中等专业学校教材

工科专业通用

立体几何

王 延 馨 編

人 民 教 育 出 版 社

編写說明

本书是根据教育部1963年中等专业学校工科专业通用的数学教学大綱(修訂草案)的要求,在1956年中等专业学校工科专业使用的《立体几何》教材的基础上,吸取了几年来教学实践的經驗編写的.在編写中,注意了与初中平面几何的衔接,与中等专业学校的代数、三角和高等数学的相互联系,加强基本概念的讲述和实际計算技能的訓练.

为了便于学生学习,把习题分成了复习問題、习题和复习题三类,分插在各节、各章之后.其中复习問題可作为学生复习教材內容的参考,习题和复习题可作为布置作业和提高之用.

本书初稿曾印发北京、上海、江苏、广东、四川和辽宁等地区有关学校征求意見,并請北京师范大学鍾善基先生进行审閱.根据各方面的意見,由編者和金一鷗、黄飞、范尙志等同志研究后作了必要的修改.在这里,对所有参加审閱和提供意見的同志們的热忱帮助表示感謝.江爱滋同志曾参加本书初稿的編写工作,在此一併致謝.

限于时間和編者的水平,缺点和错誤在所难免,希各地教师和讀者予以指正.

王延馨

1964年5月

目录

第一章　直綫和平面

在平面几何里，我們研究了关于平面图形的一些基本性质和这些性质的应用，但是在生产实际中，只知道一些平面图形的性质是很不够的．例如：在修建一个土壩时，必須算出它需要多少方土；要用多大的一块铁，才能鑄出某一机器的零件；在設計中，怎样画出某一建筑物或机器零件的平面图，这都需要知道一些空間图形的性质．

由点、綫、面所构成的图形，当所有各点不完全都在同一平面上时，叫做空間图形．**立体几何学就是研究空間图形性质的科学．**

几何体是一种空間图形，它是物体所佔的空間部分，由面把它和周圍的空間分开，在研究时我們只考虑它的形状和大小，而不涉及物体的重量、顏色等物理性质．

空間图形仍和平面图形一样具有下面的基本性质：任何图形都可以在空間移动，而不改变它的大小、形状及各部分的位置关系．

I．平　　面

§1-1　平面及其表示法

平面是广闊无涯的．平靜的水面、窗玻璃面和課桌面等，都可看作平面的一部分．我們在适当的角度和适当的距离看

窗玻璃面和課桌面时，觉得它們都像平行四边形．因此，通常用平行四边形表示平面，并用希腊字母 α、β、γ …等来表示（图 1-1）．至于点和直綫的表示方法仍和平面几何一样，即用大写拉丁字母 A、B、C…M、N…表示点；小写拉丁字母 a、b、c…p、q… 或两个大写拉丁字母 AB、CD … MN … 表示直綫．

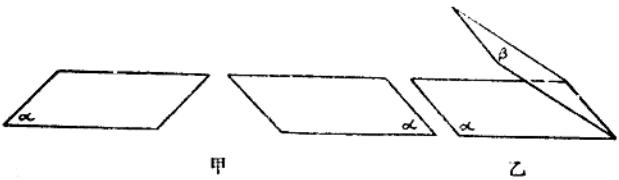


图 1-1

在画一个水平放着的平面时，通常把平行四边形的銳角画成 45°，把横边画得大約等于另一边的两倍（图 1-1 甲）．如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，通常把被遮的部分的綫段画成虛綫或不画(图 1-1 乙)．这样，看起来就比較明显．

如果平面是直立的，那么可以画成以下的几种情况：

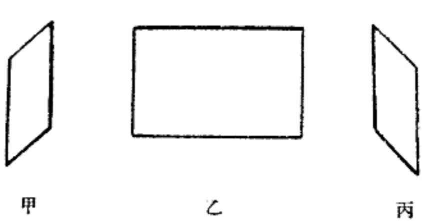


图 1-2

如图 1-2 甲，平面是在观察者的左前方；图 1-2 乙，是在

观察者的正前方;图 1-2 丙,是在观察者的右前方.

§1-2 平面的基本性质

从生活实际和生产实踐中积累的經驗告訴我們,关于平面有下列几条公理:

公理 1 过不在一直綫上的任意三点,可作一平面,且仅可作一平面(图 1-3).

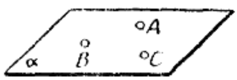


图 1-3

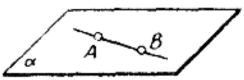


图 1-4

测量上所以采用三足架就是应用这个公理.

公理 2 如果一条直綫上有两点在一个平面内,那么这条直綫就全部在这个平面内(图 1-4).

公理 3 如果两个平面有一个公共点,那么它們相交于过这点的一条直綫(图 1-5).

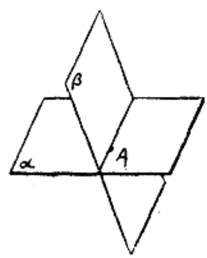


图 1-5

天花板和墙壁的交綫,折紙的折痕等,都說明了两个平面相交是成一条直綫的.

推論 1 过一条直綫及綫外一点,可以作一个平面,且仅可作一个平面.

設已知直綫 AB 和綫外一点 C(图 1-6).在直綫 AB 上任意取 A、B 两点,这样 A、B 和 C 組成不在一直綫上的三点.过这三点可以作一个

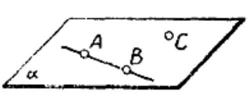


图 1-6

平面，且仅可作一个平面 α（公理 1）；由于直綫 AB 有两点在所作平面 α 內，所以直綫 AB 必全在平面 α 內（公理 2）. 因此，平面 α 是过直綫 AB 和点 C 的平面.

我們再进一步证明，这样的平面只可以作一个. 如果过直綫 AB 和点 C 的平面除平面 α 外还有另一个平面 β，那么 A、B、C 三点也一定都在平面 β 內. 这样，过不在一条直綫上的三点 A、B、C 就可以作两个平面 α 和 β 了. 这和公理 1 相矛盾. 所以过直綫 AB 和点 C 的平面只有一个.

显然可見，經过一条直綫（或經过两点），可以作无限多个平面. 因为設空間已知直綫为 p（图 1-7）. 取这直綫外的任意一点 A，过直綫 p 及点 A 可作一个平面 α（推論 1），在 α 外另取一点 B，則过 B 和 p 又可作一平面 β. 如此继續可以得到无限多个平面.

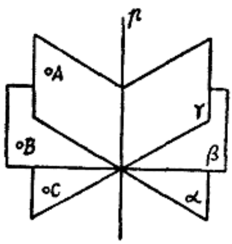


图 1-7

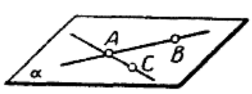


图 1-8

推論 2 过两条相交的直綫，可以作一个平面，且仅可作一个平面.

如图 1-8，取相交直綫 AB 和 AC 的交点 A. 又在 AB 上取 B 点，在 AC 上取 C 点，共得不在一直綫上的三点 A、B 和 C，过这三点可以作一个平面，且仅可作一个平面 α（公理 1）.

又 AB 和 AC 各有两点在所作平面 α 內. 因而这两条直綫也全在平面 α 內(公理 2). 因此，平面 α 是过相交直綫 AB 和 AC 的平面. 同时这样的平面只可以作一个. 它的证明方法，和证明推論 1 相仿.

推論 3 过两条平行直綫，可以作一个平面，且仅可作一个平面.

因为当两条直綫在同一平面內且不相交时，叫做平行綫(平行綫的定义). 所以过两条平行直綫 AB 和 CD，可以作一个平面 α (图 1-9)；同时这样的平面只可以作一个. 因为如果过平行直綫 AB 和 CD 还可以作一个平面 β，这就是說过直綫 AB 和直綫 CD 上一点可以作两个平面 α 和 β. 这和推論 1 相矛盾. 所以过平行直綫 AB 和 CD 的平面只有一个.

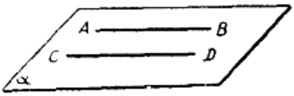


图 1-9

例如三角形、梯形都是平面图形.

因为 (1) $\triangle ABC$ 可以看作是由三点 A、B、C 所确定的(图 1-10). 根据公理 1、2 可知 $\triangle ABC$ 是一个平面图形.

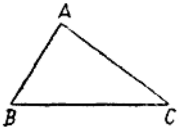


图 1-10

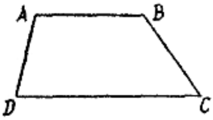


图 1-11

(2) 在梯形 $ABCD$ 中，設 $AB \parallel CD$. 根据推論 3，可知綫段 AB 和 CD 必定在同一平面內. 也就是說：A、B、C、D 四点在同一平面內. 再根据公理 2，可知綫段 AD 和 BC 也必定在这个平面內，这就說明了梯形 $ABCD$ 也是一个平面图形 (图

1-11).

复习問題

1. 什么叫做空間图形？立体几何研究的对象是什么？

2. 平面有无界限？通常我們把它画成什么形状？画一个水平的、直立的或一部分被另一平面遮住的平面时，有何規定？

3. 說出关于平面的基本性质的公理和推論，这些推論是怎样证明的？

习題一

1. 过一点任意作三条直綫，它們是否在同一平面内？为什么？

2. 空間有四个点，它們中間的任何三点都不在一直綫上，那么，过其中任意三点作一个平面，共可作几个平面？

3. 一条直綫和两条平行綫相交，这三条直綫是否在同一平面内，为什么？

4. 过已知直綫外一点向直綫上三个定点分别連結三条綫段，問这三条綫段是否在同一平面内？为什么？

5. 三条直綫两两平行，但不在同一平面内．如果过其中任意两条各作平面，共可作几个平面？

6. 四条綫段依次首尾相接，所得的封閉图形，一定是平面图形嗎？为什么？

II. 直綫和直綫的位置关系

§1-3 空間两直綫位置关系的概念

在同一个平面内的两条不重合的直綫，它們之間的位置关系只有两种：**相交**或者**平行**．这是我們早已知道的．

不在同一平面內的两条直綫，它們旣不能相交也不能平行(因为如果相交或平行，它們就將在同一平面內)．例如教室里下垂的电綫和黑板边沿的一条横綫，便是这样的两条直綫(图 1-12)．

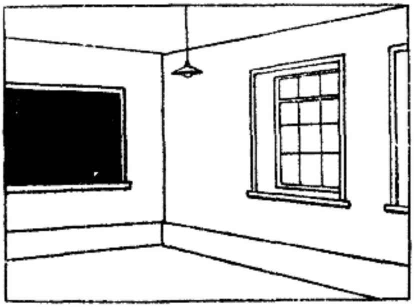


图 1-12

我們把不在同一平面內的两条直綫，叫做**异面直綫**．

由此可見，空間两直綫的位置关系只有下列三种：

(1) **相交**；(2) **平行**；(3) **异面**．

画异面直綫时，要把两条直綫画在不同的平面內，这样才容易显出异面直綫的特点．例如画异面直綫 a 和 b 时，图 1-13 甲、乙的画法比較明显；丙的画法就不明显．

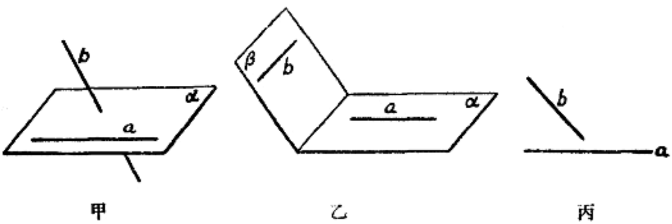


图 1-13

§1-4 空間直綫的平行关系

定理 1 如果两个相交平面，分别通过两条平行直綫，那么这两个平面的交綫，一定平行于这两条平行綫.

已知：直綫 $a \parallel b$，平面 α 通过直綫 a，平面 β 通过直綫 b，平面 α 和 β 的交綫为 c，且 c 不和直綫 a 及直綫 b 重合(图 1-14).

求证：直綫 c 平行于直綫 a 及直綫 b.

证：直綫 a 和 c 同在平面 α 内，假若不平行，就一定相交于一点 N.

因点 N 在 α、β 的交綫 c 上，所以它既在平面 α 内也在平面 β 内.

另外点 N 既在直綫 a 上，所以它一定在两平行直綫 a 及直綫 b 所决定的平面 γ 内.

这就是說，点 N 在平面 β 内又在平面 γ 内，也就是在 β 和 γ 的交綫 b 上.

点 N 既在直綫 a 上，又要在直綫 b 上，因此它是直綫 a 和 b 的公共点. 这和假設 $a \parallel b$ 相矛盾. 可見在同一平面 α 内的直綫 a 和 c 不能相交. 所以 $c \parallel a$.

同理可证 $c \parallel b$.

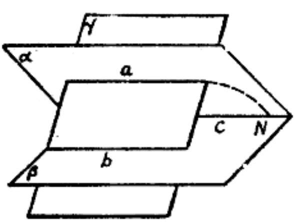


图 1-14

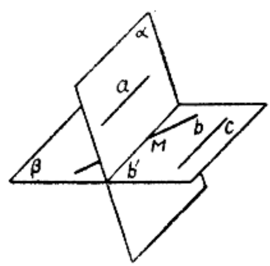


图 1-15

定理 2 不在同一个平面内的三条直綫，如果其中两条直綫都平行于第三条直綫，那么这两条直綫也平行.

已知：直綫 a、b 和 c 不在同一平面内，并且 $a \parallel c$ 及 $b \parallel c$ (图 1-15).

求证：直綫 $b \parallel a$.

证：在直綫 b 上任取一点 M，过点 M 和直綫 a 作平面 α，过点 M 和直綫 c 作平面 β. 假設 α 和 β 的交綫是过点 M 的直綫 b'.

因为 $a \parallel c$，所以有

$$b' \parallel a \quad 和 \quad b' \parallel c \text{（定理 1）}.$$

两平行直綫 b' 和 c 可以决定一个平面，而这个平面和平面 β 都經过点 M 和直綫 c. 所以它們一定重合（§1-2 推論 1）.

在平面 β 内，直綫 b' 和 b 都經过点 M，并且都平行于直綫 c，所以 b' 和 b 一定重合.

由于 $\qquad b' \parallel a$,

便可得到 $\qquad b \parallel a$.

这个定理的正确性是很明显的. 例如：图 1-16 是一个三棱尺，棱 BB_1、CC_1 都和棱 AA_1 平行，而棱 BB_1 和 CC_1 也平行；拿一張紙，在上面画三条平行綫 a、b 和 c，以中間的一条 b 为折痕，把紙折过来（图 1-17），可以看到 a 仍然和 c 平行.

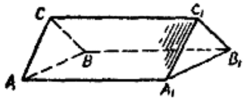


图 1-16

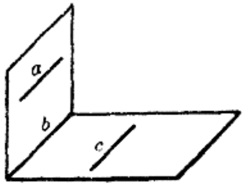


图 1-17

定理 3 空間的两个角，如果它們的对应边平行并且同向，那么这两个角相等.

已知：空間两个角 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$（图 1-18）中有 $BA \parallel ED$，$BC \parallel EF$，且都同向.

求证：$\angle ABC = \angle DEF$.

证：截取 $BM=EN$，$BP=EQ$. 連結 BE，MN，PQ，MP 和 NQ. $\because$ $BM \mathrel{\underline{\parallel}} EN$，

$\therefore$ $BMNE$ 是平行四边形.

$\therefore$ $BE \mathrel{\underline{\parallel}} MN$.

同理有 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} PQ$.

因此，$MN \mathrel{\underline{\parallel}} PQ$，

$\therefore$ $MNQP$ 是平行四边形.

$\therefore$ $MP=NQ$.

于是 $\triangle BMP \cong \triangle ENQ$，

$\therefore$ $\angle ABC=\angle DEF$.

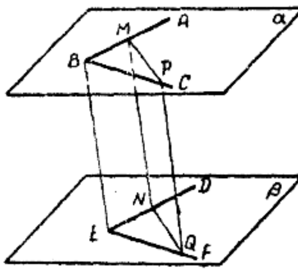


图 1-18

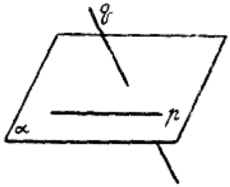
§1-5 空間直綫的夹角

空間两条直綫間的位置关系，我們可以用它們的夹角的大小来表示. 假若两条直綫在同一平面內时，要是平行便組成 0° 的角，要是相交便組成 0° 到 180° 之間的角. 这在平面几何里是早已知道的. 假若两条直綫不在同一平面內，它們就不能組成像平面几何中所定义的角. 下面我們給出异面直綫夹角的定义：

定义 自空間任意一点所作平行于两条异面直綫的两条射綫所夹的角，叫做两异面直綫間的夹角.

根据定义可作出异面直綫 p 和 q 的夹角如下：

在空間任意取一点 O，过 O 点引两条直綫 a 和 b，分别与 p 和 q 平行. 我們把 a 和 b 相交所成的四个角，叫做异面直綫 p 和 q 的夹角(图 1-19). 根据 §1-4 定理 3 可知，这些角的大小，是由 p 和 q 的位置所决定的，而和 O 点的选擇无关.



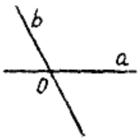


图 1-19

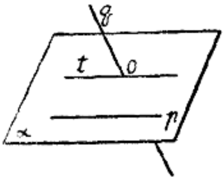


图 1-20

通常可在直綫 q(或 p)上，任取一点 O，从而引直綫 $t \parallel p$; t 和 q 的夹角，便表示 p 和 q 的夹角(图 1-20).

如果 p 和 q 是两条有确定方向的射綫，那么經过任意一点作两条射綫分別与 p、q 平行且同向，这时所得到的唯一的一个角，就是 p 和 q 的夹角.

§1-6 空間直綫的垂直关系

空間的两条直綫，如果在同一平面內，它們的夹角成直角时，便称为互相垂直，这是我們早已知道的. 对于两条异面直綫，也有类似的定义.

定义 如果两条异面直綫間的夹角是直角，則称这两条异面直綫互相垂直.

例如，教室里下垂的电灯綫和天花板与墙面的交綫，便是互相垂直的异面直綫.

例. 已知直綫 a 和 b 互相垂直(不一定相交)，直綫 c 和 a 互相平行，求证 c 和 b 也互相垂直(不一定相交).

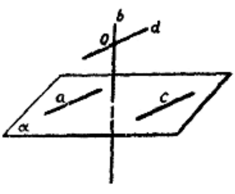


图 1-21

证: 在直綫 b 上任意取一点 O (图 1-21)，經过 O 作直綫 $d \parallel a$，根据

§1-4 定理2，我們有 $d \parallel c$.

又根据异面直綫的夹角定义知：d 和 b 所成的角就是 a 和 b 所成的角，也就是 c 和 b 所成的角．已知 a 和 b 相垂直，所以 c 和 b 也垂直．

复习問題

1．空間两直綫的位置关系有几种？

2．什么叫做异面直綫？怎样画异面直綫？

3．定理“不在同一平面内的三条直綫，如果其中两条直綫都平行于第三条直綫，那么这两条直綫也平行”，是怎样证明的？

4．“空間的两个角，如果它們的对应边平行且同向，那么这两个角相等．”是怎样证明的？

5．什么是异面直綫的夹角？两条异面直綫在什么情形下叫做互相垂直？

习題二

1．把一張长方形的紙对折两次，展开后竪立在桌面上(图1-22)，試說明为什么这些折痕是互相平行的．

2．在两个平面内的两条直綫是否一定是异面直綫？为什么？

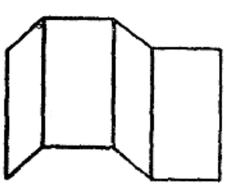


图 1-22

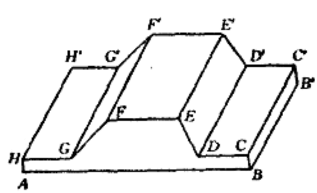


图 1-23

3．在图1-23所示的一块鑄件上，任意找出几对相交直綫和异面直綫．