CAILIAO LIXUE

JIBEN XUNLIAN

材料力学基本训练

钱民刚　张　英　主编

科学出版社
www.sciencep.com

材料力学基本训练

钱民刚　张　英　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书以国家教委对材料力学教学基本要求的内容为主，共十三章，每章均分为“基本内容与基本要求”、“典型例题与解题方法”、“课外训练习题”三部分。其例题与习题均从近期国内外优秀教材中精选，可使读者达到举一反三的目的。

本书主要是为普通工科高等院校学生做课外练习或准备考研复习而编写的，也可作为夜大、电大、职大等学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学基本训练/钱民刚，张英主编. —北京：科学出版社，2003
ISBN 7-03-011257-1

Ⅰ. 材… Ⅱ. ①钱…②张… Ⅲ. 材料力学-高等学校-习题
Ⅳ. TB301-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 015397 号

责任编辑：刘剑波 沈 建 /责任校对：柏连海
责任印制：刘士平 /封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年5月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2003年5月第一次印刷 印张：17
印数：1—6 000 字数：331 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

材料力学是土木工程、机械、交通、航空等工科各专业的一门十分重要的技术基础课。它不仅是专业课程的基础，同时还在工程实际中有着广泛的应用。因此，学好材料力学这门课程，对于工科院校的学生以及有关的工程技术人员来说是很重要的。材料力学研究问题和解决问题的方法有着独有的特点。为了使读者学好材料力学，搞清基本概念，掌握基本理论和基本方法，我们特编写了这本课外辅导教材，其目的是通过归纳和总结该课程的基本内容、基本理论以及基本方法，同时精选典型例题分析并详解，加深读者对基本概念的理解，加强对基本理论和基本技能的掌握，提高分析问题和解决问题的能力。

本书以国家教委的材料力学教学基本要求的内容为主，除概论外，共分为十三章。每章均分为“基本内容及基本要求”、“典型例题与解题方法”和“课外训练习题”三部分。“基本内容及基本要求”包括“内容提要”、“基本要求”、“重点难点”以及“基本公式(包括基本公式、基本方法等)”四个方面，它对复习和总结所学内容、把握重点难点有一定的帮助。“典型例题与解题方法”则精选了各类有代表性的典型习题并给出了解题思路、方法和步骤以及解题过程，有的还附有难点说明或一题多解。通过这部分内容的学习，可以提高读者的分析、解题及应用能力，从而达到举一反三的目的。“课外训练习题”部分精选了包括问答题、选择题、填空题、计算题和证明题在内的各种类型的习题，既反映了教学基本要求的水平，又突出了概念性和综合性，某些带有“*”号的习题可供教学要求较高或学有余力的读者参考。本书的例题和习题主要选自近期国内外较优秀的教材、习题集以及部分院校的考试试题，习题难度以中等和中等偏上水平为主，各章习题均附有答案。

本书主要是为普通工科高等院校学生做课外练习或准备考研复习而编写的，也可作为夜大、电大、职大等学生的参考书。

参加本书编写的有：钱民刚(概论、第三章和第九章)、唐晓雯(第一章和第二章)、王立忠(第四章和第七章)、张英(第五章和第八章)、郝莉(第六章和第十一章)、石萍(第十章)、赵燕湘(第十二章和第十三章)。钱民刚和张英担任主编，负责全书的统稿与修改，以及具体的组织、联系、协调工作。

由于我们的水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬望读者批评和指正。

编　者

2002 年 11 月

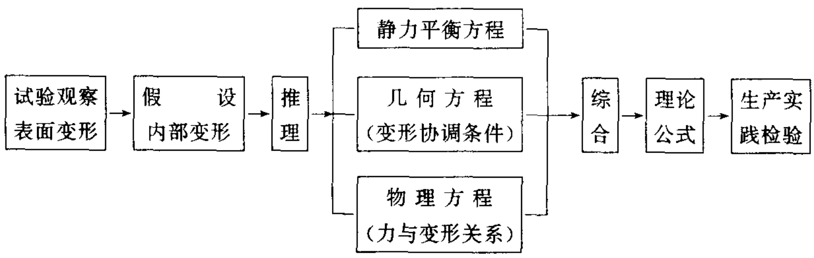
目　　录

概　　论

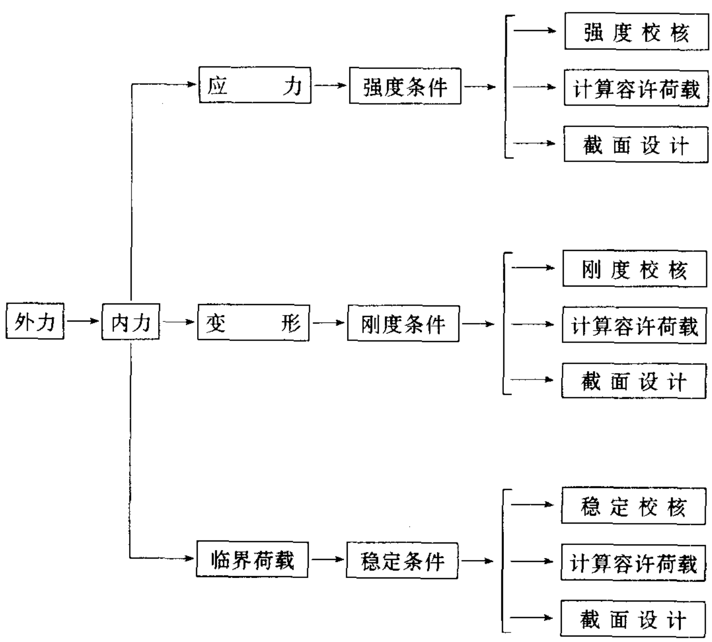
材料力学是研究各种类型构件(主要是杆)的强度、刚度和稳定性的学科,它提供了有关的基本理论、计算方法和试验技术,使我们能合理地确定构件的材料、尺寸和形状,以达到安全与经济的设计要求。

1. 材料力学的基本思路

(1) 理论公式的建立



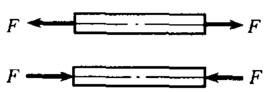
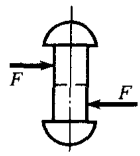
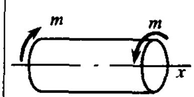
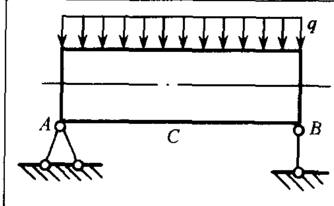
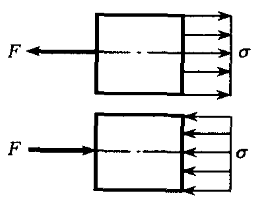
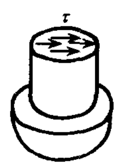
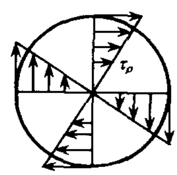
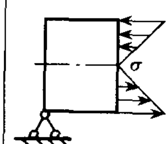
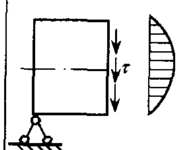
(2) 分析问题和解决问题



2. 杆的四种基本变形

杆的四种基本变形如表 0-1 所示。

表 0-1　杆的四种基本变形

类型	轴向拉伸(压缩)	剪　切	扭　　转	平面弯曲	
外力特点					
横截面内力	轴力 F_N 等于截面一侧所有轴向外力代数和	剪力 F_S 等于 F	扭矩 T 等于截面一侧对 x 轴外力偶矩代数和	弯矩 M 等于截面一侧外力对截面形心力矩代数和	剪力 F_S 等于截面一侧所有竖向外力代数和
应力分布情况	 均布	 假设均布	 线性分布	 线性分布	 抛物线分布
应力公式	$\sigma=\frac{F_N}{A}$	$\tau=\frac{F_S}{A_S}$ $\sigma_{bs}=\frac{P_{bs}}{A_{bs}}$	$\tau_\rho=\frac{T}{I_P}\rho$	$\sigma=\frac{M}{I_z}y$	$\tau=\frac{F_S S_z^*}{bI_z}$
强度条件	$\sigma_{\max}=\frac{F_{N\max}}{A}\leqslant[\sigma]$	$\tau=\frac{F_S}{A_S}\leqslant[\tau]$ $\sigma_{bs}=\frac{P_{bs}}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}]$	$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_P}$ $\leqslant[\tau]$	$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}$ $\leqslant[\sigma]$	$\tau_{\max}=\frac{F_{S\max}S_{z\max}^*}{bI_z}$ $\leqslant[\tau]$
变形公式	$\Delta l=\frac{F_N l}{EA}$		$\Phi=\frac{Tl}{GI_P}$	$f_c=\frac{5ql^4}{384EI_z}$	$\theta_A=\frac{ql^3}{24EI_z}$
刚度条件			$\theta_{\max}=\frac{T_{\max}}{GI_P}\leqslant[\theta]$	$\frac{f_{\max}}{l}\leqslant\left[\frac{f}{l}\right]$	$\theta_{\max}\leqslant[\theta]$
应变能	$U=\frac{F_N^2 l}{2EA}$		$U=\frac{T^2 l}{2GI_P}$	纯弯 $U=\frac{M^2 l}{2EI_z}$	非纯弯 $U=\int_l\frac{M^2(x)}{2EI_z}\mathrm{d}x$

第一章　轴向拉伸和压缩

1.1　基本内容及基本要求

1. 内容提要

(1) 拉(压)杆的强度计算

一般步骤:外力分析→内力计算→应力分析→强度计算。

1) 外力分析

外力特点:合外力(荷载和支反力)的作用线与杆轴线重合。

变形特征:杆件产生沿轴线方向的伸长或缩短。

2) 内力计算

内力:由外力引起的构件内部相连两部分之间的相互作用力。

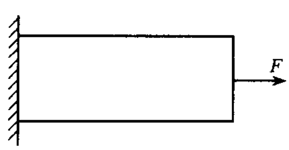
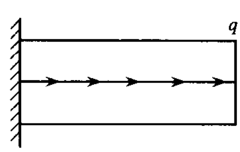
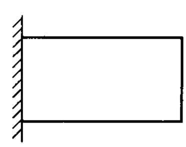
截面法:用一假想平面显示并确定构件某截面之内力的方法。

轴力:构件横截面上与其轴线重合之内力,亦即拉(压)杆横截面上分布内力的合力,用 N 表示。规定拉力为正,压力为负。

轴力图:表示轴力沿杆轴线(即杆横截面位置)变化规律的内力图形。**轴力图是杆件强度计算的依据。**

绘图方法 { 直接法:用截面法求得拉(压)杆各部分的轴力后,直接作图。
简易法:利用轴力图特征作图(表 1-1)。

表 1-1　轴力图特征

	集中力 F	分布力 q=常数	分布力 $q=0$
杆上荷载			
图例	图形有突变 |突变值|$=F$	斜直线 或	水平直线

3) 应力分析

应力:内力在截面上分布的密集程度,用 p 表示,单位:Pa,kPa,MPa,GPa。

拉(压)杆横截面上的应力 σ(正应力)。

拉(压)杆斜截面上的应力 σ_α(正应力)、τ_α(剪应力)。

4) 强度计算

包括强度校核、截面设计和确定许可荷载。

(2) 拉(压)杆的变形、应变和胡克定律

(3) 拉(压)超静定问题求解方法与基本步骤

判断超静定次数 → {变形几何条件；物理条件；静力平衡条件} → 求解

(4) 材料拉(压)时的力学性能

强度指标 $\begin{cases}\text{塑性材料}: \sigma_p, \sigma_e, \sigma_s, \sigma_b \\ \text{脆性材料}: \sigma_{bt}, \sigma_{bc}\end{cases}$

塑性指标 $\begin{cases}\text{延伸率}(\delta)\text{: 表示材料在拉断前能发生的最大塑性变形程度} \\ \text{断面收缩率}(\psi)\end{cases}$

2. 基本要求

掌握轴力的计算和轴力图的绘制;掌握横截面、斜截面应力计算和变形计算。了解低碳钢和铸铁材料强度指标的测定、计算及其物理意义,能熟练运用强度条件进行强度计算。初步掌握拉(压)超静定的基本解法。

3. 重点难点

拉(压)杆的强度计算和简单拉(压)超静定的基本解法。

4. 基本公式

横截面应力 $$\sigma = \frac{F_N(\text{横截面之内力})}{A(\text{横截面面积})}$$

斜截面上的应力 $$\begin{cases}\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = \sigma\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sigma}{2}\sin 2\alpha\end{cases}$$

强度条件及强度计算 $$\begin{cases}\text{强度校核} \quad \sigma_{\max} = \dfrac{F_{N\max}}{A} \leqslant [\sigma] \\ \text{截面设计} \quad A \geqslant \dfrac{F_{N\max}}{[\sigma]} \\ \text{求许可荷载} \ F_N(F) = F_{N\max} \leqslant A[\sigma]\end{cases}$$

式中，$F_N(F)$为由静力平衡方程得出的轴力与外力的关系，由此可计算许可荷载$[F]$。

纵横应变的关系　$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$

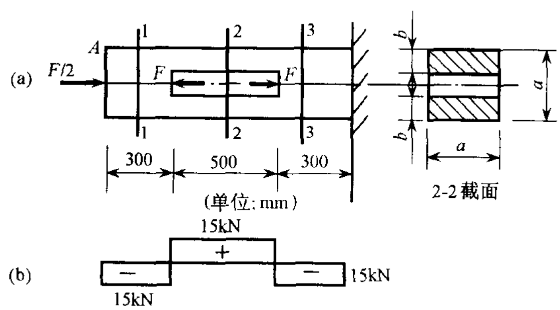
胡克定律　$\sigma = E\varepsilon,\quad \Delta l = \dfrac{F_N l}{EA}$

延伸率　$\delta = \dfrac{l_1 - l}{l} \times 100\%$

断面收缩率　$\psi = \dfrac{A - A_1}{A} \times 100\%$

1.2　典型例题与解题方法

例题 1-1　正方形截面有切槽，$a=30\text{mm}$，$b=10\text{mm}$，受力如图(a)所示，$F=30\text{kN}$。材料的$E=200\text{GPa}$。求：(1)绘出杆的轴力图；(2)计算杆内各段横截面上的正应力；(3)计算自由端A的轴向位移。



例题 1-1 图

解：(1)由受力图可得出各段的轴力

$$F_{N1} = -15\text{kN}$$
$$F_{N2} = 15\text{kN}$$
$$F_{N3} = -15\text{kN}$$

杆的轴力图如图(b)所示。

(2) 各段的应力

$$\sigma_{1\text{-}1} = \frac{F_{N1}}{A_1} = -\frac{15\times 10^3}{30\times 30} = -16.67\text{MPa}$$

$$\sigma_{2\text{-}2} = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{15\times 10^3}{30\times 20} = 25\text{MPa}$$

$$\sigma_{3\text{-}3} = \frac{F_{N3}}{A_3} = -\frac{15\times 10^3}{30\times 30} = -16.67\text{MPa}$$

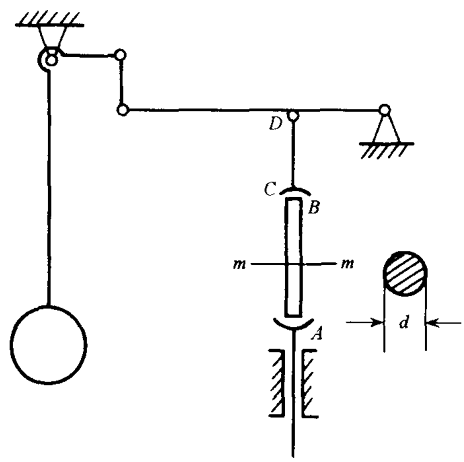
(3) A 端的轴向位移即为杆的轴向变形

$$\Delta=\Delta l=\frac{F_{N1}l_1}{EA_1}+\frac{F_{N2}l_2}{EA_2}+\frac{F_{N3}l_3}{EA_3}$$

$$=\frac{-15\times10^3\times300}{200\times10^3\times30\times30}+\frac{15\times10^3\times500}{200\times10^3\times30\times20}$$

$$+\frac{-15\times10^3\times300}{200\times10^3\times30\times30}=0.0125\text{mm}(\leftarrow)$$

例题 1-2 某拉伸机结构如图所示，其中 AB 为试件。设试验机的 CD 杆的材料与试件 AB 相同，均为 A_3 钢，$\sigma_p=200\text{MPa}$，$\sigma_s=240\text{MPa}$，$\sigma_b=400\text{MPa}$，试验机最大拉力为 100kN。求：(1) 试验机作拉断试验时，试样的最大直径 $d_{\max}=?$ (2) 若试验机的安全系数 $n=2$，CD 杆的面积 $A_{CD}=?$ (3) 若试样的直径 $d=10\text{mm}$，欲测 E，所加荷载 F 不能超过多少？



例题 1-2 图

解：分析：此题既是拉压强度计算的综合练习，又是材料力学性能的实际应用。

(1) 因为试样的 $\sigma_b=400\text{MPa}$，据 $\sigma_{\max}=\dfrac{F_N}{A}\geqslant\sigma_b$，有 $A\leqslant\dfrac{F_N}{\sigma_b}$，而 $A=\dfrac{\pi d^2}{4}$，所以

$$d\leqslant\sqrt{\frac{4F_N}{\pi[\sigma]}}=\sqrt{\frac{4\times100\times10^3}{3.14\times400}}=17.8\text{mm}$$

取 $d_{\max}=18\text{mm}$。

(2) 由于试验机的 $n=2$，所以 $[\sigma_{CD}]=\dfrac{\sigma_s}{n}=120\text{MPa}$。

$$\sigma_{\max}=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma]$$

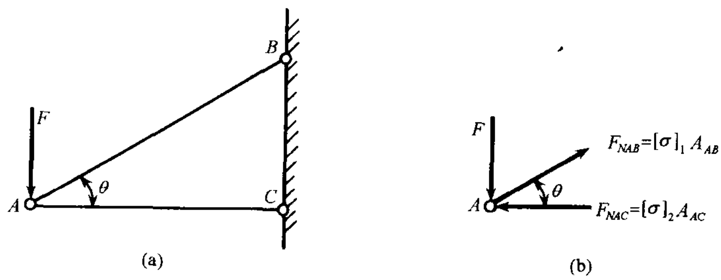
$$A_{CD}\geqslant\frac{F_N}{[\sigma_{CD}]}=\frac{100\times10^3}{120}=833\text{mm}^2$$

(3) 由胡克定律 $\sigma=E\varepsilon$，$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{\sigma_p}{\varepsilon}$，据 $\sigma_{\max}=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma]$，依题意有 $\sigma_{\max}=\sigma_p$，所以

$$F=F_N\leqslant A\sigma_p=\frac{3.14\times10^2}{4}\times200=15.7\text{kN}$$

故，所加荷载 $F=15.7$kN。

例题 1-3 图(a)所示桁架为钢木结构，其中杆 AB 为钢杆，截面面积 $A_{AB}=10^3\text{mm}^2$，许用应力 $[\sigma]_1=140$MPa；杆 AC 为木杆，截面面积 $A_{AC}=10^4\text{mm}^2$，许用应力 $[\sigma]_2=7$MPa。若要求两杆的应力同时达到许用应力，问结构的承载值以及两杆之间的夹角 θ 各为多少？



例题 1-3 图

解：依题意：要求两杆同时达到许用应力，即认为两杆同时破坏时，节点 A 的受力如图(b)所示，即杆 AB、AC 的轴力均用 $[\sigma]A$ 代替。所以

$$\sum F_x=-F_{NAC}+F_{NAB}\cos\theta=0 \quad ①$$

$$\sum F_y=-F+F_{NAB}\sin\theta=0 \quad ②$$

由式①得

$$\cos\theta=\frac{F_{NAC}}{F_{NAB}}=\frac{[\sigma]_2A_{AC}}{[\sigma]_1A_{AB}}=\frac{7\times10^4}{140\times10^3}=\frac{1}{2}$$

所以

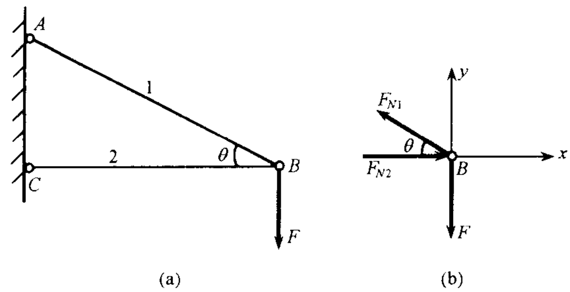
$$\theta=60^\circ$$

由式②得

$$F=F_{NAB}\sin\theta=[\sigma]_1A_{AB}\sin60^\circ=140\times10^3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=121.2\text{kN}$$

例题 1-4 图(a)所示桁架的节点 B 处作用了一集中力 F。其中杆 AB 和杆 BC 的材料相同，许用拉应力与许用压应力相等，都为 $[\sigma]$。BC 杆的长度 l_2 不变，AB 杆的长度 l_1 随着 θ 角变化而变化。求两杆的应力同时达到许用应力并使结构所用材料最少的 θ 角的值。

解：如图(b)所示，由节点 B 的平衡条件得



例题 1-4 图

$$\sum F_x = 0,\quad F_{N2} - F_{N1}\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{N1}\sin\theta = F$$

解得

$$F_{N1} = \frac{F}{\sin\theta},\quad F_{N2} = \frac{F\cos\theta}{\sin\theta}$$

两杆同时达到许用应力时，两杆的面积分别为

$$A_1 = \frac{F_{N1}}{[\sigma]} = \frac{F}{[\sigma]\sin\theta},\quad A_2 = \frac{F_{N2}}{[\sigma]} = \frac{F\cos\theta}{[\sigma]\sin\theta}$$

两杆的总体积

$$V = V_1 + V_2 = A_1 l_1 + A_2 l_2 = \frac{Fl}{[\sigma]\sin\theta\cos\theta} + \frac{Fl\cos\theta}{[\sigma]\sin\theta}$$

由题意可知，当两杆的总体积最小时，结构所用的材料为最少，即

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = \frac{Fl}{[\sigma]}\left(\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = 0$$

所以$\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{2}{\sin^2\theta} = 0$，即 $\tan\theta = \sqrt{2}$，故 $\theta = 54.73°$。

由此可知：使结构所用材料最少的 θ 角的值为 54.73°。

例题 1-5 图(a)所示结构，AC 为铝杆，$A_{AC} = 200\text{mm}^2$，$l_{AC} = 2.5\text{m}$，$E_{AC} = 70\text{GPa}$；BC 为钢杆，$A_{BC} = 250\text{mm}^2$，$l_{BC} = 4\text{m}$，$E_{BC} = 200\text{GPa}$；荷载 $F = 50\text{kN}$。求：(1)各杆的应力；(2)节点 C 的位移。

解：(1) 各杆的应力

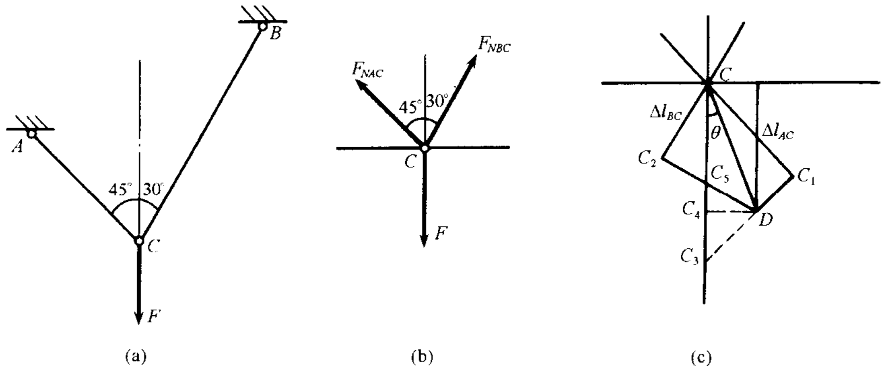
各杆的内力如图(b)所示，由节点 C 的平衡得

$$F_{NAC}\sin 45° - F_{NBC}\sin 30° = 0$$

$$F_{NAC}\cos 45° + F_{NBC}\cos 30° = F$$

所以

$$F_{NAC} = 25.9\text{kN},\quad F_{NBC} = 36.6\text{kN}$$



例题 1-5 图

各杆的应力

$$\sigma_{AC}=\frac{F_{NAC}}{A_{AC}}=\frac{25.9\times10^3}{200}=129.5\text{MPa}$$

$$\sigma_{BC}=\frac{F_{NBC}}{A_{BC}}=\frac{36.6\times10^3}{250}=146.4\text{MPa}$$

各杆的变形

$$\Delta l_{AC}=\frac{F_{NAC}l_{AC}}{E_{AC}A_{AC}}=\frac{25.9\times10^3\times2.5\times10^3}{70\times10^3\times200}=4.63\text{mm}$$

$$\Delta l_{BC}=\frac{F_{NBC}l_{BC}}{E_{BC}A_{BC}}=\frac{36.6\times10^3\times4.0\times10^3}{200\times10^3\times250}=2.93\text{mm}$$

(2) 节点 C 的位移

用几何法求节点 C 的位移：在外力作用下，杆 AC 和杆 BC 发生变形，节点 C 产生位移。设想打开铰链 C，AC 杆变形后伸长到 C_1 点，BC 杆变形后伸长到 C_2 点。过 C_1 点作 AC_1 的垂线与过 C_2 点作 BC_2 的垂线交于 D 点，D 点即为节点 C 的新位置，线段$\overline{CD}$为 C 的位移，如图(c)所示。引入辅助线后，由图中可得

$$\overline{CC_5}=\frac{\Delta l_{BC}}{\cos30^\circ}=3.38\text{mm},\qquad \overline{CC_3}=\frac{\Delta l_{AC}}{\cos45^\circ}=6.55\text{mm}$$

$$\overline{C_3C_4}=\overline{DC_4},\qquad \overline{C_4C_5}=\overline{DC_4}\tan30^\circ=\overline{C_3C_4}\tan30^\circ$$

$$\overline{C_3C_4}+\overline{C_4C_5}=\overline{CC_3}-\overline{CC_5}=6.55-3.38=3.17\text{mm}$$

所以

$$\overline{DC_4}=\overline{C_3C_4}=2.01\text{mm},\qquad \overline{C_4C_5}=1.16\text{mm}$$

$$\overline{CC_4}=\overline{CC_5}+\overline{C_4C_5}=3.38+1.16=4.54\text{mm}$$

节点 C 的位移

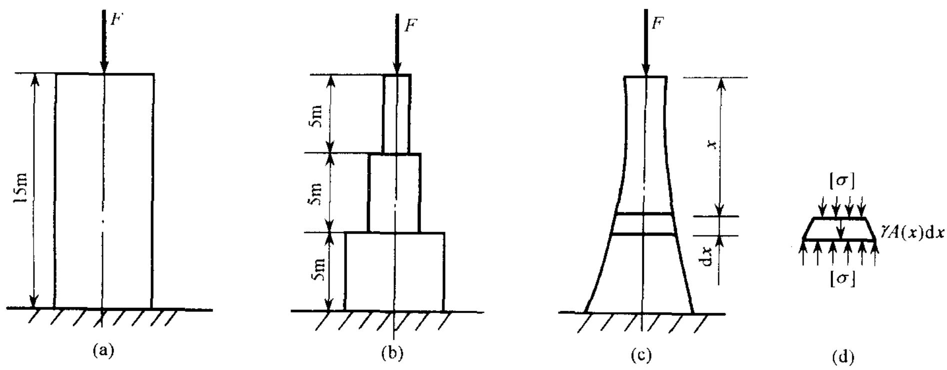
$$\overline{CD}=\sqrt{\overline{CC_4}^2+\overline{DC_4}^2}=\sqrt{4.54^2+2.01^2}=4.97\text{mm}$$

节点 C 的位移方向

$$\tan\theta = \frac{2.01}{4.54}, \qquad \theta = 23.88°$$

讨论：用几何法求节点位移，实际是工程计算的近似方法，即用“切线代替圆弧”确定桁架受力变形后其节点新位置的方法。几何法简单易行，而且计算结果完全满足工程要求。

例题 1-6　一石柱桥墩如图(a)所示，压力 $F=1000\text{kN}$，石料的单位体积重量 $\gamma=25\text{kN/m}^3$，许用应力 $[\sigma]=1\text{MPa}$。试比较下列三种情况所需的石料体积：(1)等截面石柱；(2)三段等长度的阶梯石柱；(3)等强度石柱(柱的每个横截面的应力都等于许用应力 $[\sigma]$)。



例题 1-6 图

解：(1) 等截面石柱

如图(a)所示，设横截面面积为 A，下端截面是危险截面，轴力为 $F_N=F+\gamma Al$。

由石柱的强度条件

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F+\gamma Al}{A} = \frac{F}{A} + \gamma l \leqslant [\sigma]$$

得横截面面积

$$A = \frac{F}{[\sigma]-\gamma l} = \frac{1000\times 10^3}{1\times 10^6 - 25\times 10^3 \times 15} = 1.6\text{m}^2$$

石柱体积

$$V_1 = Al = 1.6\times 15 = 24\text{m}^3$$

(2) 三段等长度的阶梯石柱

如图(b)所示，各段下端截面的轴力分别为

$$F_{N1} = F + \gamma A_1 l_1$$

$$F_{N2} = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2$$

$$F_{N3} = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2 + \gamma A_3 l_3$$

由石柱的强度条件得出各段的面积

$$A_1=\frac{F}{[\sigma]-\gamma l_1}=\frac{1000\times10^3}{1\times10^6-25\times10^3\times5}=1.14\mathrm{m}^2$$

$$A_2=\frac{F+\gamma A_1 l_1}{[\sigma]-\gamma l_2}=\frac{1000\times10^3+25\times10^3\times1.14\times5}{1\times10^6-25\times10^3\times5}=1.31\mathrm{m}^2$$

$$A_3=\frac{F+\gamma A_1 l_1+\gamma A_2 l_2}{[\sigma]-\gamma l_3}$$

$$=\frac{1000\times10^3+25\times10^3\times1.14\times5+25\times10^3\times1.31\times5}{1\times10^6-25\times10^3\times5}$$

$$=1.49\mathrm{m}^2$$

石柱体积

$$V_2=(A_1+A_2+A_3)l_1=(1.14+1.31+1.49)\times5=19.7\mathrm{m}^3$$

(3) 等强度石柱

如图(c)所示,等强度石柱的每一个横截面上的正应力都等于许用应力$[\sigma]$,由于各截面上轴力不同,因而横截面面积随x而变化,即

$$\sigma(x)=\frac{F_N(x)}{A(x)}=[\sigma]$$

在石柱中截取$\mathrm{d}x$微段,其上截面(即x截面)的面积为$A(x)$,下截面(即$x+\mathrm{d}x$截面)的面积为$A(x)+\mathrm{d}A(x)$,石柱微段的受力情况如图(d)所示。

由石柱微段的平衡得

$$[A(x)+\mathrm{d}A(x)][\sigma]=A(x)[\sigma]+\gamma A(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\mathrm{d}A(x)[\sigma]=\gamma A(x)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{A(x)}=\frac{\gamma}{[\sigma]}\mathrm{d}x$$

设顶端截面($x=0$)的面积为A_0,对上式进行积分,得x截面的面积为

$$A(x)=A_0\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{[\sigma]}x}$$

顶端截面积

$$A_0=\frac{F}{[\sigma]}=\frac{1000\times10^3}{1\times10^6}=1\mathrm{m}^2$$

石柱下段截面积

$$A(l)=A_0\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{[\sigma]}l}=1\times\mathrm{e}^{\frac{25\times10^3\times15}{1\times10^6}}=1.45\mathrm{m}^2$$

石柱的体积可由积分求得,也可用另一种简便的方法求解:

石柱下端截面的轴力为$F_N(l)=F+P$,P为石柱的自重,$P=\gamma V_3$。

由石柱下端截面强度条件得