高等学校教材

高等数学

Gaodeng shuxue

（上册）

宋柏生　罗庆来 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高 等 数 学

上　　册

宋柏生　罗庆来　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据原国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》,并结合东南大学多年教学改革实践经验编写而成的教材。书中适当加强了极限理论;介绍了凸函数、一致连续、一致收敛等内容;将不定积分与定积分有机结合,淡化了不定积分的计算技巧;加强了数学思想方法的阐述,增加了建立数学模型和应用的内容,有利于学生应用数学分析和解决问题能力的提高。

本书分上、下两册,上册内容为极限与连续、导数与微分、一元函数积分学、微分方程、极限续论,并在附录中介绍了双曲函数、映射、实数连续性、闭区间上连续函数的有关定理及性质。书后附有习题答案。

本书可供高等工业院校各专业使用,也可供自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/宋柏生,罗庆来主编.—北京:高等教育出版社,2001.6(2002重印)
高等学校教材
ISBN 7-04-009306-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①宋…②罗… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第01279号

高等数学 上册
宋柏生 罗庆来 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	中国青年出版社印刷厂		

开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2001年6月第1版
印　　张	19.5	印　　次	2002年5月第2次印刷
字　　数	470 000	定　　价	16.70元

前　　言

本教材是根据原国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，并结合东南大学高等数学课程多年教学改革实践而编写的。本书在保证基本要求的前提下，适当增加了部分理论性内容，如确界公理、Cauchy 收敛准则、函数序列一致收敛性及凸函数等；将不定积分与定积分结合，淡化不定积分的计算技巧；加强对于处理工程技术问题有较大意义的向量工具的应用，以向量形式讲解多元函数微积分的有关内容；集中介绍微积分中常用的近似计算方法，增强近似计算的思想；例题与习题中增加了一些应用题，以培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。我们希望能使工科学生在逻辑推理能力、抽象思维能力和建立数学模型能力等方面有所加强，在数学素质上有所提高。

全书共 11 章，分上、下两册。上册内容包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、极限续论等 5 章及 1 个附录；下册内容包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、多元函数的积分、向量场的积分、微积分中的近似计算等 6 章。

本书第 1,5,9,10,11 章及附录由罗庆来编写，第 2 章由毛惠良编写，第 3 章由周后型编写，第 4,6 章由董梅芳编写，第 7,8 章由宋柏生编写。全书由宋柏生、罗庆来负责统稿。

本书在编写过程中，得到了我校从事高等数学教学的老师、校教材建设委员会及教务处的大力支持和帮助，在此我们表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2000 年 8 月

目　　录

第 1 章　极限与连续

在中学里我们已经学习过函数，研究了函数概念，函数的几种重要属性，几种常见函数（幂函数、三角函数与反三角函数、指数函数、对数函数）的性态等问题。然而，对于给定的函数，除了研究变量之间的依赖关系外，更重要的是要研究自变量按某种方式变化时，相应的因变量将按怎样的方式变化，有没有确定的变化趋势。弄清楚这种变化趋势，往往就掌握了变化过程的重要特征，找到了解决问题的方法。这种对变量变化趋势的描述，形成了微积分中一个极其重要的概念——极限。微积分中许多重要的概念都与极限有关。

§1.1　两个实例

例 1　我国魏晋时期的数学家刘徽利用“割圆术”试图从圆内接正多边形出发来计算半径等于单位长度的圆的面积。他从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，直觉地意识到边数越多，内接正多边形的面积越接近于圆的面积。他曾正确地计算出圆内接正 3 072 边形的面积，从而得到单位圆面积的近似值 3.14.

刘徽的思想就是用一串内接正多边形去“逼近”圆，当内接正多边形的边数无限增加时，这一串内接正多边形的面积无限接近于圆的面积.

若以 A 表示半径为 R 的圆的面积，A_n 表示内接正 $6\cdot 2^{n-1}$ 边形的面积，则有

$$A \approx A_n = 6\cdot 2^{n-1}\cdot \frac{1}{2}R^2\cdot \sin\frac{2\pi}{6\cdot 2^{n-1}},$$

当 n 无限增大时，A_n 无限接近于常数 πR^2. 但是，对于任意确定的 n，不论它有多大，A_n 都是圆面积的近似值，而不是圆的面积. 只有在 n 无限增大时，A_n 无限接近的那个数 πR^2 才是圆的面积.

例 2　自由落体运动 $s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ 在第 2 秒末的瞬时速度.

我们知道，自由落体运动不是等速运动，其速度是随时间而变化的，即在不同的时刻速度一般是不同的. 但根据物理意义，在一个很短的时间间隔里，速度随时间的变化不大，因此可以用该时间间隔中的平均速度近似代替其中任一时刻的瞬时速度. 时间间隔越短，则近似程度越好，时间间隔无限变短而趋向于零时，则可以认为平均速度就无限接近于瞬时速度. 根据以上的想法，我们得到求第 2 秒末的瞬时速度的步骤：首先求落体在时间间隔 $[2,t]$ 内的平均速度

$$\begin{aligned}\bar{v}(t) &= \frac{s(t)-s(2)}{t-2}\\ &= \frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g\cdot 2^2}{t-2} = \frac{1}{2}g(t+2).\end{aligned}$$

其次，具体给 t 以一批数值，根据上式算出 $\bar{v}(t)$ 的值列表如下：

t	2.1	2.01	2.001	2.000 1	2.000 01	…
$\bar{v}(t)$	$2.05g$	$2.005g$	$2.000\,5g$	$2.000\,05g$	$2.000\,005g$	…

将(1)式和上表结合起来可以看出，当 t 无限接近于 2 时，平均速度 $\bar{v}(t)$ 无限接近于常数 $2g$，因此 $2g$ 就应当是落体在第 2 秒末的瞬时速度.

与例 1 类似，同样需要注意的是，对于任意固定的 t，不论它多么接近于 2，平均速度 $\bar{v}(t)$ 只是第 2 秒末速度的近似值，而不是第 2 秒末的速度. 只有当 t 无限接近于 2 时，平均速度 $\bar{v}(t)$ 无限接近的那个数 $2g$，才是第 2 秒末的速度.

上面两个例子虽然是不同类型的问题，但其中的因变量 A_n 与 $\bar{v}(t)$ 都具有共同的特点，就是在自变量的某个变化过程中，因变量有一个确定的变化趋势. 前者当 n 无限变大时，内接正多边形面积 A_n 无限接近于常数 πR^2；后者当 t 无限接近于 2 时，平均速度 $\bar{v}(t)$ 无限接近于常数 $2g$. 所谓变量的极限问题，就是研究在自变量的某个变化过程中因变量的变化趋势问题.

下面分别对数列极限和函数极限进行研究.

§1.2　数 列 极 限

1.2.1　数列极限概念

所谓数列 $\{x_n\}$ 就是按正整数顺序排列的一列数：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

其中 x_n 称为数列的**通项**或**一般项**，x_n 中的 n 称为下标. 当然，数列 $\{x_n\}$ 也可以视为定义在正整数集上的一个函数：

$$f(n) = x_n, n \in \mathbf{N}_+,$$

例如 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$\{q^n\}$，$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$，$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$，$\left\{6\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\frac{2\pi}{6\cdot 2^{n-1}}\right\}$ 等都是数列.

容易看出，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 与 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$，当 n 越来越大无限变大时，通项 x_n 越来越接近无限接近于数 0. 现以数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 为例，说明如何用数学语言来表达所谓“当 n 越来越大无限变大时，通项 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 越来越接近无限接近于数 0”.

显然，“$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 越来越接近无限接近于数 0”是指 $|x_n - 0| = \frac{1}{n}$ 越来越小无限变小. 当我们给一个很小的正数 $\frac{1}{10}$ 时，只要下标 $n > 10$，就有 $|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10}$，即从数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的第 10 项 $x_{10} = \frac{1}{10}$ 以后的所有项 $x_{11}, x_{12}, \cdots$ 都满足这个不等式. 换句话说，对 $\frac{1}{10}$，存在自然数 10，当 $n > 10$ 时，有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \frac{1}{10}.$$

若给一个更小的正数$\frac{1}{1\ 000}$,显然,只要 $n > 1\ 000$,就有$\left|x_n - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{1\ 000}$,即从数列的第 1 000 项$\frac{1}{1\ 000}$以后的所有项 $x_{1\ 001}, x_{1\ 002}, \cdots$ 都能满足这个不等式.换句话说,对$\frac{1}{1\ 000}$存在自然数 1 000,当 $n > 1\ 000$ 时,有 $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \frac{1}{1\ 000}$.

当我们给定一个任意的无论多么小的正数 ε 时,都存在一个正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$①,当 $n > N$ 时,$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$,即从数列的第 N 项以后的所有项 $x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 都满足这个不等式.

综上所述,所谓"当 n 越来越大无限变大时,数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的通项$\frac{(-1)^n}{n}$越来越接近无限接近数 0"的定量描述应是:

对任意给定的无论多么小的正数 ε,总存在正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,恒有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

对于许多数列,都存在当下标 n 无限变大时,数列的通项无限接近某个常数的现象,这就需要用数学语言来精确地描述这种现象,由此引出了数列极限的概念.

定义 1 设$\{x_n\}$为一数列,a 为一定数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立,则称数列$\{x_n\}$以 a 为**极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{或 } x_n \to a(n \to \infty),$$

此时又称$\{x_n\}$**收敛**于 a.如果数列$\{x_n\}$没有极限,则称该数列**发散**.

由定义可知,数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$以 0 为极限,即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

为了今后的需要,我们引入邻域的概念和两个最常用的逻辑符号 $\forall$ 和 $\exists$.

设 δ 是一个正数,称集合$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$为点 x_0 的一个 δ **邻域**,记为 $N(x_0, \delta)$.几何上,它表示一个以点 x_0 为中心,长度为2δ的开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.而称集合$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$为点 x_0 的一个**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{N}(x_0, \delta)$,它是两个开区间的并集:

$$\mathring{N}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

今后,当不需要指明正数 δ 的具体数值时,常将邻域或去心邻域记成 $N(x_0)$ 或 $\mathring{N}(x_0)$.

逻辑符号"$\forall$"表示"任意给定"或"任取".例如 $\forall \varepsilon > 0$ 表示任意给定一个正数 ε 或任意取一个正数 ε;

① $[x]$表示不超过 x 的最大整数.对任意实数 x,都有$[x] \leqslant x < [x] + 1$.

逻辑符号“$\exists$”表示“存在”,“至少存在一个”. 例如 $\exists N \in \mathbf{N}_+$ 表示存在正整数 N.

数列极限的定义 1 通常称为数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义,可以用逻辑符号表示为:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$,当 $n > N$ 时 $\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

由于不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 表示点 a 的 ε 邻域,所以数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的几何意义是:对于点 a 的任意 ε 邻域 $N(a,\varepsilon)$,总存在一个项号 N,使得数列 $\{x_n\}$ 中自第 $N+1$ 项开始的一切项都落入点 a 的 ε 邻域 $N(a,\varepsilon)$ 内(图 1.1).

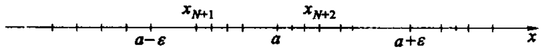

图 1.1

例 1 用定义1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$.

证 若 $q = 0$,则 $q^n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$, $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = 1$,当 $n > N$ 时,有 $|q^n - 0| < \varepsilon$. 设 $0 < |q| < 1$, $\forall \varepsilon > 0$,要使 $|q^n - 0| < \varepsilon$,即要 $|q|^n < \varepsilon$,为此只要 $n\lg|q| < \lg\varepsilon$. 不妨设 $0 < \varepsilon < 1$,由于 $\lg|q| < 0$,所以只要 $n > \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$. 故取 $N = \left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$,则当 $n > N$ 时,便有

$$|q^n - 0| < \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0 < |q| < 1).$$

综上证明,当 $|q| < 1$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

例 2 用定义1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.

证 只证 $a > 1$ 的情形. $\forall \varepsilon > 0$,要使 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$,只要 $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$,即只要 $\dfrac{1}{n}\lg a < \lg(1+\varepsilon)$,即 $n > \dfrac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}$,所以只要取 $N = \left[\dfrac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$,则当 $n > N$ 时,便有

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

例 3 用定义1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} = \dfrac{3}{2}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$,由于

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{4\sqrt{n}-2} \leqslant \frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}} < \frac{5}{\sqrt{n}},$$

所以,只要取 $N = \left[\dfrac{25}{\varepsilon^2}\right]$,则当 $n > N$ 时,便有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}.$$

在数列极限的定义 1 中,正数 ε 是任意给定的,但一旦给出后,它就是确定的了.正整数 N 是由不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 的需要而确定的,因此它依赖于 ε,但是当 ε 给定后,N 并不是唯一的,正因为如此,在证明过程中,我们只要能找到一个这样的 N 就可以了,而不必介意它的大小.

在例 3 中,为了较方便地求出 N,我们将 $|x_n-a|$ 适当放大,使 $|x_n-a|<y_n$,再解不等式 $y_n<\varepsilon$,此例中 $y_n=\frac{5}{\sqrt{n}}$.需要注意的是,适当放大后的 y_n 一要比较简单,二要 $y_n\to 0(n\to\infty)$.

在数列极限的定义中,如果把"任意"改为它的相反意义"某个",将"$<$"改为它的相反意义"$\geqslant$",则得数列 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限的叙述,即

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a\Leftrightarrow\exists$ 某个 $\varepsilon_0>0$,对任意正整数 N,存在某个 $n_0>N$,有

$$|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

例 4 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

证 只要证明任意实数 a 都不是数列 $\{(-1)^n\}$ 的极限.

取 $\varepsilon_0=1$,若 $a\geqslant 0$,则 $\forall N,\exists$ 奇数 $n_0>N\Rightarrow$

$$|(-1)^{n_0}-a|=|-1-a|=|1+a|\geqslant 1=\varepsilon_0;$$

若 $a<0$,则 $\forall N,\exists$ 偶数 $n_0>N\Rightarrow$

$$|(-1)^{n_0}-a|=|1-a|>1=\varepsilon_0,$$

因此 $\{(-1)^n\}$ 发散.

习　题　一

1. 回答下列问题,并说明理由:

(1) $\forall\varepsilon\in(0,1),\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$,是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\sqrt{\varepsilon}\left(\text{或 }2\varepsilon,\text{或}\frac{\varepsilon}{3}\right)$,是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?

(3) 对任意正整数 k,总存在正整数 N_k,当 $n>N_k$ 时,$|x_n-a|<\frac{1}{k}$,是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?

(4) 对任意 $\varepsilon>0$,总存在无穷多个 x_n,使 $|x_n-a|<\varepsilon$,是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?

(5) 对于任意正整数 k,只有有限多个 x_n 位于区间 $\left(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k}\right)$ 之外,是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?

2. 用定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{3n+1}=\frac{4}{3}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{7-12n}=-\frac{1}{2}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

3. 用定义证明:

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$，反之是否成立？

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，由此你能得出什么结论？

(3) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则对任一正整数 k，$\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

4. 用定义证明：若 $x_n > 0(n = 1,2,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a \geqslant 0$，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

5. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$.

6. 利用关系式

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \cdots + h^n,$$

证明：

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0(a > 1)$；　　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^n} = 0(a > 1)$.

1.2.2 数列极限的性质

性质 1(唯一性)　若 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一.

证　用反证法. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim_{n\to\infty} x_n = b$，$a \neq b$. 取 $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$，因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，所以存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，有

$$|x_n - a| < \frac{|b-a|}{2}.$$

同样，因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = b$，所以存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，有

$$|x_n - b| < \frac{|b-a|}{2}.$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，上面两个不等式同时成立，因而

$$|a-b| \leqslant |a-x_n| + |x_n - b| < \frac{|b-a|}{2} + \frac{|b-a|}{2} = |b-a|,$$

这个矛盾说明，收敛数列的极限是唯一的.

性质 2(有界性)　若 $\{x_n\}$ 收敛，则它必有界，即 $\exists M > 0$，使得 $|x_n| \leqslant M$，$n \in \mathbf{N}_+$.

证　设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 由定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$，特别取 $\varepsilon = 1$，则有

$$|x_n| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a| \qquad (n > N).$$

取 $M = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|)$，则有

$$|x_n| \leqslant M \qquad (n \in \mathbf{N}_+).$$

性质 2 表明，收敛数列一定有界，但有界数列却不一定收敛，例如，数列 $\{(-1)^n\}$ 有界，但发散.

性质 3(保序性)　若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim_{n\to\infty} y_n = b$，且 $a < b$，则存在正整数 N，$n > N \Rightarrow x_n < y_n$.

证　因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{b-a}{2}$，则

$$\exists N_1, n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$

即

$$a-\frac{b-a}{2}<x_n<a+\frac{b-a}{2}=\frac{b+a}{2}.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,对$\epsilon_0=\dfrac{b-a}{2}$,则

$$\exists N_2, n>N_2 \Rightarrow |y_n-b|<\frac{b-a}{2},$$

即

$$\frac{b+a}{2}=b-\frac{b-a}{2}<y_n<b+\frac{b-a}{2}.$$

取$N=\max(N_1,N_2)$.则当$n>N$时,有

$$x_n<\frac{b+a}{2}<y_n.$$

推论 1 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,且$x_n\leqslant y_n$,则$a\leqslant b$.

推论 2 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a<b$(或$a>b$),则存在正整数$N$,$n>N\Rightarrow x_n<b$(或$x_n>b$).特别,当$b=0$时,有$x_n<0(n>N)$(或$x_n>0,n>N$).这一性质常称为极限的**保号性**.推论 1 和推论 2 的证明留给读者作为练习.

1.2.3 数列极限的运算法则

直接由极限的定义去证明或计算极限往往是不方便的,甚至是不可行的.本段讨论的极限运算法则提供了计算或证明极限的基本方法.

定理 1 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$;

(特别,$\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n=ca$($c$为常数))

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$.

证 只证明(1)和(2),(3)的证明留给读者.

(1) $|(x_n\pm y_n)-(a\pm b)|=|(x_n-a)\pm(y_n-b)|$

$$\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,所以由极限定义,$\forall\varepsilon>0$,$\exists$ 自然数N_1,N_2,

当 $n>N_1$时,$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

当 $n>N_2$时,$|y_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取$N=\max(N_1,N_2)$,则当$n>N$时,

$$|(x_n\pm y_n)-(a\pm b)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b.$$

(2) 首先,由收敛数列必有界,知 $\exists M > 0$,使得

$$|x_n| \leqslant M \quad (n \in \mathbf{N}_+).$$

其次,由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ 知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2$,使得当 $n > N_1$ 时,有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}.$$

当 $n > N_2$ 时,有

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$,则当 $n > N$ 时,有

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |(x_n y_n - x_n b) + (x_n b - ab)| \\ &\leqslant |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4n - 1}$.

解 将分式的分子与分母同用 n^2 除之,再由定理 1 得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{3 + 4\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{2}{3}.$$

一般地,当 k, m 为自然数,且 $k \leqslant m$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, k = m, \\ 0, k < m, \end{cases}$$

其中 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$(留作习题).

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$.

解 因为 $\dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{1}{6}\left(2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$,

所以由定理 1 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \dfrac{1}{3}$.

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

解 因为 $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

定理 2(夹逼定理) 设有三个数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$.若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,n\in\mathbf{N}_+$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则
$$\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,所以$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,N_2$,

当$n>N_1$时,$|x_n-a|<\varepsilon$,从而$a-\varepsilon<x_n$;

当$n>N_2$时,$|z_n-a|<\varepsilon$,从而$z_n<a+\varepsilon$.

取$N=\max(N_1,N_2)$,则当$n>N$时,同时有
$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n,a-\varepsilon<x_n,\text{与 }z_n<a+\varepsilon.$$
于是,当$n>N$时,$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$.

所以
$$\lim_{n\to\infty}y_n=a.$$

夹逼定理在肯定$\{y_n\}$收敛的同时也给出了其极限值,在实际应用时,若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$不易求出,则要将$y_n$适当的放大、缩小,得出两个具有相同极限的辅助数列$\{x_n\}$,$\{z_n\}$,即可求出$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

例 8 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2})$.

解 因为$\forall n\in\mathbf{N}_+$,有
$$0\leqslant(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2})=\frac{3}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}}<\frac{3}{\sqrt{n+2}}<\frac{3}{\sqrt{n}}.$$
而 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}=0$,所以由夹逼定理得
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2})=0.$$

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 因为$(3^n)^{\frac{1}{n}}<(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$,

即
$$3<(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<3\cdot 2^{\frac{1}{n}}.$$
而$\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$(例 2),所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

例 10 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 令$x_n=\sqrt[n]{n}-1$,则$x_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,于是由二项式定理得
$$\begin{aligned}n=(1+x_n)^n&=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2!}x_n^2+\cdots+x_n^n\\&>\frac{n(n-1)}{2!}x_n^2.\end{aligned}$$
当$n>2$时,有
$$0\leqslant x_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}},$$
从而
$$1\leqslant\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$,因此由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

1.2.4 单调有界原理

上一段我们利用一些数列的收敛性和其极限讨论了另一些数列的收敛性并求出其极限,本段研究能否由数列本身的性态去判断其收敛性?

设 $\{x_n\}$ 为一数列,若 $x_n<x_{n+1}$(或 $x_n>x_{n+1}$),$n\in\mathbf{N}_+$,则称 $\{x_n\}$ **单调增加(或单调减少)**,若 $x_n\leqslant x_{n+1}$(或 $x_n\geqslant x_{n+1}$),$n\in\mathbf{N}_+$,则称 $\{x_n\}$ **单调不减(或单调不增)**.

单调增加(不减)和单调减少(不增)的数列统称为**单调数列**.

如果数列 $\{x_n\}$ 单调增加有上界,即 $x_n<x_{n+1}$ 且 $x_n\leqslant M(n=1,2,\cdots)$,则在数轴上点 x_n 随着 n 的增大不断向右方移动,但不能越过一个界限.我们猜想,随着 n 的无限增大,这些点必然无限趋近于某个点 a,即 $\{x_n\}$ 收敛于数 a(图 1.2).

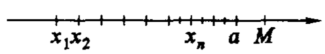

图 1.2

定理 3(单调有界原理) 单调有界数列必有极限,即

(1) 若 $\{x_n\}$ 单调不减且有上界,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 必存在;

(2) 若 $\{x_n\}$ 单调不增且有下界,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 必存在.

定理的证明放在第五章极限续论中.

例 11 设 $a>0$,$x_1=\sqrt{a}$,$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$,$\cdots$,$x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个根号}}$,$\cdots$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求其极限.

证 由 x_n 的定义可知 $x_n>0$,且 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\quad(n\in\mathbf{N}_+)$.

现用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调增加有上界.

首先,$x_1<x_2$.设 $x_{k-1}<x_k$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}>\sqrt{a+x_{k-1}}=x_k,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加.

其次,$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$.设 $x_k<\sqrt{a}+1$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1.$$

所以 $\{x_n\}$ 有上界.由单调有界原理,数列 $\{x_n\}$ 收敛.设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,由 $x_{n+1}^2=a+x_n$ 得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}^2=a+\lim_{n\to\infty}x_n,$$

即

$$b^2=a+b,$$

解此关于 b 的二次方程,得 $b=\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4a})$,

由极限的保号性知 b 不能为负数,故 $b=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$.

例 12 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$,首先证明 $\{x_n\}$ 单调增加.由二项式展开公式可得