

一九八七年

数学分析研究生题解

第七册

杨守昌 谢家海 黄仿伦编

安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

一九八七年
数学分析研究生题解
第七册（函授教材）

杨守昌 谢家海 黄仿伦

安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

前 言

经过半年多的努力，1987年《数学分析研究生题解》（即函授教材第七册）与《高等代数研究生题解》（即函授教材第七册）终于与读者见面了。在收集试题和题解的过程中，得到了各兄弟院校研究生招生办公室及各校数学系同志的热情支持，有的试题甚至是请考生在考场上抄录下来的。在收集和编写试题解答时，还得到了我系部分同志的支持。在此，对他们一并表示衷心的感谢。由于某些原因，一些学校的试题或解答未能收入本书，特请这些学校予以谅解。

我们在编写解答时，对少数简单计算题写法编简，考生在正式考试时，应多写一些中间步骤才能使答案完整。

由于编写时间仓促，书中一定存在不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

这套函授教材各册书均保证供应。各册定价是：第一册，《一元微积分》，551题解，1.50元；第二册，《级数与多元微积分》，370题解，1.50元；第三册，《微分方程》，390题解，1.10元；第四册，《线性代数》，447题解，1.10元；第五、六册1985年和1986年非数学专业用110套《高等数学研究生题解》，3.00元；第七册，1987年高等院校《数学分析研究生题解》，3.00元；第八册1987年高等院校《高等代数研究生题解》，3.00元；还有为复旦大学编教本《概率论》习题编写的《概率论题解》，1.80元。以上定价中均含挂号寄书邮费。购书来款请寄“安徽大学数学系函授组（合肥市）”，并请在汇款单附言栏注明购各册书的册数，不要另来函说明，以免核对之繁。

目 录

1	北京大学	(1)
2	中国科学技术大学	(9)
3	清华大学	(14)
4	浙江大学	(19)
5	南开大学	(24)
6	中山大学	(29)
7	中国科学院数学研究所	(34)
8	厦门大学	(40)
9	复旦大学 (一)	(47)
10	四川大学	(56)
11	武汉大学	(60)
12	北京师范大学	(66)
13	吉林大学	(74)
14	山东大学	(81)
15	安徽大学 (I) (II)	(87)
16	杭州大学	(93)
17	江西大学	(97)
18	黑龙江大学	(105)
19	郑州大学	(109)
20	广西大学	(115)
21	河北大学	(120)

22	福州大学·····	(124)
23	贵州大学·····	(128)
24	辽宁大学·····	(134)
25	山西大学·····	(139)
26	暨南大学·····	(144)
27	新疆大学·····	(151)
28	天津大学·····	(158)
29	同济大学·····	(163)
30	哈尔滨工业大学·····	(171)
31	南京工学院·····	(179)
32	西安交通大学·····	(185)
33	西北工业大学·····	(191)
34	大连工学院·····	(196)
35	华南工学院·····	(200)
36	成都电讯工程学院·····	(204)
37	西南交通大学·····	(208)
38	华东化工学院·····	(213)
39	湖南大学·····	(216)
40	东北工学院·····	(223)
41	合肥工业大学·····	(229)
42	重庆大学·····	(233)
43	国防科学技术大学·····	(240)
44	上海交通大学·····	(246)
45	成都科学技术大学·····	(252)
46	山东海洋学院·····	(258)
47	华东师范大学·····	(264)

48	曲阜师范大学.....	(270)
49	江西师范大学.....	(276)
50	山东师范大学.....	(278)
51	西南师范大学.....	(281)
52	上海师范大学.....	(283)
53	辽宁师范大学.....	(285)
54	华南师范大学.....	(286)
55	复旦大学(二).....	(288)
56	北京师范学院.....	(289)

以下各校数学分析试题转第八册

65	哈尔滨范师学院
66	上海科学技术大学
67	四川范师大学
68	中国纺织大学
69	华中范师大学
70	内蒙古大学
71	兰州大学
72	西北大学
73	云南大学
74	北京钢铁学院
75	河北师范大学

1 北 京 大 学

一、(18分) 证明 $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt e^{x^2/2}$ 在

$[0, +\infty)$ 有界, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 无界.

证. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt}{e^{-x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x^2/2}}{-xe^{-x^2/2}} = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界. 当 $x < 0$ 时,

$$f(x) \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt e^{x^2/2}.$$

易知当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界.

二、(18分) 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx,$$

$$(2) \iiint_V y \sqrt{16 - z^2} dx dy dz, \text{ 其中 } V \text{ 是由 } z = y^2, \\ z = 2y^2 (y > 0), z = x, z = 2x, \text{ 和 } z = 4 \text{ 围成的区域.}$$

解. (1) 令 $u = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, 则 $dx = 2u(1+u^4)^{-1} du$.

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \left(u + \frac{1}{u}\right) \frac{u du}{1+u^4} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{u-1/2}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} \\ = \sqrt{2} \pi.$$

(2) 令 $u=x/z$, $v=y^2/z$, $w=z$, 则可求得

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{2} w \sqrt{\frac{w}{v}}.$$

区域 V 变为 V' : $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$, $0 \leq w \leq 4$. 于是

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{V'} \sqrt{vw} \cdot \sqrt{16-w^2} \cdot w \sqrt{\frac{w}{v}} du dv dw \\ = \frac{1}{8} \int_0^4 v^{1/2} \sqrt{4^2-w^2} dw.$$

作代换 $w = 4 \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), 可求得 $I = 2\pi$.

三、(18分) 设 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, 求证 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)}$

收敛.

证. 显然 $f(0) = f'(0) = 1$. $f(x)$ 满足

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$$

对上式两端求 $n+1$ 阶导数可得

$$f^{(n+1)}(x) - [xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x)] - \\ - [x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)xf^{(n)}(x) \\ + n(n+1)f^{(n-1)}(x)] = 0$$

以 $x=0$ 代入即得

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$$

记 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, 则有

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad (n \geq 1)$$

从而 $a_n > 0$, 且 $\{a_n\}$ 为单调增加. 易知

$$a_{n+1} \leq 2a_n, \quad a_{n+1} \geq \frac{3}{2}a_n.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^{-1}}{a_n^{-1}} \leq \frac{2}{3} < 1$, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛.

四、(15分) (1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$ 在 $(0, 1]$ 不一致收敛.

证.

$$(2) \text{ 证明 } \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x \right) dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}$$

证. (1) 和函数为

$$S(x) = \frac{x \ln x}{1-x}, \quad x \in (0, 1); \quad S(1) = 0.$$

当 $x \rightarrow 1-0$ 时, $S(x) \rightarrow 1$, 所以 $S(x)$ 在 $(0, 1]$ 上不连续. 原级数每一项都连续, 所以级数在 $(0, 1]$ 上不一致收敛.

(2) 任意 $0 < \delta < x < 1$, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \ln t = \frac{\ln t}{1-t}$$

在 $[\delta, x]$ 上一致收敛, 从而有

$$\int_{\delta}^x \frac{\ln x}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\delta}^x t^n \ln t dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 - \int_0^{\delta} - \int_x^1 \right) t^n \ln t dt \quad (\cdot)$$

因为 $\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{\pi^2}{6}$

又因 $\left| \int_0^{\delta} t^n \ln t dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$

“ $\left| \int_x^1 t^n \ln t dt \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\delta} t^n \ln t dt$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_x^1 t^n \ln t dt$ 分别在 $0 \leq \delta \leq 1$ 和

$0 \leq x \leq 1$ 上一致收敛。在 $(\cdot)$ 式两端令 $\delta \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ 即得

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6},$$

或 $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}.$

五、(15分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

$$\text{定义} \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x-\xi|+|x-\eta|)} \\ \cdot |f(\xi)| |f(\eta)| d\xi d\eta,$$

$$\text{证明:} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

证一. 令

$$\psi_n(x) = \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-(|x-\xi|+|x-\eta|)} |f(\xi)| |f(\eta)| d\xi d\eta$$

$$\text{因为} \quad 0 \leq \psi(x) - \psi_n(x) \leq$$

$$\leq \left(\int_{|\xi| \geq n} |f(\xi)| d\xi \right)^2 + 2 \int_{|\xi| \geq n} |f(\xi)| d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\eta)| d\eta$$

所以对 $x \in \mathbf{R}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\psi_n(x) \rightarrow \psi(x)$.

$\forall A > 0$, 由 f 的连续性, 得

$$\int_{-A}^A \psi_n(x) dx = \int_{-n}^n \int_{-n}^n |f(\xi) f(\eta)| d\xi d\eta \int_{-A}^A e^{-|x-\xi|-|x-\eta|} dx$$

因当 $\eta > \xi$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|-|x-\eta|} dx = \int_{-\infty}^{\xi} + \int_{\xi}^{\eta} + \int_{\eta}^{+\infty} = \\ = e^{-(\eta-\xi)} (1 + \eta - \xi)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x-\xi|+|x-\eta|)} dx = e^{-|\xi-\eta|} (1 + |\xi-\eta|)$$

$$\begin{aligned}
 \text{即} \quad & \int_{-A}^A \psi_n(x) dx \leqslant \\
 & \leqslant \int_{-n}^n \int_{-n}^n |f(\xi)f(\eta)| e^{-|\xi-\eta|} (1+|\xi-\eta|) d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

在上式右端的积分中作代换: $\xi = u+v$, $\eta = u-v$, 即得

$$\begin{aligned}
 & \int_{-A}^A \psi_n(x) dx \leqslant \\
 & \leqslant 2 \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} e^{-2|v|} (1+2|v|) dv \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u+v)f(u-v)| du
 \end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u+v)f(u-v)| du \leqslant \\
 & \leqslant \left(\int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u+v)|^2 du \right)^{1/2} \left(\int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} |f(u-v)|^2 du \right)^{1/2} \\
 & \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx
 \end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned}
 & \int_{-A}^A \psi_n(x) dx \leqslant \\
 & \leqslant 2 \int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}} e^{-2|v|} (1+2|v|) dv \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx
 \end{aligned}$$

两边令 $n \rightarrow \infty$ ，并注意到极限可通过积分号（因 $\psi_n(x) \Rightarrow \psi(x)$ ），

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A \psi(x) dx \leq \\ & \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|v|} (1+2|v|) dv \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \\ & = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

由 $\psi(x) \geq 0$ 知，上式左端是 A 的递增函数，故在上式中令 $A \rightarrow +\infty$ 即得证。

证二. $\psi(x) = (e^{-|\xi|} \cdot |f(\xi)|)^2$ （ $\cdot$ 为卷积）

由 Young 不等式，取 $\varphi = e^{-|x|}$ ，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = \left\| \varphi \cdot |f| \right\|_2^2 \leq (\|\varphi\|_1 \|f\|_2)^2$$

而 $\|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2$ ，即得证。

六、（16分）设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$ 。

求证：

（1）对任意自然数 n ，方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 内有且仅有一个根，

(2) 设 $x_n \in (0, \frac{\pi}{3})$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$$

证. (1) 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 下设 $n>1$. 令 $y = \cos x$, 则

$$f_n(x) = g_n(y) = y + y^2 + \cdots + y_n$$

在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上考虑函数 $h_n(y) = g_n(y) - 1$. 因 $h_n(y)$ 连续,

且 $h_n(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^n < 0$, $h_n(1) = n-1 > 0$,

所以存在 $y_n \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $h_n(y_n) = 0$. 又因当 $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时,

$$h'_n(y) = 1 + 2y + \cdots + ny^{n-1} > 1$$

所以 $h_n(y)$ 严稳增, 于是 y_n 是唯一的. 而 $y = \cos x$ 在

$(0, \frac{\pi}{3})$ 上严格下降, 故对每个 y_n , 存在唯一的 $x_n =$

$\arccos y_n \in (0, \frac{\pi}{3})$ 满足要求.

(2) 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, y_n)$, 使得

$$|h_n(y_n) - h_n(\frac{1}{2})| = |h'_n(\xi)| |y_n - \frac{1}{2}|$$

因为 $h_n(y_n) = 0$, $h_n(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^n$, $|h'_n(\xi)| > 1$, 所以

$|y_n - \frac{1}{2}| \leq 1/2^n$. 从而 $y_n \rightarrow \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos y_n = \frac{\pi}{3}.$$

2 中国科学技术大学

一、(每小题7分,共21分)求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a_1 x \cdots \cos a_n x}{x},$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} \quad (a_i > 0, i = 1, \cdots, n).$$

解. (1) $I = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$$\begin{aligned} (2) I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \sum_{i=1}^n \frac{\cos a_1 x \cdots \cos a_n x}{\cos a_i x} a_i \sin a_i x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a_i x}{x} = \frac{1}{2} (a_1^2 + \cdots + a_n^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a_1^x - 1 + \cdots + a_n^x - 1}{n} \right)^{1/x} \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{a_1^x - 1 + \cdots + a_n^x - 1}{n} \right) \right] \\ &= \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \frac{a_1^x - 1 + \cdots + a_n^x - 1}{x} \right] \\ &= \exp \left(\frac{1}{n} \ln a_1 \cdots a_n \right) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}. \end{aligned}$$

二、(10分) 设 $x^2 + 3y^2 - 2z^2 + xy - z = 2$, 求在 $(1, 1, 1)$

处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1,1)}$.

解, 设 $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 + xy - z - 2$. 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2x+y}{4z+1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = \frac{z}{4z+1} - \frac{8x+4y}{(4z+1)^2} \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{14}{125}.$$

三、(10分) 求

$$\iint_{x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq \pi^2} \sin \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

解. 作变换 $x = ar \cos t, y = br \sin t (0 \leq r \leq \pi, 0 \leq t \leq \pi)$,

$$I = \int_0^\pi dr \int_0^{2\pi} ab r \sin t dt = 2ab\pi^2.$$

四、(15分) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ 存在且有限, 对任何 $A > 0$, $\int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$ 都收

敛, $a > b > 0$.

求证:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = l \ln \frac{a}{b}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证. } \int_0^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \\
 &= \int_0^{aA} \frac{f(x)}{x} dx - \int_0^{bA} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{bA}^{aA} \frac{f(x)}{x} dx = \\
 &= \int_{bA}^{aA} \frac{f(x) - l}{x} dx + l \ln \frac{a}{b}.
 \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 1$, 存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 于是当 $A > \frac{M}{b}$ 时有

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^A \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx - l \ln \frac{a}{b} \right| &= \left| \int_{bA}^{aA} \frac{f(x) - l}{x} dx \right| \\
 &< \varepsilon \int_{bA}^{aA} \frac{dx}{x} = \varepsilon \ln \frac{a}{b}.
 \end{aligned}$$

五、(10分) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $x \geq \delta > 0$ 时一致收敛.

证. 级数是交错的, 并且其通项的绝对值为单调减. 故对任意的正整数 M, N 都有

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+M} \frac{(-1)^n}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} + \frac{1}{(N+M)^x} < \frac{2}{N^\delta}.$$

因 $2/N^\delta$ 与 x 无关, 并且可以任意小, 所以原级数一致收敛.