张量及其在连续介质力学中的应用

黄 义 张引科 编著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2002

内容提要

本书系统介绍了张量及其在连续介质力学中的应用。内容包括张量和张量代数，二阶张量，张量分析，张量函数及其导数，连续介质力学理论的张量表述和壳体的张量理论。

本书可以作为理工科研究生和相关专业本科生的教材，也可供有关专业教师和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

张量及其在连续介质力学中的应用/黄义等编著．北京:冶金工业出版社,2002.8

ISBN 7-5024-3047-4

Ⅰ.张… Ⅱ.黄… Ⅲ.张量—应用—连续介质力学 Ⅳ.O33

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第049933号

出版人 曹胜利(北京沙滩嵩祝院北巷39号,邮编100009)

责任编辑 方茹娟 美术编辑 王耀光 责任校对 侯 瑂 责任印制 李玉山

北京兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2002年8月第1版,2002年8月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32; 7.5印张; 198千字; 230页; 1-2000册

20.00元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街46号(100711) 电话:(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前　　言

物质运动是在时空中进行的。要用数学方法描述物质运动,必须在空间建立坐标系。坐标系的引入,使这种描述成为可能,但同时也给描述物质运动规律的方程带来影响,这就是描述同一运动规律的方程在不同坐标系中的形式不同。这种形式上的差异严重阻碍了人们对运动规律本质的理解。张量理论体系的建立,把坐标系对描述运动规律方程形式的影响减小到了最低程度,这就是张量方程的协变性。

自从相对论理论创立以来,张量在理论研究领域的作用越来越突出。连续介质理论使用张量以后也有了重大发展。当前,张量理论已广泛应用于连续介质力学的各个领域,以至于不具备张量知识,就无法学习连续介质力学基本理论和阅读相关专业的文献资料。因此,张量理论已经成为理工科研究生必须掌握的基础知识。

本书内容分两部分。一部分介绍张量基础知识,内容有张量代数、二阶张量、张量分析和张量函数及其导数;另一部分叙述连续介质力学的张量理论,包括应力张量、连续介质运动的张量描述、连续介质力学的基本规律和壳体变形的张量理论。书中内容以介绍张量理论的具体内容和 应用为主,不求理论的高深,主要目的是使读者在学习张量理论的同时掌握张量使用方法。只要读者具备了矢量代数和矢量分析方面的知识,就能很容易地学习书中内容。

本书是在总结作者长期教学和科研过程中使用张量理论经验的基础上编写而成的。书中内容虽然已经经过仔细推证和教学试用,但难免还存在不妥之处,敬请读者批评指正。

在编写本书过程中,得到西安建筑科技大学各级领导的关心和支持,特此感谢。

编著者

2002 年 4 月

目　　录

1 张量和张量代数

在这一章里，首先把大家熟悉的向量运算用张量标记方法表示，以便逐步习惯张量的指标运算。接着叙述向量空间的度量关系及向量空间基的变换规律。在此基础上学习张量概念和张量的代数运算规则。最后，简单介绍曲线坐标系、张量场、张量密度和两点张量等。

1.1 三维 Euclidean 空间矢量

[三维 Euclidean 空间] 设 V 为实数域 R 上的三维矢量空间，如果对于任意两个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$，都有一个称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 标量积（点积，数性积）的实数 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in R$ 和一个称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 矢量积（叉积，向量积）的矢量 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \in V$，并且满足

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(2) $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{c} \in V; \alpha, \beta \in R)$

(3) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geqslant 0; \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$，当且仅当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(4) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(5) $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{c} \in V; \alpha, \beta \in R)$

(6) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$

(7) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \qquad (1.1.1)$

则称 V 为三维 Euclidean 空间，记为 E^3。

若两非零矢量的标量积为零，则称两矢量正交。若两非零矢量的矢量积是零矢量，则两矢量平行。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模（大小，绝对值，范数）$|\boldsymbol{a}|$ 定义为

$$|\boldsymbol{a}| = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})^{\frac{1}{2}} \qquad (\boldsymbol{a} \in E^3) \qquad (1.1.2)$$

在 E^3 中，过一点 O 的任意三条不共面并赋予单位尺度的直

线组成直线坐标系。这三条直线称为坐标轴，点 O 称为坐标原点。平行于坐标轴的一切直线都称为坐标线。过一点的任意两条坐标线所确定的平面称为坐标面。对于直线坐标系，如果三条坐标轴上的单位尺度不同，则称为仿射坐标系；如果单位尺度相同，则称为 Cartesian 坐标系。如果 Cartesian 坐标系的坐标轴互相垂直，则称为 Cartesian 直角坐标系，否则称为 Cartesian 斜角坐标系。显然，Cartesian 直角坐标系是 Cartesian 斜角坐标系的特殊情形；Cartesian 坐标系又是仿射坐标系的特例。

1.1.1 Cartesian 直角坐标系下的矢量运算、Kronecker 符号和置换符号

在 E^3 中建立右手 Cartesian 直角坐标系 $\{O-x^i\}(i=1,2,3)$，沿坐标轴 Ox^i 的单位尺度矢量分别是 $\boldsymbol{i}_i(i=1,2,3)$。由于 $\boldsymbol{i}_i$ 是单位正交矢量，它们的标量积满足

$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_3=1$$

$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_1=0$$

即

$$\boldsymbol{i}_i\cdot\boldsymbol{i}_j=\delta_{ij} \tag{1.1.3}$$

式中，δ_{ij}是 Kronecker(克罗内克)符号。Kronecker 符号定义为

$$\delta_{ij}=\delta^{ij}=\delta_j^i=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{1.1.4}$$

矩阵

$$[\delta_{ij}]=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[I] \tag{1.1.5}$$

是单位矩阵。

单位尺度矢量 $\boldsymbol{i}_i(i=1,2,3)$的矢量积是

$$\boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_2 = -(\boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_1) = \boldsymbol{i}_3$$
$$\boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3 = -(\boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_2) = \boldsymbol{i}_1$$
$$\boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_1 = -(\boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_3) = \boldsymbol{i}_2$$
$$\boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_3 = 0$$

即

$$\boldsymbol{i}_i \times \boldsymbol{i}_j = e_{ijk}\boldsymbol{i}_k \quad (i,j,k \text{ 按 } 1,2,3 \text{ 循环取值}) \tag{1.1.6}$$

式中,e_{ijk}是置换符号(Ricci 符号,Levi-Civita 符号)。置换符号定义为

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \boldsymbol{i}_i \cdot (\boldsymbol{i}_j \times \boldsymbol{i}_k) = \begin{cases} 1 & (ijk \text{ 为顺序排列(偶置换)}) \\ -1 & (ijk \text{ 为逆序排列(奇置换)}) \\ 0 & (ijk \text{ 为非序排列}) \end{cases} \tag{1.1.7}$$

指标 ijk 的原始排列顺序为 123。如果将排列中的任意一对相邻指标互换,则称为指标的一次置换,例如 123 经一次置换就成为 132 或 213。如果再互换一对指标,就称为二次置换。……,依次类推可以定义指标排列的 n 次置换。当 n 为奇数时,称为奇置换,而 n 为偶数时,称为偶置换。由原始排列 123 开始,经过偶置换得到的三种指标序列 123,231 和 312 称为顺序排列。它们都是原始序列的顺序轮换。而由原始排列 123 经过奇置换得到的三种指标序列 321,213 和 132 称为逆序排列。顺序排列和逆序排列统称为排列。凡是不能由原始序列 123 经置换得到的指标序列,如 111,112,121,…等等,也就是两个或三个指标相同时,称为非序排列。三个指标 ijk 共有 27 种排列,其中非序排列共有 21 种。对于指标取值为 $1,2,\cdots,m$ 的一般情况,仍然可以用与式(1.1.7)类似的方法来定义置换符号。

置换符号有两个重要性质:

(1) e_{ijk}或e^{ijk}对于 i,j,k 中的任意两个指标均为反对称。

(2) 若 $b(i,j,k)$对于 i,j,k 中的任意两个指标均为反对称,

则必定有

$$b(i,j,k) = be_{ijk} \qquad (b \text{ 为常数})$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 标量积的分量表示是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3)\cdot(b_1\boldsymbol{i}_1 + b_2\boldsymbol{i}_2 + b_3\boldsymbol{i}_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

为了简化公式的书写形式，引入 Einstein(爱因斯坦)求和约定：若某指标符号在表达式的一项中出现两次，则表示这一项关于该指标符号在指标符号取值范围内求和。根据求和约定，上式表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_i\boldsymbol{i}_i)\cdot(b_j\boldsymbol{i}_j) = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i \tag{1.1.8}$$

两矢量的标量积等于两矢量长度与它们之间夹角余弦的乘积。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积是

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_i\boldsymbol{i}_i)\times(b_j\boldsymbol{i}_j) = a_ib_j(\boldsymbol{i}_i\times\boldsymbol{i}_j) = e_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{i}_k \tag{1.1.9}$$

矢量 $\boldsymbol{c}$ 的分量为

$$c_k = e_{ijk}a_ib_j \tag{1.1.10}$$

式(1.1.10)中的重复指标符号 i 和 j 为求和指标。求和指标 i 和 j 也称为哑指标，哑指标可以用其他指标符号代换。不重复指标 k 称为自由指标，自由指标取其变化范围内的每个值时表达式都成立。式(1.1.10)等价于

$$\begin{aligned}c_1 &= a_2b_3 - a_3b_2 \\ c_2 &= a_3b_1 - a_1b_3 \\ c_3 &= a_1b_2 - a_2b_1\end{aligned}$$

两矢量矢量积的大小等于两矢量长度与两矢量之间夹角正弦的乘积，也等于以这两个矢量为邻边的平行四边形面积。

矢量的混合积是

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = e_{ijk}a_ib_jc_k \tag{1.1.11}$$

三个矢量混合积的大小等于以这三个矢量为共点棱的平行六面体体积。若矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成右手系,则混合积$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$为正。若矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成左手系,则混合积$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$为负。当三个非零矢量的混合积等于零时,说明这三个矢量共面,则三个矢量线性相关。

矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的二重矢量积为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1.1.12}$$

三个矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 两两点积构成的行列式等于三个矢量形成的平行六面体体积的平方,即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]^2 \tag{1.1.13}$$

证明:原式左边等于

$$\begin{vmatrix} a_ia_i & a_ib_i & a_ic_i \\ b_ia_i & b_ib_i & b_ic_i \\ c_ia_i & c_ib_i & c_ic_i \end{vmatrix}=\left|\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\right|\left|\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\right|$$

$$=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]^2$$

用同样的方法可以证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}' & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}' & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}' \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}' & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}' & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}' \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}' & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}' & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}' \end{vmatrix}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}][\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{c}'] \tag{1.1.14}$$

式中,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}'$,$\boldsymbol{b}'$,$\boldsymbol{c}'$为六个任意矢量。

应用求和约定和 Kronecker 符号的定义式(1.1.4)可以推导出关系式

$$\delta^{ii}=\delta_{ii}=\delta_i^i=3 \qquad \delta_j^ia_i=a_j \quad (i,j=1,2,3)$$

下面介绍置换符号的几个应用实例。

1.1.1.1 展开三阶行列式

$$a=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}=\frac{1}{3!}e_{ijk}e^{lmn}a_l^ia_m^ja_n^k \tag{1.1.15}$$

$$A_j^i=\frac{1}{2!}e^{ikl}e_{jmn}a_k^ma_l^n \tag{1.1.16}$$

式中,A_j^i 为行列式元素 a_i^j 的代数余子式。

证明:先证明式(1.1.15)。

$$\begin{aligned}a &= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}\\
&= a_1^1a_2^2a_3^3+a_2^1a_3^2a_1^3+a_3^1a_1^2a_2^3-a_1^1a_3^2a_2^3-a_2^1a_1^2a_3^3\\
&\quad -a_3^1a_2^2a_1^3\\
&= e^{lmn}a_l^1a_m^2a_n^3\\
&= a_1^1a_2^2a_3^3+a_1^2a_2^3a_3^1+a_1^3a_2^1a_3^2-a_1^1a_2^3a_3^2-a_1^2a_2^1a_3^3\\
&\quad -a_1^3a_2^2a_3^1\\
&= a_1^ia_2^ja_3^ke_{ijk}\end{aligned}$$

如果在 $a_1^ia_2^ja_3^ke_{ijk}$ 中对下标作任意置换,如 $a_2^ia_1^ja_3^ke_{ijk}$,就相当于把行列式的两列互换,行列的值为 $-a=e_{213}a$,再置换一次又改变一次符号,结果回到了 $+a=e_{231}a$。这个规律可以写成

$$e_{lmn}a=e_{ijk}a_l^ia_m^ja_n^k$$

同理

$$e^{ijk}a=e^{lmn}a_l^ia_m^ja_n^k$$

由于

$$e_{lmn}e^{lmn}=3!$$

所以

$$3!a=ae_{lmn}e^{lmn}=e_{ijk}e^{lmn}a_l^ia_m^ja_n^k$$

即式(1.1.15)成立。

现在证明式(1.1.16):行列式按第 q 列展开是

$$a = a_{\underline{q}}^{p} A_{p}^{\underline{q}}$$

指标下面加横线表示对这个重复指标不求和。所以

$$\begin{aligned}
A_{p}^{q} &= \frac{\partial a}{\partial a_{q}^{p}} \\
&= \frac{\partial}{\partial a_{q}^{p}}\left(\frac{1}{3!} e_{ijk} e^{lmn} a_{l}^{i} a_{m}^{j} a_{n}^{k}\right) \\
&= \frac{1}{3!} e_{ijk} e^{lmn} \left(\delta^{ip} \delta_{lq} a_{m}^{j} a_{n}^{k} + \delta^{jp} \delta_{mq} a_{l}^{i} a_{n}^{k} + \delta^{kp} \delta_{nq} a_{l}^{i} a_{m}^{j} \right) \\
&= \frac{1}{3!} \left(e_{pjk} e^{qmn} a_{m}^{j} a_{n}^{k} + e_{ipk} e^{lqn} a_{l}^{i} a_{n}^{k} + e_{ijp} e^{lmq} a_{l}^{i} a_{m}^{i} \right) \\
&= \frac{1}{2!} e_{pjk} e^{qmn} a_{m}^{j} a_{n}^{k}
\end{aligned}$$

在推导过程中对哑指标符号作了代换。

1.1.1.2 置换符号与 Kronecker 符号的关系

$$e_{lmn} e^{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{l}^{i} & \delta_{m}^{i} & \delta_{n}^{i} \\ \delta_{l}^{j} & \delta_{m}^{j} & \delta_{n}^{j} \\ \delta_{l}^{k} & \delta_{m}^{k} & \delta_{n}^{k} \end{vmatrix} \tag{1.1.17}$$

证明:直接可以验证

$$e^{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1}^{i} & \delta_{2}^{i} & \delta_{3}^{i} \\ \delta_{1}^{j} & \delta_{2}^{j} & \delta_{3}^{j} \\ \delta_{1}^{k} & \delta_{2}^{k} & \delta_{3}^{k} \end{vmatrix}$$

$$e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{l}^{1} & \delta_{m}^{1} & \delta_{n}^{1} \\ \delta_{l}^{2} & \delta_{m}^{2} & \delta_{n}^{2} \\ \delta_{l}^{3} & \delta_{m}^{3} & \delta_{n}^{3} \end{vmatrix}$$

因此

$$e^{ijk} e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{1}^{i} & \delta_{2}^{i} & \delta_{3}^{i} \\ \delta_{1}^{j} & \delta_{2}^{j} & \delta_{3}^{j} \\ \delta_{1}^{k} & \delta_{2}^{k} & \delta_{3}^{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{l}^{1} & \delta_{m}^{1} & \delta_{n}^{1} \\ \delta_{l}^{2} & \delta_{m}^{2} & \delta_{n}^{2} \\ \delta_{l}^{3} & \delta_{m}^{3} & \delta_{n}^{3} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} \delta^i_p\delta^p_l & \delta^i_p\delta^p_m & \delta^i_p\delta^p_n \\ \delta^j_p\delta^p_l & \delta^j_p\delta^p_m & \delta^j_p\delta^p_n \\ \delta^k_p\delta^p_l & \delta^k_p\delta^p_m & \delta^k_p\delta^p_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^j_l & \delta^j_m & \delta^j_n \\ \delta^k_l & \delta^k_m & \delta^k_n \end{vmatrix}
$$

式(1.1.17)得证。

式(1.1.17)的推论为

$$
e^{ijk}e_{lmk} = \delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l \tag{1.1.18}
$$

$$
e^{ijk}e_{ljk} = 2\delta^i_l \tag{1.1.19}
$$

$$
e^{ijk}e_{ijk} = 3! \tag{1.1.20}
$$

证明:从式(1.1.17)有

$$
e_{lmk}e^{ijk} = \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m & \delta^i_k \\ \delta^j_l & \delta^j_m & \delta^j_k \\ \delta^k_l & \delta^k_m & \delta^k_k \end{vmatrix}
$$

$$
= \delta^i_k \begin{vmatrix} \delta^j_l & \delta^j_m \\ \delta^k_l & \delta^k_m \end{vmatrix} - \delta^j_k \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m \\ \delta^k_l & \delta^k_m \end{vmatrix} + \delta^k_k \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m \\ \delta^j_l & \delta^j_m \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \delta^j_l & \delta^j_m \\ \delta^i_l & \delta^i_m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m \\ \delta^j_l & \delta^j_m \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m \\ \delta^j_l & \delta^j_m \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m \\ \delta^j_l & \delta^j_m \end{vmatrix} = \delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l
$$

因此式(1.1.18)成立。在式(1.1.18)中令指标 $m=j$ 就能得到式(1.1.19)。再在式(1.1.19)中令指标 $l=i$ 就是式(1.1.20)。有时定义广义 Kronecker 符号为

$$
\delta^{ijk}_{lmn} = e_{lmn}e^{ijk}
$$

$$
\delta^{ij}_{lm} = \delta^{ijk}_{lmk} = e_{lmk}e^{ijk} = \delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l
$$

1.1.1.3 证明矢量运算公式

在 Cartesian 直角坐标系中 Hamilton(哈密顿)算符是

$$
\nabla = \boldsymbol{i}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.1.21}
$$

标量函数的梯度是

$$\nabla \phi = \boldsymbol{i}_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \boldsymbol{i}_i \phi_{,i} \tag{1.1.22}$$

矢量函数的散度和旋度分别是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot (a_j \boldsymbol{i}_j) = \frac{\partial a_i}{\partial x^i} = a_{i,i} \tag{1.1.23}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \times (a_j \boldsymbol{i}_j) = e^{ijk} a_{j,i} \boldsymbol{i}_k \tag{1.1.24}$$

其中,$(\quad)_{,i} = \dfrac{\partial(\quad)}{\partial x^i}$。

作为例子现证明二重矢量积公式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

证明:令

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

则

$$\begin{aligned} d_i &= e_{ijk} a_j (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_k = e_{ijk} e_{klm} a_j b_l c_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m = b_i (a_m c_m) - c_i (a_l b_l) \\ &= b_i (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - c_i (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

二维空间的置换符号可以看作三维空间置换符号的简化。事实上,二维空间是三维空间的子空间。故可在二维空间外加上第三个坐标构成三维空间,并使第三个坐标 方向上的单位基矢量 $\boldsymbol{i}_3$ 垂直于二维空间基矢 $\boldsymbol{i}_\alpha(\alpha = 1,2)$。在二维情况下,置换符号的每一个不为零的分量 e_{ijk} 中指标之一必等于 3。总可以通过置换使 $k = 3$,于是 i 和 j 就限制在 1 和 2 之中。因此可以引入二维置换符号如下

$$e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta 3} \tag{1.1.25}$$

显然

$$e_{11} = e_{22} = 0$$

$$e_{12} = -e_{21} = 1$$

并且

$$e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$$

$$e_{\alpha\beta}e_{\alpha\delta} = \delta_{\beta\delta}$$

$$e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = 2!$$

$$\det[a_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{2!} e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} \tag{1.1.26}$$

1.1.2 仿射坐标系下矢量的两种分量表示和行列式张量

在 E^3 中建立仿射坐标系 $\{O - x^i\}$ $(i = 1,2,3)$，沿坐标轴 Ox^i 的仿射矢量基是 $\boldsymbol{e}_i$。在仿射坐标系中，参照于仿射基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 表示成

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i \tag{1.1.27}$$

其模的平方是

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}|^2 &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = (a^i\boldsymbol{e}_i)\cdot(a^j\boldsymbol{e}_j) \\ &= a^i a^j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) = g_{ij}a^i a^j \end{aligned} \tag{1.1.28}$$

式中

$$g_{ij} = g_{ji} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.29}$$

称为协变度量张量，它反映了空间的度量特性。这里先使用“张量”概念，后面将给出定义。协变度量张量的行列式为

$$g = \det[g_{ij}] = \det[\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j] = [\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]^2 \tag{1.1.30}$$

证明：

$$\begin{aligned} g &= \det[g_{ij}] = \det[\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j] = \det[(e_{ik}\boldsymbol{i}_k)\cdot(e_{jl}\boldsymbol{i}_l)] \\ &= \det[e_{ik}e_{jk}] = \det[[e_{ik}][e_{lj}]^{\mathrm{T}}] = [\det(e_{ik})]^2 \\ &= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}^2 = [\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)]^2 \end{aligned}$$

这里 $e_{ij} = \vec{e}_i\cdot\vec{i}_j$，$\{\vec{i}_i\}$ 是标准正交基，g 等于以三个基矢量为棱的平

行六面体体积的平方。

[相伴基(对偶基)]设$\{e_i\}$是E^3中的仿射基,若仿射基$\{e^i\}$满足

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j \tag{1.1.31}$$

则这两组基$\{e_i\}$和$\{e^i\}$互为相伴基(对偶基)。

可见,基矢量e_i与基矢量$e^j(j \neq i)$正交,并且e_i与基矢量e^i之间的夹角为锐角。通常把$\{e_i\}$称为协变基,$\{e^i\}$称为逆变基。

定理(1.1) 当把矢量写成在一组基下的分解式时,它的坐标(分量)等于该矢量与该组基的相伴基的标量积。即

若
$$\boldsymbol{a} = a^i e_i = a_i e^i \tag{1.1.32}$$

则

$$a^i = e^i \cdot \boldsymbol{a} \qquad a_i = e_i \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.1.33}$$

证明:
$$e^i \cdot \boldsymbol{a} = e^i \cdot (a^j e_j) = a^j \delta_j^i = a^i$$

$$e_i \cdot \boldsymbol{a} = e_i \cdot (a_j e^j) = a_j \delta_i^j = a_i$$

用协变基$\{e_i\}$把逆变基$\{e^i\}$展开。设

$$e^i = g^{ij} e_j \tag{1.1.34}$$

则

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \tag{1.1.35}$$

$$g^{ik} = g^{ki} = \frac{[g_{ik}\text{的代数余子式}]}{g} \tag{1.1.36}$$

$$g^* = \det(g^{ik}) = \frac{1}{g} \tag{1.1.37}$$

证明:把式(1.1.34)代入式(1.1.31),有

$$\delta_j^i = e^i \cdot e_j = (g^{ik} e_k) \cdot e_j = g^{ik} g_{kj}$$

此即式(1.1.35)。显然,矩阵$[g^{ij}]$是矩阵$[g_{ij}]$的逆矩阵,因而可得式(1.1.36)。对式(1.1.35)两边取行列式就能推导出式(1.1.37)。g^{ij}称为逆变度量张量,它与基$\{e^i\}$的关系是