序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲。前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋彤、李煥桑、南登岐、孫賡年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤慨允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心*譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

湯元吉序於臺北

---

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄺堃厚、湯元吉等九人。

編輯要旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別邀請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事敎授各該有關課業之敎師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種敎學措施，學生於作成論文後，校方尙需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯舘輯譯，敎育部審

定公布之名詞　但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，倘冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第五册目錄

上册　　數　　　**用乘冪計算**　　　頁數

下册　　體　　　**有規則的形狀**

上 册　　數

『各位硏習第四册之時，諒必對於乘冪的精粹完全弄明白了。但本册的內容對於以後各册更爲重要，故奉勸各位對本册內容必須反復硏讀，尤其遇到下面各節中稍有懷疑的時候。』

用乘冪計算

冪的加減法

不成問題，各位可以把幾個蘋果相加，或彼此相減：5 蘋果 413
+3 蘋果=(5+3) 蘋果=8 蘋果；5 蘋果−3 蘋果=(5−3) 蘋果=2 蘋果；合併言之：5 蘋果±3 蘋果=(5±3) 蘋果。

同樣，各位也可以把相同的平方數相加或相減，例如若干正方形有相同的邊長 a，則：

$$5\,a^2 \pm 3\,a^2 = (5\pm3)a^2$$

又如相同的立方塊互相加減：

$$5\,a^3 \pm 3\,a^3 = (5\pm3)\,a^3$$

以及有相同乘冪的 q^p 的加減：

$$m\cdot q^p \pm n\cdot q^p = (m\pm n)\,q^p$$

這些都沒有分別，祗要依照以前在〔2；132〕所學的加上括弧卽得。

回想在小學的時候，老師諒曾一再告訴過各位，必須將數字的位數對準才能加減；例如： 352+27.8，各位一定知道把兩個加數上下排列寫出來計算：

$$\begin{array}{r} +352 \\ +\ 27.8 \\ \hline \end{array}$$

就是單位對單位，十位對十位。到了今天，如果應用乘冪的寫法，各位當可發揮所學列出下面的式子：

$$\begin{array}{l} 3\times10^2+5\times10^1+2\times10^0 \\ \qquad\quad +2\times10^1+7\times10^0+8\times10^{(-1)} \\ \hline 3\times10^2+7\times10^1+9\times10^0+8\times10^{(-1)}=379.8 \end{array}$$

習　題：

試列出 1053+6704 的算式！

定則：紙上計算時，必須將各數照位數順序上下排列寫出，無論對於加法或減法，都是一樣。

十位乘冪的減法

414 現在對這種減法的方式簡單說明如下：

$$\begin{array}{r} 1826 \\ -1542 \\ \hline 284 \end{array}$$

各位在學校裏也許曾經學過所謂**假借法**(或稱借入法)，這是與減法有密切關係的。但是更爲簡便的，要算**向上計數的方法**，或者所謂**奧國式的減法**，簡稱**奧大利法**或**意大利法**，卽減法之速算方法。

由下面所舉的例子，各位對這種方法必能完全了解。在事實上雖不多用，但這種減法的方式却是很清楚的。例如：

$$\begin{array}{cccc} \text{千} & \text{百} & \text{十} & \text{單} \\ 1 & 8 & 9 & 6 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

我們的出納員〔參看 4；331〕有一天檢查他的出納簿，應有 1896 個貨幣單位在他的銀櫃裏；但是他發現只有 1542 個單位；試問他必須補充多少進去，才有其所要的數目 1896 呢？

我們帮助他作此補充：$2\,(E)+\underline{4}\,(E)=6\,(E)$。此式中數字下面有一橫線者，就是强調要向上數的差額；我們一面讀，一面把“4”寫出，因爲二加四等於六，數到六就不會再向上數了。我們繼續往上數：$4\,(Z)+\underline{5}\,(Z)=9\,(Z)$； $5\,(H)+\underline{3}\,(H)=8\,(H)$； $1(T)+\underline{0}\,(T)=1\,(T)$；這個“零”實無寫出來的必要。

$$\begin{array}{r} 2157 \\ -1358 \\ \hline \end{array}$$

在下面一個例子中，我們必須由單位 8 數起，直到 17 才停止；這樣就得到 9 亦卽：$8\,(E)+9\,(E)=17\,(E)$；我們拿 9 當作差數寫在 E 位下面；由此差數與“8”加起來就是 17，然後以 $7E$ 放在 E 位；其餘 $10E$ 則加入 10 位數之“5”，因此由 $6Z$ 向上數，到了有一個“5”爲止：$6\,(Z)+\underline{9}\,(Z)=15\,(Z)$；由此 $15\,Z$，可將 $5\,Z$ 放在 Z 位；其餘 $10\,Z$ 加入 H 位，卽加入現有的 $3H$ 上面去，然後再向上數：$4\,(H)+\underline{7}\,(H)=11\,(H)$：最後：$2(T)+\underline{0}(T)=2(T)$。

很快就可把其位數弄清楚，因爲算一位減少一位，例如我們算這個減式，便可說出如下的排列：

120038　$2+\underline{6}=8$；　$4+\underline{9}=13$；　$10+\underline{0}=10$；　$1+\underline{9}=10$；
$-\ 30942$　$4+\underline{8}=12$；　把劃了橫線的數字寫出來，就是得數。

如果各位對這種方法還未認識的話，必須首先相信，此法比借入法方便與確實；經過幾次練習之後，各位就會自己感覺得到。尤其由一個數目要減去幾個數目時，更爲便利。例如：

8024　我們把每一位要減去的數目加起來，首先記在心裡，然
-2807　後計算：
-3583　$10\,(E)+\underline{4}\,(E)=14\,(E)$；　$9\,(Z)+\underline{3}\,(Z)=12\,(Z)$
$14\,(H)+\underline{6}\,(H)=20\,(H)$；　$7\,(T)+\underline{1}\,(T)=8\,(T)$

由此各位當可自行證實，這種向上數，即把差數與被減數相加的方法，無異於檢查減法的準確性。

這種方法顯示在許多地方也可適用，如計算角度的相減，它 415
的單位是以度（°），分（′）和秒（″）表示的。例如：

$17°48'28''$　我們向上計算：$15''+\underline{13''}=28''$；　$23'+\underline{25'}=48'$；
$-\ 6°23'15''$　$6°+\underline{11°}=17°$
$11°25'13''$

$90°$　我們由 $40''$ 向上計算，但是只數到 $60''$ 爲止，因
$-75°26'40''$　爲 $1'=60''$，那末就是 $40''+\underline{20''}=60''=1'$；$27'+$
$14°33'20''$　$\underline{33'}=60'=1°$；$76°+14°=90°$

如下面的計算題，倒以**"借入法"**較爲方便，玆將此計算題詳列於下：

$$\left.\begin{array}{r}90°12'30''\\-14°25'40''\end{array}\right\}=\begin{array}{llll}89°+&(1°+11')+&(1'+30'')\\-14°&-25'&-40''\end{array}\left\{\begin{array}{r}89°71'90''\\\underline{-14°25'40''}\\75°46'50''\end{array}\right.$$

各位自己可以定出幾個習題來做，但不要忘記以加法去驗算！

若以新度來計算，則可省去這種麻煩（參閱〔1；92〕）。

我們是否亦可令**指數相同而底數不相同的乘冪**，彼此相加或 416
相減呢？

如果我們能將此乘冪算出來的話，這當然是可以的，好比：

$3^2+2^2=9+4=13$； $4^3-2^3=64-8=56$

如果這乘冪事前不能算出，而要定出其不同底數而指數相同之和或差，那就沒有這種計算方法。

417 如果事先可以算出乘冪的眞値，那末只要是同底的乘冪，雖其指數不同，亦可使之相加或相減。（這一類的例題，各位可以自己定出來）。但如無法算出乘冪之値，例如 a^3+a^2，則其加法或減法也是行不通的。各位可從剛才所學的例子中領悟到：a^3 在幾何學是一個立方體，而 a^2 是一個正方形；這樣兩個全不相同的東西，就如蘋果與梨子一樣，縱使知其個數，也無法令其加減的。

我們自然可稱立方體爲一物，正方形亦爲一物，而把它們加起來：即1物＋1物＝2物；同理，“3個蘋果＋4個梨”也可當作“3個水果＋4個水果”來計算。只要名稱一致，彼此便可加減。但這對於我們所說過的：“名稱不同之數値不能相加”一語，正是一種證明。

但是，各位一定會提出來質問：採用這個加法等式 $4000+500=4500$ 却與乘方 4×10^3 和 5×10^2 的總數（4500）完全一致，究竟是何道理？我們反問：這是一種眞正的加法嗎？實則 $4000+500$ 是一個有所指的和數，亦即一種加法命題。然而 4500 並不是加法命題的執行，也不是由計算而得的總數。各位可以十分了解，如果用文字來說明這個等式的話“四千加五百等於四千五百”。一看馬上就知道總數是多少。如用“$4\times10^3+5\times10^2$”的計算命題，那就不能辦到。

在底數和指數不相同的時候，其乘方不能相加或相減。關於這類情形，各位可自己舉例，弄個明白。

由此，大家要記住：**乘冪的加減**，除非有明顯的例外，其他一概不能辦到。

418 同底的冪乘法

當各位遇着 $q^2\cdot q^3$ 這一類計算題，（這是屬於同底的冪乘法）而不知如何求得答案時，不宜採用已經背熟的公式，必須按照乘冪的說明，弄清楚什麼叫做 q^2 及 q^3，然後才可進行演算：

$q^2 \cdot q^3 = (q \cdot q \cdot 1) \cdot (q \cdot q \cdot q \cdot 1)$；依照第二册〔106 及 118〕所述，可把括弧及 1 省去：

$= q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^5$；指數 "5" 是指數 "2" 及 "3" 之和；故得：

$q^2 \cdot q^3 = q^{2+3} = q^5$。一般情形：

$$q^m q^n = (\underbrace{q \cdot q \cdots\cdots q}_{m\text{ 個因數}} \cdot 1) \cdot (\underbrace{q \cdot q \cdots\cdots q}_{n\text{ 個因數}} \cdot 1) = \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdots\cdots q}_{(m+n)\text{個因數}} \cdot 1 = q^{m+n}$$

以文字說明：**底數相同的冪相乘時，可將其指數相加，然後自乘**。（不要死記）！

m 與 n 爲正數時，已如上述。若指數爲負數時，試問：同底的冪乘法，是否也適用上面的定理呢？ 419

例如：$q^3 \cdot q^{(-2)} = (q \cdot q \cdot q \cdot 1) \cdot \dfrac{1}{q \cdot q} = q = q^1$

依照〔418〕節所述之定理，將乘冪指數相加，亦可獲得同樣結果：

$$q^3 \cdot q^{(-2)} = q^{3+(-2)} = q^1$$

同理：

$$q^{(-2)} \cdot q^{(-3)} = \frac{1}{q \cdot q} \cdot \frac{1}{q \cdot q \cdot q} = \frac{1}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q} = \frac{1}{q^5} = q^{(-5)} = q^{(-2)+(-3)}$$

習　題： 420

試用相似方法解答下列問題：1) $q^{(-2)} \cdot q^{(+3)}$； 2) $q^{(-3)} \cdot q^{(-2)}$。

再舉一個特別例子： 421

$$q^{(+2)} \cdot q^{(-2)} = q \cdot q \cdot \frac{1}{q \cdot q} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q} = 1$$

各位對上式的結果如果寫成 "零"，那便大錯而特錯，"因爲分子各項數值與分母各項數值兩相抵消以後，結果是 1，而不是零"。根據〔418〕節所講之定理，我們可得 $q^{(+2)} \cdot q^{(-2)} = q^{(+2)+(-2)} = q^0 = 1$。假如令 q^0 等於零，亦犯了同樣的嚴重錯誤。

在第六册裏面，我們將再硏討負指數定理的證明。到了那時，各位必將滿意於我們所講的各種情形，同時也會相信這條定理適用於所有場合。

422 習　題：請各位溫習從前的第一册 27 節，第四册 345 及 351 節！

1 a) $2^{(+3)}\cdot 2^{(-2)}$

b) $3^{(-4)}\cdot 3^{(+2)}$

c) $5^{(-5)}\cdot 5^{(+7)}$

d) $3^{(+6)}\cdot 3^{(-8)}$

3 a) $(-5)^2\cdot(-5)^1$

b) $(-5^1)\cdot(-5)^{(-3)}$

c) $(-5)^{(-3)}\cdot(-5)^{(+5)}$

d) $(-5)^0\cdot(-5)^{(+4)}$

5 a) $a^{(+4)}\cdot a^{(-3)}$

b) $a^{(-10)}\cdot a^{(+10)}$

c) $a^b\cdot a^c$

d) $a^0\cdot a^m$

7 a) $a^m\cdot a^m$

b) $b^{3n}\cdot b^n$

c) $c^{3x}\cdot c^{4y}$

d) $m^a\cdot m^{2a}$

9 a) $a^{m-1}\cdot a^2$

b) $m^{4-a}\cdot m^a$

c) $a^{x-4}\cdot a^{x-3}$

d) $a^{m-n}\cdot a^{m+n}$

11 a) $3a^2\cdot 4a^5$〔2；121〕

b) $20m^n\cdot 3m^b$

c) $ab^x\cdot a^x\cdot b^5$

13 a) $3x^4\cdot x^3+4x^2\cdot x^5$〔413〕

b) $10a^2\cdot a^3-5a^4\cdot a$

c) $10a\cdot a^3\cdot a^4-4a^8$

2 a) $(\frac{1}{5})^{(-3)}\cdot(\frac{1}{5})^{(+2)}$

b) $(\frac{1}{3})^{(-2)}\cdot(\frac{1}{3})^{(-2)}$

c) $(\frac{1}{5})^{(+7)}\cdot(\frac{1}{5})^{(-7)}$

d) $(\frac{1}{3})^{(-3)}\cdot(\frac{1}{3})^{(+4)}$

4 a) $(+\frac{1}{5})^{(-3)}\cdot(+\frac{1}{5})^0$

b) $(-\frac{1}{5})^{(+2)}\cdot(-\frac{1}{5})^{(-3)}$

c) $(-\frac{1}{5})^{(-4)}\cdot(-\frac{1}{5})^{(+2)}$

d) $(-\frac{1}{5})^{(-2)}\cdot(-\frac{1}{5})^{(+6)}$

6 a) $a^m\cdot a^4$

b) $x^a\cdot x^{(-b)}$

c) $x^{(-m)}\cdot x^{(+n)}$

d) $x^{(-a)}\cdot x^{(-b)}$

8 a) $a^4\cdot a^5\cdot a^6$

b) $b^{(+2)}\cdot b^{(-3)}\cdot b^{(+4)}$

c) $x^0\cdot x^{(-5)}\cdot x^{(+5)}$

d) $y^a\cdot y^{2a}\cdot y^{3b}$

10 a) $(a+b)^m\cdot(a+b)^n$

b) $(a-b)^{x-y}\cdot(a-b)^{y-x}$

c) $(x+y)^{a+b}\cdot(x+y)^{a-b}$

12 a) $\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{6}{7}a^{10}$

b) $\frac{5}{7}x^5\cdot\frac{7}{3}x\cdot 8y$

c) $\frac{3}{4}a^{n-1}\cdot\frac{5}{6}a^{n+1}$

14 a) $(x^2-1)^{p-q}\cdot(x^2-1)^{(+q)}$

b) $x^a\cdot x^{(-b)}\cdot x^b$

c) $(x-y)^{(-a)}\cdot(x-y)^{a+b}$

第15至19題的解答可以從緩。

上面〔418〕節所述的定理也適用於分數指數的計算（證明見第六册）；例如：

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{7}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{5}{7}} = a^{\frac{14+15}{21}} = a^{\frac{29}{21}} = \sqrt[21]{a^{29}}$$

用開方符號的計算題，已在〔4;380〕學過，可使之變化如下式：

$$\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$$

	a)	b)	c)
15.	$a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^6}$	$\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

因 $(b-a)^2 = (a-b)^2$（請各位用自乘的方法算出來看對不對！）故可列成下式：

$$(a-b)^3 \cdot (b-a)^2 = (a-b)^3 \cdot (a-b)^2 = (a-b)^5$$

試問 $(a-b)^3$ 是否也等於 $(b-a)^3$ 呢？請按求立方之法算出來看一看！

16.	$(x-y)^4 \cdot (y-x)^3$	$(x-y)^2 \cdot (y-x)^4$	$(x-1)^3 \cdot (1-x)^2$

下列各題是複習第二册〔141, 142, 147, 152〕各節所講：

17.	$(x^5+x^3) \cdot (x+x^4)$	$(a^3+a^4) \cdot (a^4-a^3)$	$(m^{2n}-m^n) \cdot (m^{2n}+m^n)$
18.	$(a^3+b^2)^2$	$(a^3-b^4)^2$	$(a^5-1)^2$
19.	$(a^x-b^y)^2$	$(b^x-a^y)^2$	$(m-n^x)^2-n^{2x}$

逆　算　第423至426節，可以讓它過去，容後再行研讀，因初學者可能感到困難。

等式 $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ 的兩邊，可以互易其位： 423

$$q^{m+n} = q^m \cdot q^n$$

這個符號 q^{m+n}，在熟練數學者看來，一看便知等於一個乘積，可將其分解成爲兩個因數。其他例如：

$$x^{a+1} = x^a \cdot x^1 = x^a \cdot x; \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \text{ 等等}$$

因此，可由許多有 q^{m+n} 形式的乘冪中，尋求共同因數：

$$a^{12} + a^7 = a^{7+5} + a^{7+0} = a^7 \cdot a^5 + a^7 \cdot a^0 = a^7(a^5 + a^0) = a^7(a^5+1)$$

下面問題也屬於此類：$\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{a^3} = ?$

從〔3；232〕可以知道： 424

異分數相加，可將各分數先行通分，即求出共同的分母，然後相加，例如：$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$。$\dfrac{1}{a^4}$ 與 $\dfrac{1}{a^3}$ 的最小公分母非 a^{12}

，亦非 a^7，却是 a^4（請各位加以證明）；故得：

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^4}+\frac{a}{a^3\cdot a}=\frac{1+a}{a^4}$$

425 根據上述之定理亦可簡化許多**開方計算**。例如：

$$\sqrt[6]{q^{17}}=q^{\frac{17}{6}}=q^{2\frac{5}{6}}=q^{2+\frac{5}{6}}=q^2\cdot q^{\frac{5}{6}}=q^2\cdot\sqrt[6]{q^5}$$

426 **習　題**：

	a)	b)	c)	a)
1)	x^{1+a}；	y^{a+3b}；	$(a+x)^{n+m}$；	$(x-a)^{y+z}$

（各個冪皆應分解成爲兩個因數）

2)	$x^{10}-x^3$；	$q^5+q^6-q^8$；	$(a+x)^{10}-(a+x)^9$	$(x-a)^{10}+(x-a)$

（將共同因數列在括弧前面）

3)	$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}$；	$\frac{1}{x^a}-\frac{1}{x^b}$；	$\frac{4}{a^4}+\frac{3}{a^6}$；	$\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}$

（將各分數通分）

4)	$\sqrt[7]{x^8}$	$\sqrt[3]{10^5}$	$\sqrt[8]{a^9}$	$\sqrt{a^9}$

（儘可能使之開方）

5) **複習題**：

$(2+4)^3-(2^3+4^3)$ | $(a+b)^2-(a^2+b\ )$ | $(a^2-b^2)-(a-b)^2$

427

以 2 爲底的乘冪

我們從前已經講過以 2 爲底的冪乘法，本節所述，並無任何新鮮之處；只想提供一種新的計算方式和練習之途徑。

冪的級數……$2^{(-4)}=(+\frac{1}{16})$； $2^{(-3)}=(+\frac{1}{8})$； $2^{(-2)}=(+\frac{1}{4})$； $2^{(-1)}=(+\frac{1}{2})$； $2^0=(+1)$；$2^{(+1)}=(+2)$ 等等，可以列成一表。（如各位對本表尚不十分明瞭，必須從頭溫習有**關冪的定義**。）此表稱爲**指數表**，雖然除去指數以外，倘包含冪在左欄之內。

我們計算這類題目，雖不太難，用不着查表也可以計算出來；但我們要養成查表的習慣，希望將來容易解決比較困難的問

乘　冪	指　數
⋮	⋮
$(+\frac{1}{16})$	(-4)
$(+\frac{1}{8})$	(-3)
$(+\frac{1}{4})$	(-2)
$(+\frac{1}{2})$	(-1)
$(+1)$	0
$(+2)$	$(+1)$
$(+4)$	$(+2)$
$(+8)$	$(+3)$
$(+16)$	$(+4)$
⋮	⋮

題。

舉例說明！譬如"2×8"，各位一定會說，這個問題不屬於本節的範圍；因爲"2×8"那裡是同底的乘冪呢？但如把"2×8"寫作"$2^1\times2^3$"，各位就會了然而不反對了。指數"1"與"3"並不要由我們腦中去想，只要查表就可看出底數"2"的乘冪及其所屬的指數。現在各位當能明白我們爲什末要將算式如下寫法：

$$\begin{array}{l} 2\times8= \\ \hline 2\text{的指數}=(+1) \\ 8\text{的指數}=\underline{(+3)} \\ \qquad\qquad\quad(+4) \\ \quad 2\times8=\underline{\underline{16}} \end{array}$$

先將算式列出，在其後面寫一等號，以便提醒我們，跟着來的就是答數。在其下面畫一長橫線，以便使算式與插入計算分開，然後把乘冪"2"與"8"之指數寫成等式。在指數表內查出：冪 2 的指數＝(+1)，冪 8 的指數＝(+3)。根據〔418〕節所講的定理，即冪與冪相乘可將其指數相加，一看即知爲"4"。在**指數表**指數欄內，如果指數爲"4"，則在左面對稱之冪應爲(+16)，此即爲所求之答數。

再舉數例於後：各位必須注意，下面劃有二橫線的答數，應於計算完畢時附加之。

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\underline{\underline{\frac{1}{16}}} \\ \hline \frac{1}{2}\text{的指數}=(-1) \\ \frac{1}{8}\text{的指數}=\underline{(-3)} \\ \qquad\qquad\quad(-4) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 16\times\frac{1}{8}=\underline{\underline{(+2)}} \\ \hline 16\text{的指數}=(+4) \\ \frac{1}{8}\text{的指數}=\underline{(-3)} \\ \qquad\qquad\quad(+1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{2}\times4=\underline{\underline{(+2)}} \\ \hline \frac{1}{2}\text{的指數}=(-1) \\ 4\text{的指數}=\underline{(+2)} \\ \qquad\qquad\quad(+1) \end{array}$$

請各位把**指數表**的上下兩端延長，即在指數欄內上面由(−4)加到(−10)，下面由(+4)加到(+10)；在乘冪欄內上面由$(+\frac{1}{16})$加到$(+\frac{1}{1024})$，下面由(+16)加到(+1024)，然後依照上面的例子解答下列各題：

習　題： 428

	$a)$	$b)$	$c)$
1)	64×16	$\frac{1}{64}\times16$	$\frac{1}{64}\times\frac{1}{16}$
2)	$64\times\frac{1}{16}$	$\frac{1}{256}\times256$	$\frac{1}{128}\times\frac{1}{2}$
3)	$\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}$	$512\times\frac{1}{32}$	$1024\times\frac{1}{4}$
4)	$\frac{1}{8}\times512$	$\frac{1}{1024}\times32$	$\frac{1}{1024}\times1024$

429 以 2 爲底的冪乘法，尙可使之簡單化。

好比 8×16，我們先用前面的算法：

$8\times16=$

8的指數$=(+3)$

16的指數$=(+4)$

$(+7)$

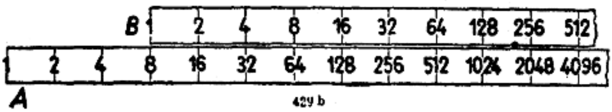
現在我們不要自己來做中間的計算，却利用一個 X 先生來作可靠的帮手。但 X 先生應該通曉那一種算法，才能有助於我們的計算呢？很簡單，只要他懂得加法就行。例如本例之 $3+4=7$；此外，還要認識我們的指數表，因爲我們只告訴他乘冪 8 與16，而他必須在表上尋出所屬的指數。

我們的帮手對於 “$3+4$” ，可能照他在學校裡所學過的方法來做。但他因爲受了我們速算法的傳染，就是最起碼的心算工作也想取巧不做；他想出一種巧妙方法，使 “$3+4$” 會自動的排成 “7” ，不用列式計算，或引用以往的算法（參閱〔1；18〕）。他製造兩根一致的量尺 A 和 B，把 B 尺的“零”移到 A 尺的“3”上面，從 B 尺的“零”數到“4”爲止，然後在“4”下面讀出 A 尺上的“7”，就是所求之和。簡言之：他使“3”與“4”相加，就是利用相當線段的加法（簡稱爲線段相加）。

我們的帮手還想使之更加便利！原來要在指數表上去查指數 “3” 與 “4” 的，現在用不着查表了，只在兩根量尺上面也說明乘冪，就是那些粗大的數字，以便一目了然，如〔429a〕圖所示。我們的得力助手一聽到算式第一個數 “8” 的時候，他就在 A 尺尋找大 “8” 字，然後將 B尺的開端正好移到大 “8” 字上面；同時在 B尺上尋出大寫的 “16” （即本算式的第二個數），就在 “16” 下面的 A 尺上找到所求的積數 “128” 。

429 a

至此，那聰明的 X 先生忽然覺得上面的方法，是完全用不着指數的；那末在量尺上也就用不着刻出來了，假如刻上，反而容易弄錯；只要去掉小寫的指數，保留所屬的乘冪便可；參看〔429 b〕圖。



429 b

現在各位可見這種方法是如何的簡單，可以請走那假設的帮手，一切自己來動手了。

依照上面所說的方法，我們做成一種簡單的

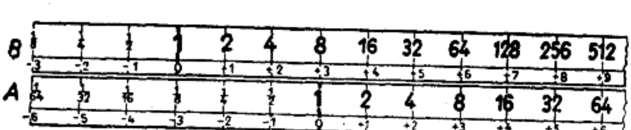
指數計算尺

我們暫時稱它爲**指數計算尺**者，因爲事實上是用它來使指數相加。這些指數雖然沒有刻在尺上，但也沒有這個必要，因爲指數的相加是用線段相加來代替，結果實在不用知曉指數的多少，而我們所要知道的只是與指數有關的乘冪而已。

習 題： 430

各位可在〔429 b〕圖所示的計算尺位置上，讀出其他乘法問題的答案；試問：究竟是那些乘法問題？

爲了要使用指數計算尺解答 “$\frac{1}{8}\times 4$” 或 “$\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}$” 等問題，我們必須向左延長兩條尺的分劃，如〔431 a〕圖所示： 431



431 a

雖然我們在前面已經看見，在量尺上可以省去指數，但在〔431a〕圖中仍將指數列出者，目的是在使各位知道用計算尺是将指數相加，並非乘冪，如果各位眞的需要製造計算尺時，那是可以略去指數的。

解答“$\frac{1}{8}\times 4$”的問題，可以把 B 尺上的乘冪“1”（指數為 0）的分劃移置於 A 尺的乘冪“$\frac{1}{8}$”（指數為 -3）分劃上面，由 B 尺的 0 位算到乘冪“4”，其小寫指數是（$+2$），而在（$+2$）的下面正是 A 尺的乘冪“$\frac{1}{2}$”〔所屬指數是（-1）〕。

此外各位還要注意下面的要點：在 A, B 一對量尺上，分劃的開始總是乘冪“1”。這是我們常見的定理：各個乘冪的起點都是“1”。這些起點都是指數為 0 的所在，是以一條較粗的分劃使之顯示出來。

432 **習　題：**

請讀者製成一種計算尺，如〔431 a〕圖所示，但不要註上指數，試讀出“$\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}$”的答數！並問：如果算尺不再移動，還可讀出其他那些等式？

433 **習　題：**

利用這種算尺，而將其左右兩端再延長一段，試解答下列各題：

	a)	b)	c)	d)
1)	$\frac{1}{4}\times 8$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\times 16$
2)	$\frac{1}{2}\times 64$	$2\times\frac{1}{4}$	$2\times\frac{1}{8}$	$4\times\frac{1}{4}$
3)	$4\times\frac{1}{8}$	8×1	$8\times\frac{1}{8}$	$8\times\frac{1}{16}$
4)	$16\times\frac{1}{8}$	$16\times\frac{1}{4}$	$32\times\frac{1}{32}$	$32\times\frac{1}{64}$

434　以 10 為底的乘冪

現在要詳細討論一種乘冪，在實用計算方面是最重要的，就是以“10”為底的乘冪。

各位在學校裏諒已學過以 10 為底的冪乘法，但拿上面〔418〕節所講的定理來說，是否已先走了一步（各位雖然沒有把它完

全說出來）？

例如有個1000乘100的問題，只要把1000後面附上兩個零，就是它的得數。這兩位零是與冪指數2相稱的，各位如果明白這個意義，立即可將這種自乘的問題列式爲：

$$10^3 \times 10^2 = 10^{3+2}$$

各位對於“100×2.6”諒必也算過，只要把2.6的小數點向右退去兩位（$100 \times 2.6 = 260$），因爲100的指數爲“2”；又計算“0.01×2.6”，只要把小數點向左移兩位（$0.01 \times 2.6 = 0.026$），因爲0.01的指數爲（-2）。反過來，我們可以把一數化成二因數之積，此二因數就是100或0.01例如$206 = 100 \times 2.06$；$0.026 = 0.01 \times 2.6$。我們再附加幾個**習題**，因爲各位以後練習開方時，必須懂得分解因數才行。試將下列各數分解成兩個因數之積，其中之一是 *a*) 100； *b*) 1000！

1）6028；　2）17080；　3）506700；　4）80000；

再分解下列各數，已知因數爲 *c*) 0.01； *d*) 0.001：

1）0.02；　2）0.025；　3）0.9；　4）0.009；

我們現在研究以自乘寫法的組合問題： 435

$$23 \times 301 = (20+3) \times (300+1)$$
$$= (2 \times 10^1 + 3 \times 10^0) \times (3 \times 10^2 + 1 \times 10^0) \text{〔參閱 4; 338〕}$$
$$= 2 \times 10^1 \times 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 \times 1 \times 10^0 + 3 \times 10^0 \times 3 \times 10^2 + 3 \times 10^0 \times 1 \times 10^0 \text{〔參閱 2; 141〕}$$
$$= 6 \times 10^{1+2} + 2 \times 10^{1+0} + 9 \times 10^{0+2} + 3 \times 10^{0+0} \text{〔參閱 418〕}$$
$$= 6 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$
$$= 6923$$

各位從前計算二數相乘時，決沒有像上面那樣一步一步加以分解和組合，或者如同一位進步的數學家逐項換算成以10爲底的乘冪；但實際上各位當初解算這一類習題時，無形當中早已採用過同樣的步驟，只不過方法上比較簡單而已。

過了不久，各位固然還是對于數字的位值不再加以注意，只是知道一點“算術家所用的**呆板法則**”罷了。所謂呆板法則，即