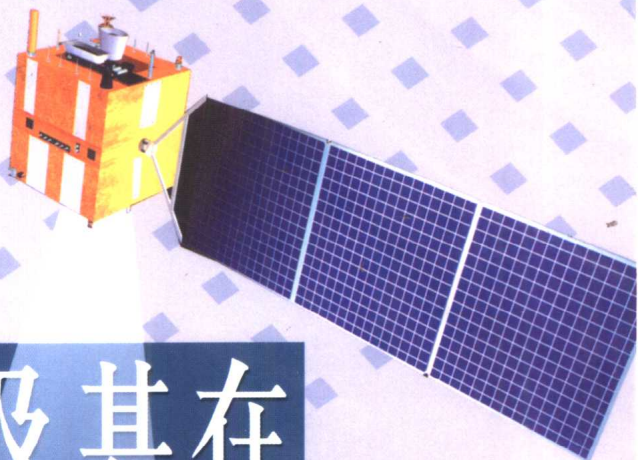
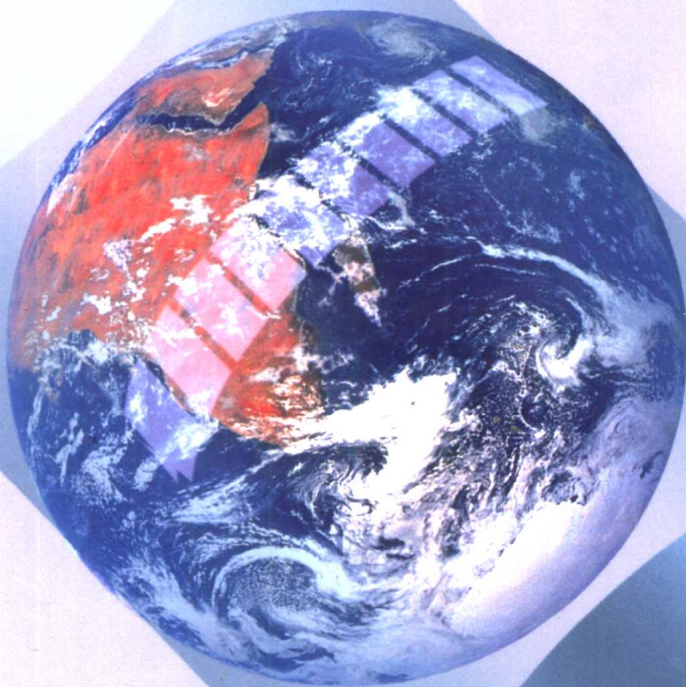


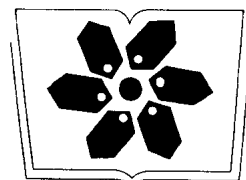
◎ 任留成 著



空间投影理论及其在 遥感技术中的应用



 科学出版社
www.sciencep.com



中国科学院科学出版基金资助出版

空间投影理论 及其在遥感技术中的应用

任留成 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是在对空间投影理论进行系统研究的基础上编写而成的。全书共分八章,主要包括:绪论、空间投影基本理论、空间方位投影、空间圆柱投影、空间斜圆柱投影、空间斜圆锥投影、空间投影在遥感图像处理中的应用、空间投影在遥感影像制图中的应用等。通过研究,作者在理论方面形成了完整的空间投影理论体系;在应用方面探讨了空间投影理论在遥感图像处理和遥感图像制图方面的应用研究,奠定了空间投影理论与应用的研究基础。

本书不仅可供地图制图、航测、遥感、气象、地理、测绘及相关专业教师、研究生和本科生阅读,而且也可作为从事空间数据处理工作者和技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

空间投影理论及其在遥感技术中的应用/任留成著. —北京:科学出版社, 2003

ISBN 7-03-011119-2

I. 空… II. 任… III. ①数学制图-研究②数学制图-应用-遥感图像-数字图像处理-研究 IV. O185.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 006493 号

责任编辑:杨 红 彭胜潮/责任校对:包志虹

责任印制:刘秀平/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年6月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2003年6月第一次印刷 印张:12 1/2

印数:1—2 000 字数:282 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

本书由下列项目联合资助

- 国家自然科学基金项目“缺少控制点的遥感影像精纠正与定位技术”(40271095)
- 国家 973 项目“地表时空多变要素数据融合与万维网空间数据模型”(G2000077904)
- 国家 863 课题“中国海岸带及近海卫星遥感综合应用系统技术”(2001AA633010)

序

随着空间科学技术的不断发展,地图投影学研究逐渐向空间投影研究方向发展。空间投影是近 20 年才出现的一个新的研究领域,是图像数学基础研究的前沿课题,是卫星遥感制图学发展必然产生的问题。

1974 年,美国的 A P Colvocoresses 教授提出空间斜圆柱投影概念,至此,空间投影才开始得以研究和发展。我国是 20 世纪 80 年代开始介绍并研究空间斜圆柱投影的,我的著作《地图投影变换原理与方法》(1990 年,解放军出版社)和 *Transformation of Map Projection—Theory and Application* (2000 年,英国 Taylor & Francis 出版社)均涉及到此类问题。近几年来,我们课题组在空间投影研究方面又取得了一定进展。

空间投影研究还处于萌芽时期,尚没有形成完善的理论体系,很多内容有待研究。对空间投影研究最多的是空间斜圆柱投影,很多著作和文献都有详细论述。其实,空间投影蕴涵着丰富的研究内容,包括适合各种传感器类型的动态投影,它是一个非常复杂的研究方向,涉及到现代数学、天体力学、制图学以及航天遥感的学科交叉。

空间投影理论与方法的研究在我国尚属探索过程。任留成博士近几年来潜心研究空间投影,取得了丰硕成果,研究内容涉及空间投影理论和应用等各个方面,对空间投影研究更加深入、更加系统,使空间投影研究前进了一大步,并为今后这一方向的发展开辟了广阔的前景。

该书是任留成博士长期从事这一领域研究成果的高度结晶,从理论到应用都具有开拓创新的特色,是作者博学专长的优秀总结。作者在空间投影系统理论研究和处理方法等方面做出了大量创新性的工作,有不少填补了这一领域的研究空白。他为遥感图像处理与遥感专题制图提供了崭新的理论依据和实用的技术方法。空间投影理论与方法研究者为数不多,任留成博士是一优秀的代表。就该书的研究水平而论,其决不逊于国外同类的研究著作。

该书是论述空间投影最全面的著作,从基础理论到各种空间投影的建立,从遥感图像投影分析到空间投影在遥感图像处理及遥感制图中的应用等,都有很详细的讲述,能为今后从事该项研究的科研工作者提供重要的参考资料。该书的出版对研究空间投影及遥感技术都具有重要的理论意义和应用价值。

杨启和

2002 年 7 月于郑州

· i ·

前 言

现代遥感技术已经进入一个能够动态、快速、准确、多手段提供多种对地观测数据的新阶段,其应用领域范围广泛,发展迅速,尤其是在测绘制图领域的应用更具特色。进入 21 世纪,随着遥感信息的丰富、各类遥感图像数据的涌现和图像数字处理、图像投影变换的研究日趋深化,遥感成为当前热门研究的课题。

空间投影理论研究自 20 世纪 70 年代开始以来,已经成为该领域重要的研究方向,是图像数学基础研究的前沿课题,是遥感专题分析制图等成图质量与精度的重要保证,也是遥感快速、高精度制图的技术支撑。

本书针对空间投影理论的不完善状况,试图研究并整理出一套相对完整的系统理论,探求建立适合卫星遥感图像的空间投影的理论和方法,并对空间投影在遥感影像几何处理及遥感制图方面的应用做了一些有意义的研究。在理论方面,重点研究空间投影的基本理论、空间方位投影、空间圆柱投影和空间斜圆锥投影等。在应用方面,重点研究利用空间投影方法对缺少控制点的遥感影像进行几何精纠正、地物目标精确定位以及空间投影的制图应用等问题。

本书是作者在博士论文与博士后工作的基础上,结合国内外研究成果编写成的,凡引用别人成果之处,都一一作了说明,以便读者知道问题的来龙去脉。本书共分八章。第一章为绪论;第二章研究空间投影的基本理论;第三章综述空间方位投影;第四章研究空间圆柱投影;第五章详细讨论空间斜圆柱投影;第六章研究空间斜圆锥投影;第七章探讨空间投影在遥感图像处理中的应用;第八章研究空间投影在遥感影像制图中的应用。

在本书撰写过程中,许多地方受到恩师杨启和教授和朱重光研究员学术思想的启发,他们在百忙之中审阅了书稿,在此,向他们表示最衷心的感谢!同时感谢高俊院士、王家耀院士、郭华东所长、赵忠明副所长、傅肃性研究员、周成虎研究员、朱长青教授、唐娉研究员、杨晓梅博士、郑柯副研究员、王寿沛副教授、吕晓华副教授等同志的关心和帮助!中国科学院科学出版基金委员会的同志对本书的出版给予了大力支持和帮助,在此也一并向他们表示最诚挚的谢意。

本书同时也得到了国家自然科学基金项目(40271095)、国家 973 项目(G2000077904)和国家 863 高技术计划海洋监测技术主题课题(2001AA633010)联合资助。

由于本人水平有限,错漏之处在所难免,恳请读者批评指正!

任留成

2002 年 7 月于北京

目 录

序

前 言

第一章 绪论	(1)
第一节 空间投影的发展与现状	(2)
第二节 地图投影学科性质的演变	(3)
第二章 空间投影基本理论	(6)
第一节 空间地图投影的一般概念	(6)
第二节 长度变形和面积变形	(7)
第三节 角度变形	(9)
第四节 空间地图投影分类	(14)
第五节 利用算子微分研究投影变形理论	(16)
第三章 空间方位投影	(25)
第一节 现有摄影像片的几种数学模型研究	(25)
第二节 椭球的倾斜像面空间透视投影正反解变换	(29)
第三节 空间斜方位投影公式	(34)
第四节 动态空间正图像透视投影正反解	(40)
第四章 空间圆柱投影	(46)
第一节 空间墨卡托投影	(46)
第二节 空间高斯-克吕格(横轴椭圆柱)投影	(54)
第三节 等角空间投影	(63)
第四节 卫星地面轨迹投影	(72)
第五章 空间斜墨卡托投影	(85)
第一节 空间斜墨卡托投影模型原始构想	(85)
第二节 空间斜墨卡托投影数学模型 I	(87)
第三节 空间斜墨卡托投影数学模型 II	(97)
第四节 空间斜墨卡托投影与等角空间投影之间的分析比较	(109)
第五节 三轴椭球的空间斜墨卡托投影	(115)
第六章 空间斜圆锥投影	(133)
第一节 空间斜圆锥投影的几何原理	(133)
第二节 侧视区域中心线轨迹投影	(134)
第三节 空间斜圆锥投影公式	(138)
第四节 反解变换	(141)
第五节 投影变形	(141)

第六节	应用举例	(143)
第七章	空间投影在遥感图像处理中的应用	(146)
第一节	卫星图像投影性质分析	(146)
第二节	图像投影变换	(149)
第三节	空间投影在 TM 图像几何精纠正中的应用	(152)
第四节	空间投影在 SPOT 图像几何精纠正中的应用	(158)
第五节	空间投影在 SAR 图像几何精纠正中的应用	(162)
第六节	利用空间投影对地物目标进行精确定位	(166)
第八章	空间投影在遥感图像制图中的应用	(170)
第一节	空间投影作为卫星图像的数学基础	(170)
第二节	利用分带投影方法研究卫星图像的连轨问题	(172)
第三节	利用二面投影原理研究单张像片的连续制图问题	(176)
第四节	空间投影与常用地图投影之间的转换	(178)
第五节	空间投影的制图应用	(182)
参考文献		(189)

第一章 绪 论

人造地球卫星的上天,开创了空间科学研究和技术应用的新局面,从此,人们可以从外层空间来探索和测绘地球及其他星球,测绘技术开始进入空间(航天)测绘阶段。卫星遥感图像数据的大量涌现,不仅为地图制图提供了丰富的资料来源,而且促使了卫星遥感制图的不断发展,与之相应地还开辟了地图投影的一个崭新研究领域——空间投影(Space Projection)。卫星遥感制图所要研究的投影变换问题基本包括两个方面:一是要解决由星载探测器获得的地理信息用什么投影方式记录在图像平面上,形成人们所需的影像地图或地形图,显然重点是为空间卫星摄影或扫描图像寻找和设计适宜的投影方案,这部分称为“空间投影建立”;二是将遥感图像转换成常规的地图投影(即把图像已有的投影方式变换成新编地图产品方式或影像产品所选用的地图投影),其重点在于解决投影变换的方法,这部分称为“图像投影变换”。

卫星遥感图像包括瞬间静态摄影图像(如框幅式图像等)、沿星下点周围扫描图像(如TM、SPOT图像等)以及侧视雷达(SAR)图像等等,这些图像是地球表面缩小的表象,表现了地面的客观现实,信息量非常丰富,在农业区划、国土整治、自然资源调查和地理考察等方面起着非常大的作用,特别是对缺少地形图或地形图现势性较差的地区,可用这些卫星影像进行某些内容的判读和分析,进而获得某些信息的定量指标。但是,卫星影像不能代替地形图,因为卫星影像属地面的中心投影,像点位置将受像片倾斜、地面起伏、地球旋转和弯曲以及透视压缩等因素的影响而有所偏移,像片比例尺也不一致,而且利用遥感图像也只能看到不足地球二分之一的部分,要想利用卫星图像看到地球的全貌,必须考虑卫星图像的连续制图问题。因此,开展卫星遥感图像制图问题的研究很有理论意义和实用价值。

卫星遥感制图是一种动态的制图过程,是卫星遥感研究和应用不可缺少的部分,在现代空间测绘技术应用中起着日趋重要的作用。卫星遥感制图可以分为遥感图像数据制图处理和遥感图像数据制图应用两个部分。遥感图像数据制图处理主要是研究遥感图像数据的辐射校正、几何纠正、图像增强、图像分类等方法,以及对地图要素的分析、识别、提取等手段,其中的几何纠正部分主要是消除或限制图像的各种几何误差和进行必要的图像投影变换,以满足规定比例尺的制图精度要求。

每一张地图都有其相应的地图投影作为其数学基础,日趋广泛的卫星图像制图也必将建立适合自身特点的空间投影作为数学基础。因此,建立卫星图像的数学基础是卫星遥感制图亟待解决的科学问题。

卫星图像的数学基础包括几何控制基础和适合卫星图像的空间投影系统。空间投影是适合于各类动态传感器构像的一种地图投影系统,它顾及了地球形状、卫星运动、地球自转、轨道进动等因素对点位的影响,时间 t 成为投影的参数,是四维空间的地图投影;空间投影是在对卫星遥感图像数据粗制处理的基础上,采用解析法建立的一种区别于传统地图投影的全新的动态投影。空间投影系统能使同一飞行轨道的带状图像处于统一坐标

系内, 适宜于卫星图像的连续制图。

空间投影是空间制图的数学基础, 是卫星遥感制图形成和发展不可缺少的重要组成部分, 对其进行深入的研究是今后空间制图的一个重要发展方向, 这也必将推动空间测绘事业的快速发展。

我国已于 1999 年发射了多用途资源卫星 (CBERS-1), 还将要发射一系列资源卫星和多用途军事应用卫星, 对这些卫星图像数据的应用处理和制图是摆在我们面前的首要任务, 因此, 建立与之相应的数学基础具有非常重要的科学意义和现实意义。

第一节 空间投影的发展与现状

人造地球卫星首次发射迄今已有 40 多年, 但与之相适应的空间地图投影的研究和发展还处于起步阶段。空间投影是近代新兴的数学制图学研究领域, 既没有完善的理论体系, 也没有足够的、适合于各类卫星图像制图应用的空间投影。

关于空间投影的研究是从单张航天像片理论研究开始的, 如框幅式像片等属整幅图像都在同一瞬间曝光形成, 是瞬间静态摄影, 这些图像适合用传统的透视投影或方位投影来描述。在空间斜圆柱投影出现之前, 卫星图像的数学基础只有单张航天像片理论, 原苏联科学家布加耶夫斯基等的专著《单张航天像片理论》(布加耶夫斯基、波尔特诺夫, 1984), 比较系统地总结了前人的成果, 详细阐述了单张航天像片的理论和投影方法, 论述了将摄影像片和非摄影像片变换为给定的地图投影的问题、像片量测的数学处理问题以及从单张像片上向地图传递地物信息的问题, 该书涉及单张航天像片的几何方面的理论主要包括: 像片投影、各类坐标系统的关系、定向元素、像片比例尺、地面和像面角度的关系、几何变形等等, 该书可以说是单张航天像片的权威著作。此外, 美国、中国和澳大利亚等国的科学家对单张航天像片理论也有很多研究, 1981 年美国的 J P Snyder 教授发表了《地球的透视投影》(Snyder, 1981a), 为模拟航天像片提出了地球透视投影的三角方程, 研究了单张倾斜像面的航天像片的构像模型; 1990 年澳大利亚的 R E Deakin 发表了“地球的倾斜像面透视投影”(Deakin, 1990), 针对 Snyder 的问题提出了利用矢量方法导出单张像片的投影公式的技巧; 1996 年埃及的 W N Hanna 发表了“旋转椭球的垂直透视投影”(Hanna, 1996), 研究了单张像片正负图像的地图坐标解析式。我国的科研工作者对单张航天像片理论的研究取得了一些进展, 时晓燕、胡毓钜教授于 1994 年发表了“倾斜相机式投影的几何解法及其与外心投影的比较”(时晓燕、胡毓钜, 1994), 该文根据透视投影的基本原理, 给出了关于倾斜相机式投影的几何解法, 在此基础上分析了倾斜相机式投影与外心投影的异同, 提出了二者比较的一致性条件。另外还有很多学者在这方面做了不少工作, 这里不再一一赘述。

单张航天像片投影作为空间方位投影也是空间投影的一种。

对单张航天像片投影公式进行分析研究表明(布加耶夫斯基、波尔特诺夫, 1984): 当投影点远离中心点时, 其长度局部比例尺将显著加大且变化迅速, 投影变形值甚至大于其他投影(如高斯-克吕格投影)的几倍或几十倍。因此, 仅研究单张航天像片投影理论并不能满足卫星遥感制图的要求。

为满足卫星遥感动态监测图的需要, 美国地质测量局的科学家 Alden P Colvocoresses

于 1974 年在 *PE & RS* 上发表了“SOM 投影——一种适用于 Landsat 卫星图像应用的新型地图投影”(Colvocoresses, 1974)一文,首次提出空间投影概念,从此,地图投影学又开辟了一个新的研究领域——空间投影。Colvocoresses 描述了 SOM 投影的几何模型,但并未推导其相应的数学公式,他建议制图工作者致力于研究其数学模型及编程计算,并指出数学问题是这项研究中最重要的问题,而且断言空间投影有可能发展成为自动制图系统不可缺少的一部分,在该系统中可使像素分别与地球上的位置相联系。直到 1977 年,才由 Junkins 和 Snyder 两位科学家各自独立的推导出了 SOM 投影公式。Junkins 的投影公式通用性强,可应用于非圆形轨道,但是公式较复杂,也不等角;Snyder 的投影公式简单,且近似等角投影,适用于(陆地卫星)圆形轨道。美国 20 世纪 80 年代已将 SOM 投影系统用于卫星 MSS 图像的连续制图。

我国在空间投影的理论和应用研究方面也取得了一定进展,杨启和教授以及解放军测绘学院制图系投影组的同志们在“七五”期间就对 SOM 投影模型进行了较深入的研究和实验(杨启和,1989),程阳同志于 1991 年在《测绘学报》上发表了论文“论等角空间投影”(程阳,1991),提出了一种严格的等角空间投影,他把此结果进行加工整理,于 1996 年在 *Cartography & Geographic Information Systems* 上发表了论文 *The Conformal Space Projection* (Yang Cheng, 1996)。此外,吕晓华同志 1991 年研究了“空间投影在 SPOT 卫星图像几何校正中的应用”¹⁾,对杭州地区的 SPOT 1A 级图像进行处理,得到了严密的数学基础和较高的点位精度。赵琪博士研究了空间割圆柱投影²⁾。作者在攻读博士学位期间对空间投影理论做了较深入的研究,完善了空间投影的系统理论³⁾,在中科院遥感所做博士后期间对空间投影的应用方面做了一些有意义的探讨⁴⁾。

总之,空间投影的理论研究刚刚起步,尚没形成完备的理论体系,对空间投影的应用研究更是处在萌芽状态,空间投影研究在卫星遥感图像处理与制图、空间地理信息定位系统以及“数字地球”等方面大有潜力可寻。

第二节 地图投影学科性质的演变

随着卫星遥感制图和制图自动化的迅速发展,古老的地图投影学科已不能适应现代测绘工程的需求,接踵而来的便是空间投影,它弥补了静态地图投影的不足,从而使“地图投影”这一早期术语的内涵得以不断的丰富和发展。

大约公元前 640 年至今,地图投影的发展已经经历了 2000 多年的历史,纵观这一漫长的历史时期,可以将地图投影大致划分为静态地图投影和动态地图投影两个阶段(吴忠性、杨启和,1989)。以往的地图投影是基于静止的条件,地球、透视中心(假如有一个)和投影平面相互间的关系是完全固定的,投影关系是地球经纬度或直角坐标与地图坐标之间的关系。静态地图投影学从最初简单的几个投影,发展至今已经成为一门比较完善、独

1) 吕晓华. 1991. 空间投影在 SPOT 卫星图像几何校正中的应用研究. 硕士论文

2) 赵琪. 1999. 基于多源空间信息的定位模型研究. 博士论文

3) 任留成. 1999. 空间投影理论及其应用研究. 博士论文

4) 任留成. 2002. 空间投影在遥感图像处理中的应用研究. 博士后出站报告

立和系统的数学制图学学科,所探求的地图投影也已基本满足地图制图学的需求。

伴随着航天图像的出现,地图投影也从静态转向动态。从 1974 年 Colvocoresses 教授提出空间投影概念开始,以空间地图投影为主导的空间数学制图学迅速崛起,地图投影学科性质也发生了新的变化,具体体现在以下几个方面:

1) 从简单的几何透视方法发展到数值方法和抽象数学方法

地图投影这一术语,来源于它在早期发展阶段用几何透视方法将地球表面上的经纬线投影于平面。随着科学技术的发展,简单地用几何透视方法已远远不能满足编制各种类型地图的需要,于是数学分析方法在地图投影学中得到了广泛的运用。空间投影的出现,使得投影模型的建立更为复杂,高等数学方法已不能满足空间投影建模的需要,从而抽象数学方法(比如算子方法等)逐渐运用到地图投影学中。由于数值方法和抽象数学方法的介入,探求地图投影的方法更加丰富多彩,地图投影学从理论到应用都得到长足的发展。

2) 从地面发展到空间

地图投影从以往的地面投影逐渐从地球发展到月球和其他行星,现在已经有月球地形图、月球地质图和火星一览图等影像图。因为利用宇航技术获取的地理信息是从空间用动态的方法得到的,因此设计投影方案时有必要考虑时间参数,选择地图投影最好采用空间投影,特别是对控制点极少的海洋区域进行测图时,利用空间投影是最恰当的投影选择。

3) 从静态发展到动态

传统的地图投影都是静止条件下的地球到地图平面的几何映射,但卫星图像是在时间 t 变化过程中所获取的地球(或星球)影像,为卫星图像设计地图投影应当考虑动态因素,因此地图投影研究和教学开始从单纯的静态投影转向静态和动态投影共同发展。由于空间投影是一种动态投影,时间变量成了投影参数,使得地图投影从三维投影发展到四维投影。

4) 从单学科发展到多学科相互渗透、相互交叉

地图投影学即数学制图学,是地图学与基础数学相结合的产物。空间地图投影的兴起,又使地图学与现代数学、物理学、天体力学、电磁学、航天摄影测量以及卫星遥感技术等多学科相互综合,形成一门交叉学科。

5) 从主框架发展到辅助坐标网

常规的地图投影是作为一种地图框架,随后在里面填绘专题要素。轨道卫星上连续扫描记录装置的研制,在某种意义上推翻了这一概念。例如陆地卫星(Landsat)上的扫描装置,以数字方式连续记录图像数据,在将其制成影像地图之前需要进行一系列几何校正和相应的图像投影变换。经过几何校正的影像,是以带有扫描仪、轨道航天器和地球三者相对运动特征的空间斜圆柱投影作为数学基础的(A H 罗宾逊等,1989),也就是说,专题

要素获取在先,空间斜圆柱投影作为辅助坐标网在后。

6) 坐标表示形式从地心系发展到多种坐标系并用

静态投影主要采用相对地球静止的地心直角坐标系和极坐标系,空间投影不仅采用地心直角坐标系和极坐标系,而且还经常采用天体坐标系以及随卫星运动而变动的活动标架等多种坐标系。

7) 地图投影变换从传统的人工方法发展到机助自动变换

传统的人工投影变换方法是將地图资料经过照相、晒蓝,然后拼贴在按新投影展好的经纬线网上。自计算机应用到制图领域,原始资料图的投影变为新编地图的投影可通过计算机自动实现,遥感图像信息作为新的地图资料信息源,信息量丰富而且复杂,图像投影变换只能借助计算机来实现。

纵观现代测绘,如何把遥感图像处理技术与地图自动化技术紧密地结合在一起,用以生产更多、更新颖的地图产品,则是卫星遥感制图的发展方向和目标,也是地图投影研究发展的趋势。

第二章 空间投影基本理论

空间投影与传统的静态地图投影不同,是专门为遥感图像而设计的动态地图投影,时间 t 是其投影参数,静态地图投影的理论就不适宜于空间投影,空间投影也应该有自己相应的系统理论。本章着重讨论空间投影基本理论,建立空间投影较为完善的理论体系。主要研究内容包括:空间投影的长度比、面积比、方位角变形和最大角度变形公式;对空间投影进行分类;找出空间投影的等角、等面积和等距离条件;利用算子微分研究空间地图投影变形理论等。

第一节 空间地图投影的一般概念

卫星摄影或扫描成像是一种动态过程,整幅图像是由传感器逐点或逐行(列)扫描成像构成。卫星图像的形成与卫星沿轨道的飞行、地球的弯曲和转动、卫星轨道面的进动等因素有关,这些因素对成像的影响不可避免地要使遥感影像产生扭曲变形。有些影响可以通过卫星轨道设计加以解决,有些影响可经地面站处理,而有些影响与图像投影选择有着十分密切的关系。空间地图投影所要考虑的,主要是卫星和地球的双重运动及其对制图的影响。由于卫星在空间运动,其位置 (X, Y, Z) 是时间 t 的函数,因此时间 t 就成了动态测图的一个参数。

如果静态地图投影公式为

$$x = \bar{f}_1(\phi, \lambda), \quad y = \bar{f}_2(\phi, \lambda) \quad (2.1.1)$$

则空间地图投影公式应为

$$x = f_1(\phi, \lambda, t), \quad y = f_2(\phi, \lambda, t) \quad (2.1.2)$$

其中经纬度 ϕ, λ 及时间 t 都是投影变量。

如果写成直角坐标的形式,则空间投影公式为

$$x = f_1(X, Y, Z, t), \quad y = f_2(X, Y, Z, t) \quad (2.1.3)$$

这是一种四维空间与二维平面之间的一一对应映射,函数 f_1, f_2 取决于不同的投影限制条件,在制图区域内函数必须保持为单值连续有界。

若(2.1.2)式中的 $\lambda = l_1 = \text{常数}$,则经差为 l_1 的经线动态投影方程式为

$$x = f_1(\phi, l_1, t), \quad y = f_2(\phi, l_1, t) \quad (2.1.4)$$

若令 $\phi = \phi_1 = \text{常数}$,则(2.1.2)式变成纬度为 ϕ_1 的动态纬线投影方程式,即

$$x = f_1(\phi_1, \lambda, t), \quad y = f_2(\phi_1, \lambda, t) \quad (2.1.5)$$

从(2.1.2)式中消去纬度 ϕ ,得

$$F_1(x, y, \lambda, t) = 0$$

这就是经线族动态投影方程。参数 λ 为不同时,可得到不同的经线方程。

从(2.1.2)式中消去经差 λ ,得

$$F_2(x, y, \phi, t) = 0 \quad (2.1.6)$$

这就是纬线族动态投影方程。参数 ϕ 为不同时, 可得到不同的纬线方程。

将(2.1.2)式进行反解, 则得到用 x, y, t 表达 ϕ, λ 的反解方程式为

$$\phi = \varphi_1(x, y, t), \quad \lambda = \varphi_2(x, y, t) \quad (2.1.7)$$

第二节 长度变形和面积变形

同静态地图投影一样, 空间投影也不可避免地存在投影变形问题, 一般包括长度变形、面积变形和角度变形。本节利用微分几何方法研究空间投影的长度和面积变形条件。

一、长度比

如图 2.2.1 所示, 设投影面上有一无穷小线段 $A'C' = ds'$, 相应于原面上一无穷小线段 $AC = ds$, 它们的比率称为长度比, 用符号 μ 表示有

$$\mu = \frac{ds'}{ds} \quad (2.2.1)$$

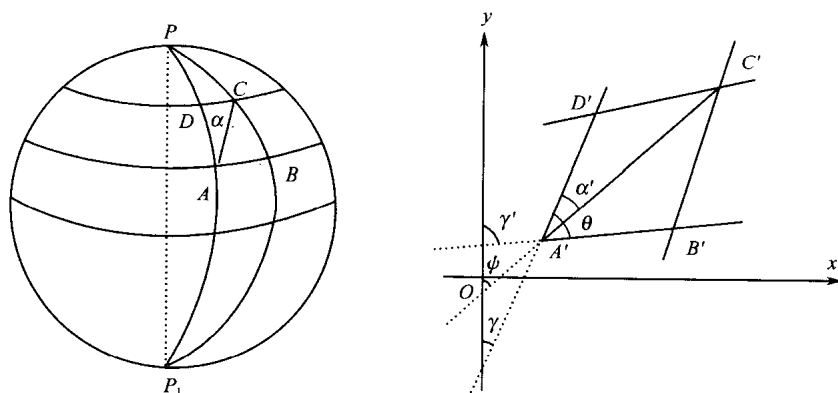


图 2.2.1 球面线段投影到平面

长度比与 1 之差称为长度相对变形, 即

$$v = \frac{ds' - ds}{ds} = \mu - 1 \quad (2.2.2)$$

在(2.2.1)式中 ds' 是平面曲线的弧素, 即

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.2.3)$$

根据(2.1.2)式, 得

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial t} dt \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

把(2.2.4)式代入(2.2.3)式得

$$(ds')^2 = E_1(d\phi)^2 + E_2(d\lambda)^2 + E_3(dt)^2 + 2F_1 d\phi d\lambda + 2F_2 d\phi dt + 2F_3 d\lambda dt \quad (2.2.5)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2, & E_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \\ E_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2, & F_1 &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ F_2 &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial t}, & F_3 &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

因为

$$(ds)^2 = M^2(d\phi)^2 + r^2(d\lambda)^2$$

其中 M 和 r 分别为子午圈曲率半径和纬度为 ϕ 的纬线圈半径, 即

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\phi)^{3/2}}$$

$$r = N\cos\phi = \frac{a\cos\phi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}$$

则由(2.2.1)式知

$$\left(\frac{ds'}{ds} \right)^2 = \frac{E_1(d\phi)^2 + E_2(d\lambda)^2 + E_3(dt)^2}{M^2(d\phi)^2 + r^2(d\lambda)^2} + \frac{2F_1(d\phi)(d\lambda) + 2F_2d\phi dt + 2F_3d\lambda dt}{M^2(d\phi)^2 + r^2(d\lambda)^2} \quad (2.2.7)$$

当 $d\lambda = 0$ 时, 子午线变形比为

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{E_1(d\phi)^2 + E_3(dt)^2 + 2F_2(d\phi dt)}{M^2(d\phi)^2} \\ &= \frac{E_1 + E_3(dt/d\phi)^2 + 2F_2(dt/d\phi)}{M^2} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

当 $d\phi = 0$ 时, 纬线变形比为

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{E_2(d\lambda)^2 + E_3(dt)^2 + 2F_3(d\lambda dt)}{r^2(d\lambda)^2} \\ &= \frac{E_2 + E_3(dt/d\lambda)^2 + 2F_3(dt/d\lambda)}{r^2} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

由此可见, 当投影与时间 t 无关时,

$$m = \frac{\sqrt{E_1}}{M}, \quad n = \frac{\sqrt{E_2}}{r}$$

这与静态地图投影长度变形公式完全一致。

二、面 积 比

如图 2.2.1 所示, 地球椭球面上无穷小球面梯形 $ABCD$ 可看成微小矩形。经纬线微分弧长分别为

$$AD = M d\phi, \quad AB = r d\lambda$$

球面梯形面积用 dF 表示, 则有

$$dF = AD \cdot AB = Mr d\phi d\lambda \quad (2.2.10)$$

在投影平面上对应无穷小面积 $A'B'C'D'$ 可以看作是一微小的平行四边形, 其边长为

$$\begin{aligned}
A'D' &= \sqrt{(x_\phi d\phi + x_t dt)^2 + (y_\phi d\phi + y_t dt)^2} \\
&= \sqrt{E_1 \phi_t^2 + 2F_2 \phi_t^2 + E_3 dt} = mMd\phi \\
A'B' &= \sqrt{(x_\lambda d\lambda + x_t dt)^2 + (y_\lambda d\lambda + y_t dt)^2} \\
&= \sqrt{E_2 \lambda_t^2 + 2F_3 \lambda_t + E_3 dt} = nr d\lambda
\end{aligned}$$

假设投影后经纬线 $A'B'$ 与 $A'D'$ 的夹角为 θ , 四边形 $A'B'C'D'$ 的面积用 dF' 表示, 则有

$$dF' = A'D' \cdot A'B' \sin\theta = mnMr \sin\theta d\phi d\lambda \quad (2.2.11)$$

微分面积 dF' 与曲面面素 dF 的比率称为面积比, 用符号 P 表示, 于是得到面积比计算公式为

$$P = \frac{dF'}{dF} = mn \sin\theta \quad (2.2.12)$$

面积比与 1 之差称为面积相对变形, 即

$$\nu_p = P - 1 \quad (2.2.13)$$

第三节 角度变形

一、经纬线夹角变形公式

如图 2.2.1 所示, 投影平面上线素 ds' 与 x 轴正向构成角 ψ , 则有

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{(\partial y/\partial\phi)d\phi + (\partial y/\partial\lambda)d\lambda + (\partial y/\partial t)dt}{(\partial x/\partial\phi)d\phi + (\partial x/\partial\lambda)d\lambda + (\partial x/\partial t)dt} \quad (2.3.1)$$

当 $d\lambda=0$ (即 λ = 常数) 时得经线投影后与 x 轴的夹角 γ

$$\tan\gamma = \frac{(\partial y/\partial\phi)d\phi + (\partial y/\partial t)dt}{(\partial x/\partial\phi)d\phi + (\partial x/\partial t)dt} \quad (2.3.2)$$

当 $d\phi=0$ (即 ϕ = 常数) 时得纬线投影后与 x 轴的夹角 γ'

$$\tan\gamma' = \frac{(\partial y/\partial\lambda)d\lambda + (\partial y/\partial t)dt}{(\partial x/\partial\lambda)d\lambda + (\partial x/\partial t)dt} \quad (2.3.3)$$

所以投影后经纬线夹角为

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \tan(\gamma - \gamma') = \frac{\tan\gamma - \tan\gamma'}{1 + \tan\gamma' \tan\gamma} \\
&= \frac{H_1(d\phi/dt)(d\lambda/dt) + H_2(d\phi/dt) + H_3(d\lambda/dt)}{F_1(d\phi/dt)(d\lambda/dt) + F_2(d\phi/dt) + F_3(d\lambda/dt) + E_3} \\
&= \frac{H_1 + H_2(dt/d\lambda) + H_3(dt/d\phi)}{F_1 + F_2(dt/d\lambda) + F_3(dt/d\phi) + E_3(dt/d\phi)(dt/d\lambda)} \quad (2.3.4)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\partial x}{\partial\lambda} \frac{\partial y}{\partial\phi} - \frac{\partial x}{\partial\phi} \frac{\partial y}{\partial\lambda} \\
H_2 &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial\phi} - \frac{\partial x}{\partial\phi} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$