运筹学例题和习题集

李永春
李春华 译

中国发明创造者基金会
中国预测研究会

·预 测 丛 书·

运筹学例题习题集

C.F 帕 尔 玛　著
A.E 依 涅 斯
李 永 春
李 春 华　译
朱 惠 庭　译校

中国发明创造者基金会
中 国 预 测 研 究 会
一九八五年四月

目　录

1、运筹学引言

运筹学论述了为解决在工业、商业和管理中遇到问题的专门的数量化技术的应用。多年来，个别的统计学和数学方法已经在这些领域里用于指导作出决策，但是在英国和美国，受到二次世界大战的推动，他们才开始将数学家、统计学家、心理学家、物理学家和其他科学家一起组成小组，从事全面战略的研究和应用的要求问题。在敌人区域运送和保持战斗力所需的材料和人力的计算和在包围经济情况下，民用食品需要的计算是运筹学发展领域里的二个例子。在世界上很多国家中，已经获得了和平应用，这将在本书其他各章依次叙述。

运筹学研究系统，术语系统很容易地被承认，但不容易被定义。一个卡车车队有规律地从仓库运送货物给公司的顾客，组成一个系统。这个术语也可以适当地用于外科医生们和在医院中和他们一起工作的麻醉师、护士长和护士，以及他们所用的设备。在商务方面，研究一个系统的行为，通常包括研究有关的分系统：工厂的生产线是一个容易识别的系统，但是对它的作业的改变，将包括改变原材料供应、雇佣的工人，并且也许还有库存的已经完成的产品。因此，实际上，一个系统是一群人和用来达到目的的物质手段一起，在一般的工业、商业和行政管理的范围内，从事于统一的，有目的的活动；并且这样的系统似乎是受到其他的系统称为分系统的支持，或者和他们相结合。

这样描述的群和亚群，难得将它们适应于指导自然科学中实验室所进行的那样类型的试验。举例来说，伯明翰公司有一种出口的新产品，可能需要在利物浦，布列斯特和伦敦间选择一个出口港。它不能设立三个单独的码头办事处，于是按照经验选择最合适的一个。一个政府可能需要对是否将100万英镑用于二个主要城市间铁路电气化更好，还是用于改善它们之间的道路系统更好的问题作出决策。这些问题不仅是一个非常复杂的问题，尽管科学家将会理解它，但对于政府来说，要进行关键性试验的机会是极小的。这两类问题对于运筹学来说是适用的，并且通过建立模型，可以得到理解。

实物模型，也就是那些和原物物理相似的模型，是常常用在工程的、建筑的和其他的研究分支。举例来说，预定用于装油船舶的航海性质，可以通过制造一个尺寸较小的模型，在实验室中模拟暴风天气来研究。运筹学应用各种的量化模型和公式，它们是原物的数学的和统计的模型。一个公司要决定它的库存—订购政策，可以应用61页上推导出的简单的模型：

$$Q=\sqrt{\left(\frac{2DP}{SC}\right)}$$

式中，Q是库存订购最经济批量大小，D是年总需要量，P是进行一次订货的费用，S是库存维持费的度量值，C是单位产品的费用。这是一个先验的模型。一般的形式是从基本原理来建立，表达式为

$$P=\frac{80}{Q+65}$$

式中，Q是一种需要商品的单位数，P是单位商品的价格，是一个表示当需求变化时，价格如何变化的简单模型。这个模型通常是运过观察这个商品的P和Q的一对数值，建立最适合它们的关系式而得到的。这是一个经验的或者后验的模型，可是模型的一般形式，特别是P

和Q的位置，反应了简单的经济理论。在二个模型中的字母表示变量。那些由所定义的系统的外部因素决定的变量，称为外生变量；举例来说，库存模型中，总需要量D和方程式右边的其他因素，由公司的市场规模，订货人员的薪金等等决定的。Q在这个意义上是一个内生变量，因为它是从内部影响系统。举例来说，批量将影响公司的库存和运输政策。在第二个模型中，Q是外生变量而P是内生变量。

建立运筹学模型的理由是最优化，也就是对一组专门的条件进行最优值的计算。在库存模型中，Q给出了批量大小，当考虑到采购、订货和储存的综合影响，它给出了最低的单位成本的平均数值。一个最优值可能是一个最大值，举例来说，在计划一个交货系统所负担的一系列城市间运输路线时，选择运输能力利用最大的计划。

迄今所引用的二个模型是比较简单的。所包含的因素之间仅有的相互关系是由模型所描述的，从这个意义上来说，模型是静态的，由因素引起的结果，不会自己影响因素的值。但是不是常常是这样的。我们考虑第二个模型。在长时期内，价格的变化将引起为了销售而生产的数量，因而就需要更为复杂的模型妥善地处理这种情况。能考虑系统内部自己作业所引起变化的模型，称为动态模型。当模型中，一个因素影响其他因素时需要时间修正，这些变量称为滞后的变量。

当运筹学方法应用在大的组织中，主要的问题是协调模型所描述各部分将要提出的策略。在一个大的制造工厂里，一个模型可能表示产出的规模，它将使平均生产成本最小；但是一个市场的模型，为了得到最大的收益，可能提出不同的数字。这样的二个水平中的任何一个可能都和最适合公司的资本结构和财政资源的水平不相符合。有时要构造企图包括所有变量的全面的模型。当然它们是由计算机来运算的，它们组成了管理的重要手段。运筹学是建立在科学基础上。客观地研究事实，作出假设，如果需要时，试验和重新假设。所构造的模型和自然科学中的理论一样，有同样的逻辑性。今天它们是管理的不可缺少的工具。但是，一个大企业的顺利运营，无论是公共的好处或者私人的利益，取决于有知识人员的判断，所以管理成为一种艺术而不仅仅是一门科学。

2、排队和等候时间问题

运筹学方法的一个早期应用是对于排队问题的应用。一个现代超级市场，由于顾客等候支付篮中货物的货款所形成的排队问题，代表了其他商业和工业情况下存在的数量化问题。由单服务通道通往每个现金柜，每个顾客是一个单元，和服务通道和钱柜或称服务点，用一个通熟的术语来说，组成一个系统。基本的问题是找到顾客对服务的要求和某一地方的单位提供的服务之间的恰当平衡，极端过度的等候和服务点的不经济状态之间的恰当平衡。第一个例子表示了仍至顾客到达率和服务时间是固定的——在实际上很难遇到的简单情况——系统对达率和服务时间的改变是非常敏感的。

例2.1 某大组织的库房以每小时给10个订货者（工人）的固定速率发货。库房从上午9时开门，一开门后，工人以每小时8人的速率相继到达，假定是单服务通道：

（i）发货员第一小时以什么样的时间比例在发货？

（ii）当（a）工人到达率或（b）服务率发生怎样的变化，使发货员处于完全繁忙的工作状态，但没有排队现象发生？

（iii）当原来的服务率不变，新的到达率为每小时12人时，研究排队情况。

（i）发货率每小时10个，就是说对每个工人 6 分钟内可服务完毕。但如果工人每小时到达 8 个人，则他们到达的间隔时间为60分/8 = $7\frac{1}{2}$ 分，对每个工人发货完后，将有时间间隙 $7\frac{1}{2}$分 − 6 分 = $1\frac{1}{2}$ 分。不会发生排队，发货员的时间占用率为

$$\frac{8\times 6\text{分}}{60\text{分}}\times\frac{100}{1}=80\%\text{的时间}$$

（ii）或者（a）发货员放慢发货率到每小时8个人（到达率），或者（b）工人到达率增加到每小时10个人（服务率）。

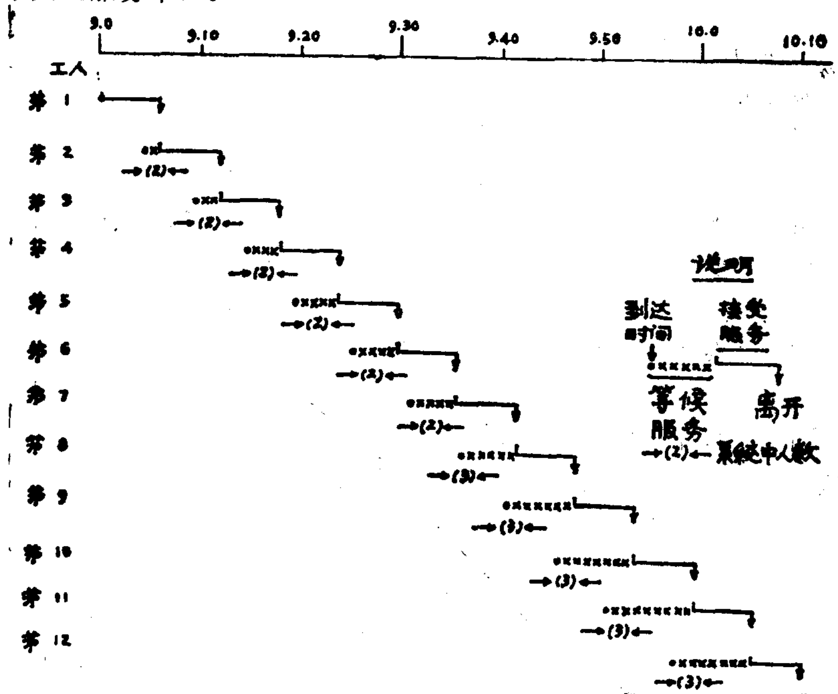

图2.1 工人在库房前排队

（iii）图2.1表明一个队伍如何将逐渐排起来。第二个工人在上午9.05到达，当仓库保管员在9.06有空开始为他服务前，工人需要排队等候一分钟。在上午9：20以后，至少有二个工人在系统里。在上午9：35，三个人将在系统里停留短时间，并在上午9：45以后，直到工人停止到达前，系统里将永过不会少于三个人。阻塞的情况将逐渐严重，并且相继到达的工人将要等候愈长的时间。举例来说，第十二个工人将在系统中化去16分钟〔注〕。对单服务点，"在系统里"的人数 = 正在服务的一个加上等候人数，因此从上午9:45开始，排队等候的将包括二个工人。

在这样简化的条件下，是否发生排队取决于服务强度，以ρ（希腊字母）表示其数量。可以通过单位时间 t 内到达的平均单位数 λ（希腊字母）除以单位时间完成的平均服务数μ（希腊字母），也就是

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$$

*〔注〕：应该为17分钟。因为第12个工人要等候11分钟，接受服务6分钟

在例2.1里，明显的ρ值等于

$$\frac{8\text{到达数／小时}}{10\text{工人数／小时}}=0.8$$

对于（ii） a $\frac{8}{8}=1$ 和（b）$\frac{10}{10}=1$

并且对（iii）$\frac{12}{8}=1.5$

在这里，μ和λ二者都不会改变刚才研究的三种情况，表明了如果$\rho<1$将不会发生排队等候，如果$\rho=1$服务实施将连续受到使用，并且如果$\rho>1$，第二个人一到达就开始排队，并且随着相继人员的到达排队将增加。

实际上，上面的计算是过分地简单化了。完成一个服务和开始另一个服务的经过时间不能有误差。起初这可能显得是无关紧要的，但是服务了几个人后，累积的破坏性的拖延将要发展。我们可以作出一个还要更为严格的评论；无论是到达率还是服务时间二者都似乎不是固定的；二者中任何一个变化将破坏迄今为止的简练计算，二者变化结合起来的地方，对原来系统的干扰会更加严重。一般说来，如果排队等候现象发生了，到达率和服务时间的任何增加将使系统变坏，反之服务时间减小，如果经常地能和到达率的增加相匹配，将只会改善这个情况。

如果两个变量完全是随机的，即使对变量给出了限制，几乎不可能做出排队计算，可以采用模拟的方法（见第三章）。幸而，在排队情况下，输入和输出经常能用二个统计分布来描述，通过下面例子将介绍第一个分布。

例2.2 假定在例2.1中工人的到达服从波桑分布，每小时$\lambda=8$，计算一小时内到达4，5，6等等直到12个工人的单独的概率。

波桑公式给出了事件X的概率如下：

$$P(x)=\frac{e^{-m}m^{X}}{X!}\text{•〔注〕}$$

当X = 4，

$$P(x)=\frac{e^{-8}8^{4}}{4!}=\frac{0.0003546\times4096}{4\times3\times2\times1}=0.057$$

同时

当x = 5，

$$P(x)=\frac{e^{-8}8^{5}}{5!}=0.092$$

其他值直接进行计算，或者由递推方法可以更为方便地计算（见商业统计例题，A、E依聂斯著，麦克未伦出版，1974），得出

P（4）=0.057

P（5）=0.092

P（6）=0.122

P（7）=0.140

P（8）=0.140

•〔注〕：公式中的m即为人

P(9)=0.124

P(10)=0.099

P(11)=0.072

P(12)=0.048

4—12个范围内可以计算其概率为89.4%,它的二边的概率值都减小。因此我们可以预计有些发散,但是50%以上时间到达很可能处于每小时6—10的范围内。这里所叙述的公式的应用不要求进行波桑计算,但是上面计算这一类概率的研究将表明,有时候为什么ρ还没有接近1以前就发生排队现象。

波桑分布计算了在规定时间内事件的概率。不同服务时间的计算取决于一种分布,它明显地是波桑一类的分布,因为它是讨论事件间的时间间隔长度,下面的例子来介绍它。

例2.3 (i)设例2.1的服务时间为指数分布,其期望频率为每小时10个。计算和画出服务时间少于6分钟和多于6分钟的概率。(ii)通过积分,计算(a)5分到7分间和(b)3分到9分间期望的服务时间的比例。

(i) 指数分布的概率密度函数是

$$Y=\mu e^{-\mu x}$$

式中,Y是概率密度,μ是单位时间内的事件的期望数,并且X是假定一个事件刚刚发生,在一个事件复现前经过的时间单位数。

工作时间以分计,若一小时内发生10个服务,即6分钟一个,则单位时间也就是1分钟将有$\frac{1}{6}$个服务发生。假定一个服务结束和下一个服务开始之间没有时间间隔,x是服务时间,

当x=0

$$Y=\frac{1}{6}e^{-1/6\times 0}=\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}$$

当x=1分

$$Y=\frac{1}{6}e^{-1/6\times 1/1}=0.1411$$

下表总结了这些数值和类似计算的值:

服务时间(分)	概率密度
0	0.1667
1	0.1411
2	0.1194
4	0.0857
6	0.0613
8	0.0439
10	0.0315
20	0.0059
30	0.0011

(ii) (a)所要求的概率,在图2.2上由阴影面积给出,并从x=5和x=7的界限内积分概率密度函数得到这个值:

$$\int_5^7 \frac{1}{6}\ e^{-x/6}dx \quad \frac{1}{6}\left[1-e^{-x/6}\right]_5^7$$

$$=\frac{1}{6}\{(1-0.3114)-(1-0.4346)\}\ \ 0.02053$$

（b）对于更宽的界限

$$\frac{1}{6}[1-e^{-x/6}]_3^9 \quad 0.0639$$

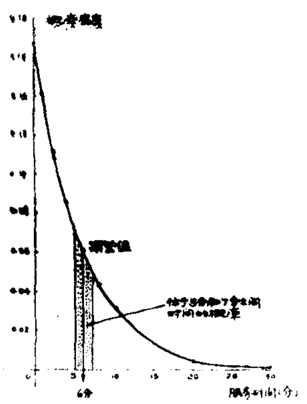

图2.2 服务时间的指数分布

因此，服务时间变化很大已经得到了说明，只有百分之2.053位于平均值两边各一分钟的范围内，同时只有百分之6.39处于平均值两边各三分钟的范围内。

到达和服务时间如此广泛的变化，说明了例2.1的方法需要作相应的改进和为什么对排队情况的度量通常要应用概率。波桑条件和指数条件相结合已经导出解决量化问题的一系列公式，下一个例子将介绍它们。

例2.4 一个轮胎中心每天开业十个小时修理漏气，平均修理时间是20分钟。顾客的平均到达率为每天20个。计算（i）汽车司机不得不等候修理的概率和（ii）在六天的工作周内，有多少小时没有汽车来修理。

（i）这个概率P，是已经定义过的服务强度ρ。

λ = 20/每天十小时 = 2/小时

μ = 一小时平均服务顾客数 = 60分/20分 = 3

因此P = 2/3（= 66.7%）

（ii）“在系统里”有一个汽车司机的概率*〔注〕，就是或者一个漏气修理，或者等候修理漏气，由ρ给出。当系统中没有一个司机时，没有漏气要修理，也就是

概率是 $1-P=1-2/3=1/3$

在整个一周是 $\frac{6\times 10}{3}$小时 = 20小时

对于管理的缺点来说，过度排队不仅是因为实际上的拥挤，而且能引起顾客厌烦，也就是在轮到他之前就离开了等待线。下一个例子介绍了用于这种情况的另外公式。

例2.5 一个超级市场的检查——出口点的出纳员一小时平均接待30个顾客。（i）顾客平均到达率每小时为25个，计算当有一个或更多顾客形成排队时的排队平均长度。（ii）如果排队平均长度减少一个，要求服务时间作怎样的改进？

（i） 排队平均长度的公式为

$$\frac{1}{1-\rho}$$

λ = 25/小时，μ = 60分/2分 = 30/小时，得

$$\rho=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

平均长度是

*〔注〕：这里实际指的是系统里至少有一个司机的概率。

$$\frac{1}{1-5/6}$$

注意，这个公式是根据排队人数得出的，不反应没有排队发生的情况。

（ii）　如果平均队长是（6－1）＝5

$$\frac{1}{1-\rho}=5$$

也就是　$1=5-5\rho$，得出$\rho=0.8$

也就是$\mu=\frac{25}{0.8}$/小时

给出一个改进的服务时间为

$\frac{60}{25/0.8}$分≈1分55秒

下一个例子介绍当排队长度＝0和排队长度大于零时，用于计算时间的公式。

例2.6　（i）应用例2.5（i）的数据，根据刚才的说明计算平均队列长。（ii）如果商店是从上午九点到下午五点半开业，应用没有改进的平均服务率，计算期望没有排队发生的小时数。

（i）　公式是

$$\frac{\rho^2}{1-\rho}$$ *〔注1〕

对于$\rho=5/6$，平均值是

$$\frac{(5/6)^2}{1-5/6}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$$

（ii）　根据例2.4（ii）的方法

$$1-\rho=1-5/6=1/6$$

总小时数＝$8\frac{1}{2}$，给出　$8\frac{1}{2}/6$小时＝$1\frac{1}{4}$*〔注2〕小时没有排队。

我们常常需要知道排队处在零个到它的最大状态之间的某一特殊长度的情况。n个人在系统中的概率由下式给出

$$P(n)=(1-\rho)\rho^n$$

在下个例子中用到这个公式。

例2.7　病人到达医生诊室的平均到达率为每小时8个，并且候诊室可以坐九个病人。平均诊断时间是6分钟。

* 〔注1〕：$\frac{\rho^2}{1-\rho}$是平均队列长（不包括正在服务的）

* 〔注2〕应为$1\frac{5}{12}$小时

（i） 开诊时间的多少百分数时间内，候诊室恰好坐满病人？

（ii） （a）一个病人，（b）二个病人在候诊室外面排队等候的概率是多少？

（i） 这个系统是诊断室＋候诊室，因此候诊室刚好坐满时，$n=1+9=10$；

$\rho=8/10=0.8$

$P(10)=(1-0.8)\times(0.8)^{10}=0.021$

也就是开诊断时间的2.1％。

（ii） （a）这个系统已经扩展到$n=1+9+1$（候诊室外）$=11$

$P(11)=(1-0.8)\times(0.8)^{11}=0.0172$

（b）用0.8乘，给出新的概率为

$0.8\times0.0172=0.0138$

在一个组织的雇员不得不排队以提取必要货物，收集新的工件或交付完成的工件，举几个例子，将发生生产能力的损失，还有二个公式对于度量它们是有用的。

$$\text{在系统中的期望人数}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\text{在系统中每个单位（例如一个工人）化费的平均时间}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

下面的例子用到它们。

例2.8 一大公司的高级经理的工作是核实索赔，每项索赔都由行政助理送来，他和经理留在一起并帮助经理直到完成核实工作。核实的平均时间是12分，助理以每二个小时7个的平均速率到达。经理办理这样事务的费用是5英镑/小时，而助理的费用是2.25英镑/小时，计算这个事务的小时损失：（i）由于助理的排队和核实，和（ii）由于经理等候来核实。

（i） $\lambda=$每2个小时7个$=3.5$个/小时

$\mu=60$分/12分$=5$个/小时

因此 $\rho=3.5/5=0.7$

系统中期望的助理人数等于

$$\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{0.7}{1-0.7}=2\frac{1}{3}$$

每个助理在系统中化费的平均时间是

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\text{小时}=\left(\frac{1}{5-3.5}\right)\text{小时}=\frac{2}{3}\text{小时}$$

因此对公司来说，损失等于

$$\left(2\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times2.5\text{英镑}\right)/\text{小时}=3.50\text{英镑}/\text{小时}$$

（ii） 当系统中没有要核实的人时，经理将等待来核实。根据例2.4（ii）方法，这个概率为

$$1-\rho=1-0.7=0.3$$

因此每小时损失$=0.3\times5$英镑$=1.5$英镑。

如果公司采取不同的观点，仅仅以助理排队等候的时间称为时间损失，和经理在一起工作时不算时间损失，那么在（i）中对损失的计算数字将是跨大了。

等待的平均助理数为

$$\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{(0.7)^2}{0.3}=1.63$$

平均等待时间将是

$$\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{0.7}{5\times(1-0.7)}=0.47\text{小时}$$

得到较低的损失数为

$$(1.63\times0.47\times2.25\text{英镑})/\text{小时}=1.72\text{英镑}/\text{小时}$$

到这里为止选用的所有例子都是描述单通道情况。在最后的例子里，公司面对这样一些损失，将开始考虑任命一个额外的高级经理担负核实工作。假定他的职能和第一个经理的职能相同，新的系统将是多通道的，描述它将是极其复杂的问题。提供二个服务点的效果，不是简单地将排队长度缩小一半，或者将单位时间服务的顾客数加倍。如果是设置完全独立的服务线路，结果将是这样的。

下一个例子说明扩大服务能力所产生的复杂性和收益。

例2.9 车辆由单行车道通过公路隧道，每分钟平均三辆，在一个税亭子里收税，平均每辆车为15秒钟。讨论另外设置一亭子的效果，（i）系统里没有车辆的概率，（ii）系统里有车的平均数和（iii）每辆车平均延迟时间。

（i） 对一个单通道系统

$\lambda=3/\text{分}$，$\mu=(60/15)/\text{分}=4/\text{分}$

所以$\rho=3/4=0.75$，得$P=0.25$。对于多通道系统，ρ变成

$$\frac{\lambda}{C\mu}$$

式中，$C=$通道数。如果又设立一个亭子，

$C=1+1=2$，使得

$$\rho=\frac{0.75}{2}=0.375$$

将此值代入公式，可得到新的概率

$$\frac{C!\ (1-\rho)}{(\rho C)^c+C!\ (1-\rho)\left\{\sum_{r=0}^{C-1}\frac{1}{r!}(\rho C)^r\right\}}$$

分母中的r表示相加的项。对于我们刚才的问题，我们设$r=0$，记下{ }的值并将它加到$r=2-1=1$的{ }中的值上去。如果我们要计算8个亭子的概率，r要取0，1，2，……，7，相继的数值。

对于$r=0$

$$\left\{\text{表达式}\right\}=\frac{1}{0!}(0.375\times2)^0=1$$

对于$r=1$

$$\left\{表达式\right\} = \frac{1}{1!}(0.375\times 2)^1 = 0.75$$

因此全部的和 = 1 + 0.75 = 1.75，给出的概率为

$$\frac{2\times 1\ (1-0.375)}{(0.375\times 2)^2+(2\times 1)(1-0.375)(1.75)} = 0.45$$

对于三个亭子，

$$\rho = \frac{0.75}{3} = 0.25$$

分母中，对于$r=0$ $\{\ \} = 1$

对于$r=1$ $\frac{1}{1!}(0.25\times 3)^1 = 0.75$

对于$r=2$ $\frac{1}{2!}(0.25\times 3)^2 = \frac{0.28}{2.03}$

所以新的概率是

$$\frac{3!\ (1-0.25)}{(3\times 0.25)^3+(3!\ )\times(0.75)\{2.08\}} = \frac{4.5}{9.75} = 0.46$$ [注1]

(ii) 对于一个亭子，系统中有车的平均数是

$$\frac{1}{1-0.75} = 4$$

对于多通道系统，我们应用在（i）中计算的概率值P_0，正如我们已经见到的，这个值将取决于通道数。然后将这个值用在公式里

$$\frac{\rho(\rho C)^c}{C!\ (1-\rho)^2}P_0+\rho^0 C^*$$ [注2]

给出要求的平均值，对于 2 个通道，$P_0=0.45$，给出

$$\frac{0.375(2\times 0.375)^2}{2!\ (1-0.375)^2}\times\frac{0.45}{1}+(2\times 0.375) = 0.82\text{辆车}^*$$ [注3]

对于三个通道，$P_0=0.46$，得出

$$\frac{0.25(3\times 0.25)^3}{3!\ (1-0.25)^2}\times\frac{0.46}{1}+(3\times 0.25) = 0.76\text{辆车}$$

(iii) 忽略由于车辆减速进入系统和加速离开引起的延迟，则延迟就是在系统中的平均时间，对于单通道，延迟将是

$$\frac{1}{4-3}\text{分/车} = 1\text{分/车}$$

〔注1〕分母中｛2.08｝应该是｛2.03｝：答案为0.47。

〔注2〕对于多通道 $\rho^0=\frac{\rho}{C}$，在本式ρ也就是ρ^0。

〔注〕答案应为0.87辆车

对于多通道系统，平均时间公式，和前面一样，包括P_0，是

$$\frac{\mu\ (\rho C)^c}{C!\ \ (1-\rho)^2 C\mu}P_0+\frac{1}{\mu}\ ^{*}\text{〔注1〕}$$

对于二个亭子，得出

$$\left\{\frac{(2\times 0.375)^{2}}{2!\ \ (1-0.375)^2\times 0.375\times 4}\times\frac{0.45}{1}\right\}+\frac{1}{4}=0.39\text{分}^{*}\text{〔注2〕}$$

对于三个亭子

$$\left\{\frac{(2\times 0.25)^{3}}{3!\ \ (1-0.25)^2\times 0.25\times 4}\times\frac{0.46}{1}\right\}+\frac{1}{4}=0.27\text{分}*\ \text{〔注3〕}$$

〔注1〕公式应为$\frac{(\rho C)^c}{C!\ \ (1-\rho)^2 C\mu}P_0+\frac{1}{\mu}$

〔注3〕应为$\left\{\frac{(2\times 0.375)^2}{3!\ \ (1-0.375)^2\times 2\times 4}\times\frac{0.45}{1}\right\}+\frac{1}{4}=0.29\text{分}$

〔注2〕应为$\left\{\frac{(2\times 0.25)^3}{3!\ \ (1-0.25)^2\times 3\times 4}\times\frac{0.46}{1}\right\}+\frac{1}{4}=0.25\text{分}$

在这样的情况下，计算排队等候的平均时间是

$$\frac{(\rho C)^{c}}{C!\ \ +(1-\rho)^2 C\mu}P_0$$

到现在为止给出的方法是正确的。尽管许多人要求一个服务，但实际上这个人数将是有限的。为了理论上的目的，认为排队是无限的。下一个例子介绍一个不同的情况，在那里，等候一个或几个操作服务的单调项目的排队。

例2.10　一个烤面包师照看三个相同的烤箱，每一烤箱生产等批量的同样产品。每装一个烤箱要化 5 分钟，卸一个烤箱要10分钟，烤的过程需要15分钟。如果面包师上午 8 点开始工作，分析第一个小时他的时间的应用情况。

图2.3表示一种可能性。他顺序装三个烤箱，在上午 8 点15分完成最后一个，第三号烤箱，有 5 分钟间隙，到上午 8 点20分，是他能够开始卸第一号烤箱的最早时间，在上午 8 点

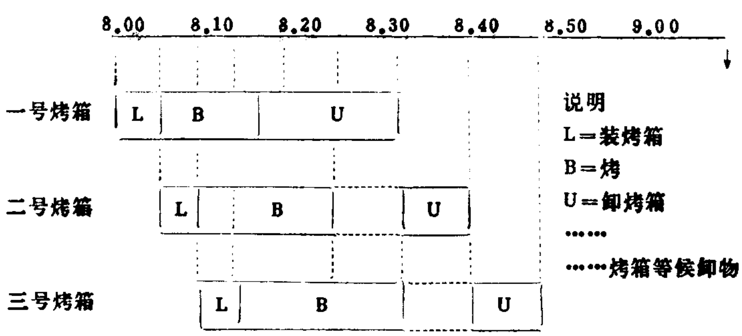

图 2.3　“三个烤箱”问题

30分完成这个工作，他开始卸第二烤箱，这个烤箱在上午 8 点25分已经烤完，在上午 8 点40分，面包师可以有空做以下几件事中的任何一件，

（i）重新装一号烤箱

（ii）重新装二号烤箱

（iii）卸第三号烤箱

如果他做（iii），他将在上午 8 点50分做（i）或者（ii）。

面包师和烤箱时间总结如下：

	面包师		烤箱		
	工作	等待		使用中	等待
	55分	5 分	1	（30分 + 5分）*〔注1〕	25分〔注1〕
			2	（30分 + 5分）	25分
			3	30分	30分
总共	55分	5 分		100分	80分

因此面包师的 8.3 %时间和烤箱的44.4%时间是化费在等待上。如果面包师的职责仅仅是装卸烤箱，那么他损失的时间是很少的。烤箱的能力严重地利用不足。但是再用一个面包师是否适当，取决于没有说明的其他因素。

就这个问题来说，已经相当地简化。实际上，在半个小时的全周期里和个别操作的时间里可能会发生变化：要考虑面包师从一个操作改变为另一个操作；而且最重要的，当三个烤箱同时工作时，面包师很可能要监视烤箱的工作性能。要考虑常规操作中的随机变化和对于面包师来说要注意非常规的偶然事件，例如烤箱的过热，我们需要根据概率来列出公式。在一个或更多的操作者照看一台以上的机器情况下，排队理论对这种情况的应用就称机器干涉，因为我们需要估计每隔多久，有多少次和要多少时间，一个操作者必须中断对一台机器的寻常的注意力而去注意另一台机器。

下一个例子表示可以对一个操作者的服务，计算总的需要是多少。

例2.11 一个装配工照看相同的五台一组机器，并且一台机器需要照看的概率是 1/8 。应用二项分布在理论上说明需要工人的多少服务时间。（读者需要的分布知识可以参见作者的二本著作）。

如果 $p=\frac{1}{8}$是一台机器需要看管的概率，那么 $q=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$是机器不需要看管的概率。六种可能情况的所有概率由表达式 $(p+q)^5$相继的各项给出，也就是

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)^5$$

$$=(1/8)^5+5(1/8)^4(7/8)+10(1/8)^3(7/8)^2+10(1/8)^2(7/8)^3+5(1/8)(7/8)^4+(7/8)^5。$$

计算每个个别项的值，将计算值求和并以百分数计算之，我们得到的数据列在下面：

〔注1〕如果8:50面包师卸完第三烤箱后，先装第一烤箱，然后再装第二烤箱，那么在装第二烤箱时，第一烤箱已在工作，所以第一烤箱使用时间应为(30分 + 10分)，等待时间为20分

机器数		相　对	总时间的
要照看	不要照看	频率*	百分数
5	0	1	0.003
4	1	35	0.107
3	2	490	1.495
2	3	3430	10.468
1	4	12005	36.636
0	5	16807	51.291
		32768	100.000

为了计算方便，对每个概率乘以8^5。所以稍超过50％装配工的时间，他可以期望所有机器都满意地运转，稍大于36％的时间，他可以期望有一台机器需要照看，小于2％他的时间，有三台或更多台机器需要照看。

但是这样的计算仅仅非常一般地表明了对服务的可能需要。对情况的实际判断，我们需要考虑平均的服务时间和关于它的变化的分布。再进一步，当我们考虑事件的连续的一对所组成的时间日程表时，每对是（故障的出现＋调整它），我们需要应用的不是实质上的一个“到达率”，$P=\frac{1}{8}$的固定值，而宁愿使用关于它的随机变化。由例2.11所给出的情景是不完全的，似乎应该改善。

在这样一类问题里，我们经常可以假定故障的发生是波桑频率分布，而服务时间是指数分布。我们需要计算一个λ量，是一个服务因子，它和前面问题中ρ相类似，从关系式

$$\lambda=\mu\alpha$$

式中，μ＝每小时平均停机次数，α＝每次停机平均服务时间。

机器的干涉是由两个不同的原因引起的：（i）在规定的间隔时间内的例行照看，围绕平均的时间有小小的变动，例如重新进机器使用的原料箱；和（ii）在大范围的变化时间间隔内所产生的停机、调整和类似原因，也要求操作者的校正时间在很大的范围内变化。对于一台专门的机器，其服务因子似乎是二种不同乘积的总和，但是对于一组机器，其问题是可能和同样类型的机器有很大的不同，例如，一台较旧的机器可能比一台较新的机器更经常地发指故障并需要更多的时间使其恢复正常。下面的例子说明这个问题。

例2.12　一台加工电子元件的机器每五分钟必须停下来以便将线圈套管复位，这个操作平均要化去20秒。再者，每次一个控制器要调整，这个操作要停下机器，这个事件平均每12分发生一次，需要平均时间45秒。计算线圈套管复位的服务因子。

λ＝（平均停机次数/小时）×（平均服务时间），它等于

$$\frac{60}{5}\times\frac{20}{60\times60}=\frac{1}{15}$$

对控制器调整

$$\frac{60}{12}\times\frac{45}{60\times60}=\frac{1}{16}$$

给出总的服务因子为$\frac{1}{15}+\frac{1}{16}=31/240$。所以每一小时机器必须停工，也就是不运行的总时间

为

$$\frac{60\times 31}{240}\text{分}=7\frac{3}{4}\text{分}$$

如果我们有n台机器，并且入值是一样的，于是P_0，所有机器都在工作的概率由下式给出

$$P_0=\frac{1}{1+n\lambda+n\ (n-1)\ \lambda^2+\cdots\cdots n!\ \lambda^n}$$

下一个例子用到它。

例2.13 一台机器平均要一个操作者每十分钟服务一次，每次 $1\frac{1}{8}$ 分。如果他要照看四台这样的机器，那么在一个小时的时间里，他可能有多少时间是空闲的。

入=（停机次数）×（平均服务时间），他等于

$$\frac{60}{10}\times\frac{1\ 1/8}{60}=\frac{9}{80}$$

当所有机器都在工作时，操作员可能是空闲的。

当n＝4

$$P_0=\frac{1}{1+(4\times 9/80)+\{4\times 3\ \ (9/80)^2\}+\{4\times 3\times 2(9/80)^3\}+\{4\times 3\times 2(9/80)^4\}}$$

$$=0.61$$

因此，每小时他的空闲时间可能是36分36秒。

注意，在这个有限的数据上，我们没有去判断已经达到的人力的使用和机器的使用之间是否处于经济平衡。面临的事情是，服务能力极大地没有充分利用；但是在理论的23分24秒时间内，当一台或更多台机器停工，产量的损失可能达到一个不希望的水平。下面的例子介绍一个公式，它可以使我们更严格地分析这样的情况。

例2.14 一公司拥有五辆交货车辆，除去主要服务外，每辆车每100次运行后要化费较少时间的二次保养或修理，每次20分。计算0，1，2和3辆车不能使用的时间比例。

如前 $\lambda=\frac{2}{100}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{150}$ （小时）

$$P_0=\frac{1}{1+(5/150)+(5\times 4)(1/150)^2+(5\times 4\times 3)(1/150)^3+(5\times 4\times 3\times 2)\ (1/150)^4+(5\times 4\times 3\times 2\times 1)(1/150)^5}$$

$$=0.9668$$

r部机器（在这里是车辆）停工的概率可以计算为

$$P_r=\frac{n!}{(n-r)!}\times\lambda^n P_0\text{'}$$ 〔注〕

〔注〕公式应为 $P_r=\frac{n!}{(n-r)!}\times\lambda^r P_0$