列矩阵又称为**行向量**或**列向量**，统称为**向量**(vector)．向量中所含元的个数称为向量的**维数**(dimension)．例如上述 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 维行向量，$\boldsymbol{B}$ 是一个 m 维列向量．向量也可以用黑斜体小写字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}$ 等．关于向量的详细研究将在第三章中进行．

元全为零的矩阵称为**零矩阵**，用记号 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$ 表示．

在方阵中，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线位置上的元称为**对角元**．主对角线一侧所有元都为零的方阵称为**三角形矩阵**．三角形矩阵有两种，称

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为**上三角形矩阵**；称

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为**下三角形矩阵**.

主对角线以外的元全为零的方阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为**对角形矩阵**(diagonal matrix),简称对角阵,也可以记为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

主对角线上元都为 1 的对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

称为**单位矩阵**(identity matrix),简称**单位阵**,并约定用记号 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$ 表示.

对角线上元为相等实数的对角阵

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

称为**数量矩阵**(scalar matrix).

1.1.2 矩阵与线性变换

在线性代数中,常考虑 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 与 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之间的关系:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$表示实数或复数,上式可以简写为

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1,2,\cdots,m)$$

如上形式的从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的变换叫做**线性变换**或**线性映射**,其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为线性变换所对应的系数矩阵. 显然,线性变换也可以看成是一种由某个矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{m \times n}$定义的由 n 维向量到 m 维向量的映射.

有一个线性变换,就可以写出相应的系数矩阵;反之,给出系数矩阵就惟一地确定一个线性变换. 因此,线性变换与系数矩阵有一一对应的关系. 显然,与恒等变换 $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \cdots, y_n = x_n$ 对应的是单位矩阵 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n$.

例 1.2　将 xOy 平面上的向量$\overrightarrow{OP}$按逆时针方向旋转 φ 角得向量$\overrightarrow{OQ}$(图 1－1),设$\overrightarrow{OP}$的坐标为(x,y),$\overrightarrow{OQ}$的坐标为(u,v),试用 x,y 表示 u,v.

解　由设$\overrightarrow{OP}$的幅角为θ,则$\overrightarrow{OQ}$的幅角为$\theta+\varphi$,记$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = r$,则

$$u = r\cos(\theta+\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi$$
$$v = r\sin(\theta+\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi$$

因为　$r\cos\theta = x, r\sin\theta = y$,所以

$$\begin{cases} u = (\cos\varphi)x + (-\sin\varphi)y \\ v = (\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y \end{cases}$$

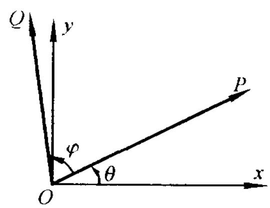

图　1－1

这是一个由$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$到$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$的线性变换,所对应的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

1.1.3　实例

在实际问题中,有很多运用矩阵的例子,这里只能举几种简单的例子.

例 1.3　某航空公司在 A、B、C、D、E 五个城市间开辟了若干航线,五个城市间的航班图如图 1－2 所示.

	A	B	C	D	E
A		✓	✓		
B	✓		✓		
C	✓			✓	
D		✓			
E			✓		

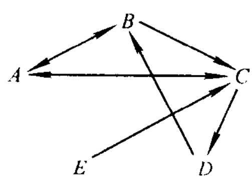

图　1－2

用矩阵表示五个城市间的航班情况：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 1.4　某经济系统有三个企业：煤矿、电厂和铁路.在一年内，企业间的直接消耗系数如表 1－2 所示：

表 1－2

	煤矿	电厂	铁路局
煤矿	0	0.65	0.55
电厂	0.25	0.05	0.10
铁路局	0.25	0.05	0

用矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$

例 1.5　某厂有种新产品，市场推销策略有 S_1、S_2、S_3 三种，市场需求情况有大、中、小三种，分别用 N_1、N_2、N_3 来表示.其效益值如表 1－3 所示：

表 1－3

市场情况 / 销售策略	N_1	N_2	N_3
S_1	50	10	－5
S_2	30	25	0
S_3	10	10	10

用矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} 50 & 10 & -5 \\ 30 & 25 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

§1.2　矩阵的运算

矩阵之所以有用，主要在于可以对它实施一些有实际背景的运算.在研究这

些运算之前,我们先给出两个矩阵相等的定义.

定义 1.2 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,如果

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,并记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.1 矩阵的加法

定义 1.3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,定义为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意:只有在两个矩阵行数和列数都相同时,才能做加法.

例 1.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 8 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

容易验证矩阵加法满足下列运算规律:

(1) **交换律** $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(2) **结合律** $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵.

1.2.2 数与矩阵的乘法

定义 1.4 设 k 为任意数,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵,那么数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法定义为

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

记为 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$,即 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})$.

例 1.7 $3\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 3 & -12 \\ 15 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

容易验证数与矩阵的乘法满足下列运算律: