連分數

譯者：王昌銳

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

徐氏基金會出版

連　分　數

譯者：王昌銳

徐氏基金會出版

內政部登記證內版台業字第1347號

連　分　數

中華民國五十九年 三 月三十日初版

出版者　徐氏基金會出版部
台北郵政信箱3261號
香港郵政信箱1284號

發行人　林　碧　鏗
台北郵政信箱3261號

譯　者　王　昌　銳
台灣省立高雄工業專科學校教授

印刷者　燈台光隆印刷紙品有限公司

台北市大同街一一九號

定　價　新台幣 二十五元
港　幣　四　元

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要慎密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册） (The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册） (Hungarian Problem Book 1).
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册） (Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗（第二册） (The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

譯序

連分數（continued fractions），於十七，十八世紀時代，即為許多偉大的數學家所研究。時至今日，仍為極引人注重之數學研究題材。因此種形式之分數，可使人們，對許多數學問題，特別是許多無理數或超越數，促進深入之瞭解。且連分數理論與實際兩方面，更為研究數目理論，及其他數學規律之權威工具，殊為現代數學研究，所不可忽視之重要內容。

本書由有理數如何展開，以成連分數開始，提供易於瞭解之簡單連分數討論。而後介紹連分數，如何應用於求德阿凡丁（Diophantine）方程式整解作業。並特別注意如何展開無理數，以成無窮連分數諸方面。頗值我國中等以上學校師生，從事數學研究參考。

作者奧爾玆博士（Dr.C.D. Olds），於一九一二年，生於紐西蘭（New Zealand）之萬家樂（Wanganui）地方，曾入美國斯丹福（Stanford）大學深造並從事研究工作，一九四三年，且獲該大學博士學位。先後執教於斯丹福大學，普渡（Purdue）大學及聖喬司（Sanjose）州立大學等處。對於數目理論及近似值理論，頗有研究，且多著作。除數學外，彼尚精於房屋建造及航行技術，實屬知行兩能之士。

本書譯名，力求普及通行，重要名詞術語，且留綴原名，以便讀者參證，瞭然原意。譯文力存其真，求其“信”而已矣，“達”而已矣，是否“雅”，尚待賢明賜正。

本書之譯及出版，諸承徐氏基金會諸公之指導與協助，遂得早日付梓，以饗國人，殊深感激。譯稿多勞吾妻蔣君英女士，從事整理，更深致謝。

中華民國五十八年十一月廿六日

湘潭留田王昌銳[illegible]於高雄工專

致讀者

本書爲數學專家，所撰一序列書籍之一。其目的在確立多數中學生及社會人士之某些富有興味而易通曉之重要數學觀念。新數學文庫之大部內容，常爲中學教材所不包括之課題；難易相殊，卽令是單一書中，有些部份，卽比其他部份，需要較高程度之專注。由是，讀者應具瞭解大部此等書籍之少數技能知識，且應作明智之努力。

如讀者一直僅於教室作業中接觸數學，應熟記於心者，爲數學書籍，不能快速閱讀。亦不應期望乍覽之餘，卽能瞭解書中所有部份。而應極自然的越過複雜部份，稍後再回來讀；後繼之敍述，常可澄清一種理論也。反之，包含完全熟悉資料之章節，則可快速閱讀。

學數學之最佳途徑爲"做"數學；各書所含習題，有些需要縝密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣。於此，數學將對之變爲意義倍增。

對著者及編者而言，此爲新的嚐試。願對許多中學師生，提供本文庫籌印之眞誠協助，表示由衷謝意。編者，對本文庫各書之反應意見，頗有興趣。希望讀者書寄紐約大學，新數學文庫編輯委員會。

原 書 編 者

前　言

將$\frac{9}{7}$數，書為

$$\frac{9}{7}=1+\frac{2}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{2}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$$

乍看之下，並不覺其比較簡單而較少意義。然其所產生之此種分數式，稱為連分數 (Continued fractions)，可藉以洞察許多數學問題，特別是數目性質方面。

連分數，於十七，八世紀時，已由數學大師所研究。今日仍為主要研究課題。

差不多所有數目理論書籍，均包含討論連分數之一章，但內容簡約，初學之士，深感困難。本書計劃提出簡單連分數之幾題討論，以使任何具有極少數學訓練之人，亦能瞭解。

數學家常認為其課題為一創造性藝術，而非一種科學。此於後隨諸頁可見。第一章顯示連分數如何偶然發現，而後利用例題，顯示有理分數，如何展成連分數。最後，更介紹較普通標誌。並說明基本定理，且證明之，於第二章，此等結果，均應用於整解方程式之求解，本章應易閱讀；以其較需要為尤詳明也。

第三章，討論無理數展為無窮連分數，並包括極限觀念之介紹性討論。此處，可知連分數，如何用以提供無理數之好而又好的有理近似值。此併稍後結果，均與尼文 (Niven) 所著“有理數及無理數”一書，所發展之類似增廣觀念，密切相關。

連分數之循環性質，於第四章論之。讀者將發現本章較他章富於挑戰性，但末了結果，却令人激賞。本章主要部份，為發展拉格南奇 (Lagrange) 定理，有關各二次無理數展開式，於某階段後而為循環之證明；此事實為後來用於解派爾 (Pell) 方程式者。

第五章之設計，在提供讀者面向將來之一觀察，並建議課題之進一步研究，且於該處討論有名的好威茲 (Hurwitz) 定理，其他與之密切相關定理，亦予提

示。

未曾言及，不應“讀”一數學書籍。最好取出紙筆，抄寫斯書。數學學生，應掌握證明之各步驟，如初讀之時，不明其所以然時，應計劃稍後回來閱讀，直至瞭解而後已。此外，應於節末，作各習題，以測驗其領悟能力。大部習題，均與課文基本性質，密切相關，而應無所困難。其答案示於書末。

二附錄之首，提供 $x^2-3y^2=-1$ 無整數解之一證明，而附錄2，係其他展開式之集中，用以顯示本課題如何發展以成，此中許多展開式，頗難獲致。最後，有一短簡之參考書目表。書中凡註有如［2］之處，卽表示參考表中第2項。

對學校數學研究小組，將本書納入新數學文庫之中，及各編輯委員所提改進卓見，深致謝意，特別感謝來克斯博士（Dr. Anneli Lax），伊不備很自然地給予技術性忠告，且予全文以鑑賞性之閱覽。亦感謝吾妻打繕原稿，及毛雷夫人（Mrs. Ruth Murray），整理最後版樣。

C.D. 奧爾茲

1961於加里福尼亞。

目　錄

第一章　有理分數之展開式

1.1 引言

假想一個代數課程學生，企圖解二次方程式

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \tag{1.1}$$

如下：首先以 x 遍除，並書方程式為：

$$x = 3 + \frac{1}{x}\,.$$

未知量 x，仍於此方程式右端發現．故能以其等值如 $3 + 1/x$ 取代．遂得

$$x = 3 + \frac{1}{x} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}$$

重複此種以 $3 + 1/x$ 代 x 之取代作業許多次，得數式

$$x = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}}}} \tag{1.3}$$

因 x 連續出現於此重疊分數之右端，似未得方程式 (1.1) 解之任何比較接近之值．

但對方程式 (1.2) 右端，作更密切之觀察，乃知其包含一分數之連續

(Succession).

$$(1.3)\qquad 3\ ,\ 3+\frac{1}{3}\ ,\ 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}\ ,\ 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}\ ,\ \cdots\ ,$$

得自後隨階段之中止。此等數目改爲分數而後成爲小數時，乃產生數目

$$3\ ,\quad \frac{10}{3}=3.333\cdots,\quad \frac{33}{10}=3.3\ ,\quad \frac{109}{33}=3.30303\cdots.$$

而後於一極愉快之驚異中，發現此等數目（或近數，以後將稱之），提供已知方程式（1.1）正根，好而又好之近似値。二次方程式顯示，此根實際等於

$$x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3.302775\cdots.$$

此當約爲 3.303 時，實爲配合以上最後結果之三位小數値。

此類初步計算，引致某些有趣問題。第一，如計算多而又多之近數（ Convergents ）(1.3)，將續得 $x=\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$ 好而又好之近似値否？第二，假定用於求得（1.2）之作業，考慮爲繼續無窮，如是乃處於合（1.2）之無止境數式

$$(1.4)\qquad x=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\ddots}}$$

境地，其中三點表示如此類推之意，遂顯示連續分數，繼續無窮。而後（1.4）式右端，實際等於 $\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})$ 否？乃啟示一無窮小數。例如，當言及無窮小數 0.333⋯等於 $\frac{1}{3}$ 時，其意爲何？此與其他許多問題，將予討論並回答之。

重疊而如（1.2）及（1.4）之分數，稱爲連分數（ Continued fractions ）。此等分數及許多性質與應用之研究，形成數學書類中最重要之一章。然而，應由此較簡單處着手。此中首要，爲基本定義之介紹。

1.2 定義及標誌

式如

$$(1.5)\qquad a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\ddots}}}$$

之數式，稱爲連分數。通常，數目 a_1，a_2，a_3，…，b_1，b_2，b_3，…可爲任何實或複數，而項數可爲有限或無限。

然於本書，將限於討論簡單分數，其式有如

$$(1.6)\qquad a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}}$$

其中首領 a_1，通常爲正或負整數（但亦能爲零），而 a_2，a_3，a_4，…均正整數。事實上，於第三章以後，將進一步限制討論有限簡單連分數。而有式如

$$(1.7)\qquad a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}},$$

僅具有限項數 a_1，a_2，a_3，…a_n。如斯之一分數，稱爲有限連分數。除非已說明其反面，由現在起，連分數一詞，將表示所討論者爲有限簡單連分數。

書寫 (1.7) 之較便方式爲

$$(1.8)\qquad a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n},$$

其中十號之在第一個以後者，係表示爲構成連分數之下一步作業。亦便於以符號 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 表示連分數(1.8),如是，

(1.9) $$[a_1, a_2, \cdots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} .$$

諸項 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，稱爲連分數之部份商(Partial quotients)。

1.3 有理分數之展開式

有理數(rational number)，係式如 p/q 之一部數，其中 p 與 q 均整數，而 $q \neq 0$。次節將證明各有理分數，或有理數，能示爲一有限簡單連分數。

例如，連分數 $\frac{67}{29}$ 者，爲

$$\frac{67}{29} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

或

$$\frac{67}{29} = [2, 3, 4, 2].$$

如何得此結果？首先，以 29 除 67，得商數 2 及餘數 9，如是

(1.10) $$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{9}} .$$

注意於右端，已以 $\frac{29}{9}$ 之倒數，取代 $\frac{9}{29}$。其次以 9 除 29，得

(1.11) $$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{2}} .$$

最後，以 2 除 9，得

(1.12) $$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2},$$

於斯階段，作業中止．現將（1.12）代入（1.11），而後以（1.11）代入（1.10），以得

$$\frac{67}{29}=2+\frac{1}{\frac{29}{9}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{9}{2}}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}$$

或

$$\frac{67}{29}=[\,2,\ 3,\ 4,\ 2\,]=[\,a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\,]. \tag{1.13}$$

於方程式（1.10）中，應注意數目 $2\cdot29$，爲小於 67 之 29 的最大倍數，而結果，餘數（於本情況爲數目 9）需爲 ≥ 0 但 <29 之一定數目．［如數目 a，小於數目 b，書 $a<b$．如 a 小於或等於 b，可書 $a\leq b$．相似的，如 a 大於 b，或如 a 爲大於或等於 b，而各書爲 $a>b$，$a\geq b$．關於不等式之詳細討論，見貝肯柏克（E. Beckenbach）及貝爾曼（R.Bellman）所著之［1］．］

其次考慮方程式（1.11）．此處 $3\cdot9$ 爲小於 29 之 9 的最大倍數．餘數 2，需爲 ≥ 0 但小於 9 之一數．

於（1.12）中，數目 $4\cdot2$，爲小於 9 之 2 的最大倍數，而餘數 1，爲 ≥ 0，但 <2 之一數目．

最後，不能越出方程式（1.12），因如書

$$\frac{9}{2}=4+\frac{1}{\frac{2}{1}}=4+\frac{1}{2},$$

則 $2\cdot1$ 爲 1 之最大倍數而除 2 者，而簡單的止於

$$\frac{2}{1}=2\cdot1+0=2,$$

如是計算終止．

$\frac{67}{29}$ 之連分數展開式，其求取作業，能安排如下：

$29\overline{)67}(2=a_1$ ，以 29 除 67．

58　　　　$2\cdot 29=58$；由 67 減 58．

$9\overline{)29}(3=a_2$　以 9 除 29．

27　　　　$3\cdot 9=27$；由 29 減 27

$2\overline{)9}(4=a_3$　以 2 除 9．

8　　　　$4\cdot 2=8$，由 9 減 8．

$1\overline{)2}(2=a_4$　以 1 除 2．

2　　　　$2\cdot 1=2$，由 2 減 2．

0　　　　作業終止．

由是，

$$\frac{67}{29}=[a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ ]=[2,\ 3,\ 4,\ 2]\,.$$

於此例中，觀知於連續除法中，餘數 9，2，1，確已決定爲各小於對應除數之非負數目．由是，餘數 9 小於除數 29，餘數 2 小於除數 9，如此類推．各除法中之餘數，變爲次一除法之除數，如是連續之餘數，變爲小而又小之非負整數．由是餘數 0，應可到達，而作業終止．

於此作業中所得餘數，各爲非負之獨一數目．例如，能以 29 除 67，得最大之商 2，而止於 9 以外之餘數否？此即意謂，對已知分數 $\frac{67}{29}$，吾人作業，恰引出一個餘數序列．

玆求 $\frac{29}{67}$ 之連分數展開式，以爲第二例題，得

$67\overline{)29}(0=a_1$

0

$29\overline{)67}(2=a_2$

58

$9\overline{)29}(3=a_3$

27

$2\overline{)9}(4=a_4$

8

$1\overline{)2}(2=a_5$．

2

0