国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

数理科学系列

形式语义学的稳定论域理论

陈仪香 著

Mathematics
Physics

科学出版社

国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

形式语义学的稳定论域理论

陈仪香 著

科学出版社

内 容 简 介

本书大部分内容是作者近期的研究成果. 全书较系统地讲述了计算机语言形式语义的稳定论域理论中的序理论、逻辑结构和拓扑方法. 建立稳定论域的逻辑表示以及格表示; 讨论最弱前置谓词的稳定语义以及谓词转换器的拓扑语义; 系统地论述稳定映射的代数、拓扑刻画以及迹表示; 讨论稳定映射的全性与极大性; 建立稳定论域范畴的对偶理论.

本书可作为计算机科学技术专业、数学专业的研究生教材, 以及高年级本科生有关课程的教材或参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

形式语义学的稳定论域理论 / 陈仪香著. —北京: 科学出版社, 2003.6

ISBN 7-03-011264-4

Ⅰ. 形… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 形式语义 - 理论 Ⅳ. TP301.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 018887 号

责任编辑: 彭 斌 姚 晖 / 责任校对: 柏连海
责任印制: 白 羽 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
源海印刷厂 印刷
科学出版社编务公司编辑制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 6 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32
2003 年 6 月第一次印刷 印张: 6 3/4
印数: 1-1 500 字数: 139 000

定价: 18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

论域理论的目的是为在其上定义可计算函数的空间建立语义模型. 适合于指称语义的空间不仅涉及其高阶类型 (如函数空间), 还涉及可递归定义的空间 (如自反论域). 为了处理的需要, 结构、多种特殊的论域构造 (或函子) 要建立.

[美] Dana S. Scott

形式语义学是研究程序设计语言语义的学问. 它以数学为工具, 运用符号和公式, 严格地解释程序设计语言的语义, 使语义形式化. 由于形式化中侧重面和使用的数学工具不同, 形式语义学可分为四大类: 操作语义学、指称语义学、代数语义学、公理语义学. 指称语义学是公认的标准形式语义学, 论域理论是其基础和核心, 它是由 D. Scott 开创的, 后经 M.Smyth, G.D.Plotkin 等人工作, 论域理论已取得了丰富成果, 为指称语义学奠定了坚实的基础.

在论域理论中, 语言语法域的指称 (denotation) 称为论域, 一般是指具有一定特性的定向完备偏序集, 其上的 Scott 连续映射 (即单调保定向并的映射) 作为计算 (程序) 的指称. 论域与 Scott 连续映射组成的范畴 (称为论域范畴) 是计算机语言的指称语义域, 它是论域理论主要研究对象. 为了更好支持程序设计语言, 人们要求这样的语义域是笛卡儿闭范畴. 然而论域范畴本身不是笛卡儿闭范畴, 人们就退一步寻找它的笛卡儿闭

子范畴. A.Jung 于 1990 年表明论域范畴恰好有两个满的极大笛卡儿闭子范畴 —— 双有限论域范畴和 L- 论域范畴，这个结果使人们特别关注这两类论域.

另一方面，以论域为语法域的指称，以及 Scott 连续映射为程序 (段) 的指称，建立的程序设计语言指称语义一般要求与操作语义等价，即它们刻画、反映了程序的同一行为，这就是通常所说的论域模型全抽象问题. R.Milner, G.D.Plotkin 在 1977 年研究 PCF 语言 (可计算函数的程序设计语言) 的全抽象语义时发现以 Scott 连续映射为 PCF 语言的程序指称语义建立的论域模型不是全抽象的，即操作语义与指称语义在刻画 PCF 语言的程序行为时不是等价的. 这促使 G.Berry 将 Scott 连续映射进行分类，他引入了称为稳定映射的一类 Scott 连续映射，并表明 PCF 语言的全抽象论域模型只能由稳定映射组成. 这个结果使人们关注以稳定映射为程序指称的论域理论，称之为稳定论域理论.

稳定论域理论不仅关注稳定映射，而且关注与稳定映射相融洽的论域. 现在关注最多的一类论域 G.Berry 引入的 dI- 论域，另一类就是 Jung 发现的 L- 论域. 稳定映射在这两个论域上有不同表现特征，具体地说，在 dI- 论域上表现为保两个相容元素的交，G.Berry 称之为 CM 映射，而在 L- 论域上表现为保任意相容集 (非空) 之交. Zhang Guo-Qiang 系统地研究了 dI- 论域与稳定映射 (即 CM 映射) 组成范畴的诸如笛卡儿闭性的性质. T. Ehrhard 与 P.Malacaria, 以及 M.Droste 研究了 L- 论域与 CM 映射组成范畴的笛卡儿闭性. P.Taylor 研究了连续 L- 论域与稳定映射组成范畴的笛卡儿闭性. 本书作者自 1992 年

从师于王国俊教授攻读博士学位以来，系统地研究了代数L-论域与稳定映射组成范畴(称为稳定论域范畴)的诸如笛卡儿闭性等性质.

本书是基于作者的博士后研究报告，依据最新研究成果，系统地介绍稳定论域理论. 其内容是这样安排的：在第一章中从偏序关系基本概念入手，介绍经典论域理论的基本内容，它是本书的基础，也是论域理论入门的必读内容. 第二章首先介绍 G.Berry 引入稳定映射的背景 —— PCF 语言的语义模型，然后介绍 L- 论域与稳定映射组成的范畴 —— 稳定论域范畴，且 L- 论域称为稳定论域. 给出稳定映射在稳定论域上的代数与拓扑刻画. 在第三章中作者利用稳定论域的有限元 (紧元) 建立稳定论域上稳定映射的迹表示. 第四章利用稳定映射的迹表示理论表明稳定论域范畴是笛卡儿闭范畴，从而进一步研究有了明确应用背景. 第五章讨论稳定映射的全性与极大性，以及稳定论域的交紧性与局部分配性. 在第六章中作者引入一类半格，给出了稳定论域的格表示. 第七章介绍稳定论域的逻辑表示，一类命题理论被引入. 第八章讨论 Dijkstra 的最弱前置谓词的稳定语义，谓词在论域上的表现形式被探讨. 在第九章中作者利用半拓扑空间理论建立 Dijkstra 谓词转换器的拓扑语义. 第十章介绍稳定论域范畴的 Stone 对偶理论，一个基本概念 —— 半拓扑系统被引入.

本书的各部分内容都向研究生讲授过，其中不少是作者新近完成的科研成果. 但限于作者的水平，不妥乃至谬误之处都在可能之列，希望各位专家与读者不吝赐教.

本书在写作过程中得到了国内外许多专家学者的关心和帮

助. 作者首先向四川大学副校长刘应明院士、中国科学院数学与系统科学研究院陆汝钤院士、中国科学院软件研究所林惠民院士表示诚挚的谢意, 谢谢他们所给予的关怀和帮助. 特别感谢郑崇友教授以及我的导师王国俊教授, 他们阅读了本书的部分书稿, 对本书作了充分的肯定并热情推荐本书. 作者感谢王戈平教授多年来对我多方面的关心和帮助. 与清华大学应明生教授、四川大学罗懋康教授以及梁基华教授、中国科学院数学与系统科学研究院金芝研究员、中国科学院软件研究所蒋颖研究员, 以及江西师范大学徐晓泉教授、国防科技大学李周军教授、首都师范大学樊磊博士等个人交往使我获益匪浅. 和上海交通大学傅育熙教授、沈恩绍教授、陈翌佳博士有关论域理论的讨论有益于本书的完成. 同师好友赵东升教授、杨忠强教授、樊太和教授、赵彬教授、徐罗山教授、李永明教授、李生刚教授、裴道武博士等都曾给我极大的帮助和支持. 在美国工作的张国强 (G.Q.Zhang) 教授在学术等诸多方面曾给我宝贵的帮助. 美国的 J.Lawson 教授、德国的 K.Keimel 教授与 D.Spreen 教授、法国的 P-L.Curien 教授, 以及英国的 A.Jung 教授与 P.Johnstone 教授都曾给予我诸多的帮助. 1999 年 9 月在德国与论域理论创始人 D.Scott 教授的交谈使我更有信心完成本书的写作.

我的研究生孙莉萍、周洁、吴恒洋较早地阅读了本书, 并给予若干错误的纠正, 这里向他 (她) 们表示感谢. 科学出版社的彭斌先生、姚晖女士详细地审阅了本书初稿, 并提出了非常有价值的修改意见, 在此向他 (她) 们表示衷心的谢意.

最后, 我向给予我巨大支持的妻子宗亦耘博士等我的家人

表示最诚挚的感谢，止是他们的挚爱使我顺利地完成本书的写作.

本书的写作得到了国家自然科学基金(69873034,60273052)、教育部高等学校骨干教师资助计划、上海市教育发展基金会上海市教育委员会曙光计划 (99SG46) 的共同资助.

本书的出版得到了国家自然科学基金研究成果专著出版基金的资助 (60124008).

陈 仪 香

2003 年春节

于上海阳光绿园

目　录

第一章

论域：连续理论

本章关注论域理论的连续性理论，即以连续函数为基本研究对象的论域理论，它是经典的，是论域理论的基础. 本章主要介绍论域理论中诸如完备偏序集及其上的一些常见的构造算子，代数完备偏序集即论域，Scott 连续映射，以及 Scott 拓扑等基本概念和结论，最后简单地介绍有关格的基本概念.

1.1 完备偏序集

在现实生活中对象间的关系是随时可见的. 如人与人间的朋友关系、父子关系，单位的领导与职工的领导关系，产品的质量与价格的相称关系，数学上实数间的相等关系、小于等于关系，信息间的信息逼近关系，程序所确定部分函数间的偏序关系等. 下面重点谈谈最后的两种关系.

• 信息间的信息逼近关系：以逼近圆周率 π 为例说明信息逼近关系. 设 x 与 y 所代表的信息是圆周率 π 的逼近，譬如取 $x = 3.14$ 而 $y = 3.1415$，明显地 y 比 x 更逼近 π，用符号 $x \preceq y$ 表

示这个现象．若取 $z = 3.1415926$ 则有 $x \preceq y \preceq z$. π 的这种逼近构成了一条无穷链：

$$3 \preceq 3.1 \preceq 3.14 \preceq 3.141 \preceq \quad \cdots \quad \preceq \pi.$$

需要注意的是这种信息逼近不同于通常的近似计算，因为当要求保留三位小数时 π 的近似值为 3.142，大于 π 的值．

• 部分函数间的偏序关系：在计算机科学中部分函数是处处可见的，典型的例子是求整数的最大公因子 $GMD(m,n)$. 在任何计算机系统中都有整数的最大公因子是求不出的，这是计算机的计算能力所限．因此最大公因子函数是一个部分函数．但随着计算机计算能力的加强，这个函数的可解性也在增加，当然这种增加是与计算机系统相容的，即在低系统中可解在高系统中一定可解并且结果是一致的．

一般地，设 f 与 g 是同一集合上的部分函数，若 $f(x)$ 有定义就有 $g(x)$ 有定义且 $f(x) = g(x)$，则说 f 比 g 更偏或者说 g 比 f 更全，记作 $f \sqsubseteq g$. 符号 $dom(f)$ 表示部分函数 f 的定义域，明显地，$f \sqsubseteq g$ 当且仅当 $dom(f) \subseteq dom(g)$ 且 $\forall x \in dom(f),\ f(x) = g(x)$. 部分函数的相等采用外延式定义，即 $f = g$ 当且仅当 $\forall x \in X,\ f(x)$ 有定义当且仅当 $g(x)$ 有定义且 $f(x) = g(x)$. 显然 $f = g$ 当且仅当 $f \sqsubseteq g$ 且 $g \sqsubseteq f$. 部分函数关于关系 $\sqsubseteq$ 的极限是全函数．

这两种逼近关系有共同性质 — 满足下面的两个性质：

• 自反性： $\forall x \in X, x \le x$;

• 传递性： $\forall x, y, z \in X$, 若 $x \le y$, $y \le z$ 则 $x \le z$.

为此我们有下面的定义．

定义 1.1.1 设 X 是一集合. 若 X 上的二元关系 $\leq$ 满足:

- 自反性: $\forall x \in X, x \leq x$;
- 传递性: $\forall x, y, z \in X$, 若 $x \leq y$, $y \leq z$ 则 $x \leq z$.

则称二元关系 $\leq$ 为拟序关系. 进一步地, 若 $\leq$ 还满足

- 反对称性: $\forall x, y \in X$, 若 $x \leq y$, $y \leq x$, 则 $x = y$.

则称为偏序关系, 简称序关系或偏序, 而 $(X, \leq)$ 称为偏序集.

偏序关系当然是拟序关系, 拟序关系一般不是偏序关系. 但拟序关系可生成一偏序关系.

设 $(X, \preceq)$ 是一拟序集. 现在 X 上引入一二元关系 $\approx$, 其定义为: $x \approx y$ 当且仅当 $x \preceq y$ 且 $y \preceq x$. 则 $\approx$ 是 X 上的一个等价关系, 其商集 $X/\approx = \{[x] : x \in X\}$. 定义二元关系 $[x] \ll [y]$ 当且仅当 $x \preceq y$, 则 $\ll$ 是定义好的, 并且是 $X/\approx$ 的一偏序关系.

定义 1.1.2 设 $(P, \leq)$ 是偏序集, 若对于任意的 $x, y \in P$ 都有 $x \leq y$ 或 $x = y$ 或 $y \leq x$, 则称 $\leq$ 是线性序, 而 $(P, \leq)$ 称为全序集.

定义 1.1.3 设 P 是偏序集, C 是 P 的子集, 若 C 在 P 的偏序关系下是一全序集, 则称 C 是一链.

注 1.1.4 每个全序集都是链.

定义 1.1.5 设 P 是一偏序集,

- $a \in P$ 称为最小元 (最大元), 若 $\forall x \in P$ 都有 $a \leq x (x \leq a)$. 以后用符号 $\perp$ 或 0 ($\top$ 或 1) 表示偏序集最小元 (最大元);
- 设 $A \subseteq X, a \in A$ 称为 A 的极小元, 若对于任意的 $b \in A$, 只要 $b \leq a$ 就有 $a = b$; 对偶地,

- 设 $A \subseteq X, a \in A$ 称为 A 的极大元，若对于任意的 $b \in A$，只要 $a \leq b$ 就有 $a = b$.

定义 1.1.6 设 P 是一偏序集，

- P 的子集 A 称为上集，若 $x \in A$ 且 $x \leq y$ 则有 $y \in A$; 对偶地，
- P 的子集 A 称为下集，若 $x \in A$ 且 $y \leq x$ 则有 $y \in A$.

命题 1.1.7 设 P 是偏序集， A 是其子集，则

- 集合 $\uparrow A = \{y \in P \mid x \leq y, \exists x \in A\}$ 是包含 A 的最小上集，而符号 $\uparrow x$ 直接表示 $\uparrow \{x\}$;
- 集合 $\downarrow A = \{y \in P \mid y \leq x, \exists x \in A\}$ 是包含 A 的最小下集，而符号 $\downarrow x$ 直接表示 $\downarrow \{x\}$. □

定义 1.1.8 设 A 是偏序集 P 的子集， $x \in P$,

- 若 $A \subseteq \downarrow x$, 即 $\forall a \in A, a \leq x$, 则 x 称为 A 的上界；对偶地，
- 若 $A \subseteq \uparrow x$, 即 $\forall a \in A, x \leq a$, 则 x 称为 A 的下界.

符号 $ub(A)$,$lb(A)$ 将分别表示 A 的所有上界之集与下界之集.

定义 1.1.9 设 A 是偏序集 P 的子集，

- $ub(A)$ 的极小元称为 A 的极小上界，而
- $lb(A)$ 的极大元称为 A 的极大下界.

用符号 $mub(A)$ 与 $mlb(A)$ 分别表示 A 的所有极小上界之集与极大下界之集；

定义 1.1.10 设 A 是 X 的子集,

- 若 $ub(A)$ 有最小元 x ,则称 x 是 A 的最小上界或并，以后用 $\vee A$ 表示 A 的并;
- 若 $lb(A)$ 有最大元 x, 则称 x 是 A 的最大下界或交，以后用 $\wedge A$ 表示 A 的交.

定义 1.1.11 设 A 是 X 的子集,

- 若 $\forall x \in ub(A)$ 存在惟一的 $y \in mub(A)$ 使得 $y \leq x$ 则称 A 有多值并 ; 相应地,
- 若 $\forall x \in lb(A)$ 存在惟一的 $y \in mlb(A)$ 使得 $x \leq y$ 则称 A 有多值交.

从信息角度来说，偏序集的最小元所代表的信息量最小，甚至为零，即空信息. 集合上的部分函数在没有定义的地方我们认为其计算结果为空信息，换句话说，部分函数在没有定义的地方也可认为有定义，只是其值为空信息. 这样，若我们在部分函数的值域外加一个空信息，使得部分函数原没有定义的地方也有了定义，只是其函数值为空信息，则部分函数就可按全函数考虑了.

定义 1.1.12 带有最小元的偏序集称为 P 偏序集.

定义 1.1.13 设 P 是偏序集,

1. P 的非空子集 X 称为定向的 (渗透的), 若 X 的每一对元素在 X 中有上界 (下界);

2. P 的定向下集（渗透上集）称为 P 的理想（滤子），有最大元的理想称为主理想，其形如 $\downarrow x$；符号 $Ideal(P)$ 表示 P 的所有理想以及空集组成的集合，且带有集合的包含序关系 $\subseteq$.

3. P 的非空上有界子集称为相容集，以后用符号 $X^{\uparrow}$ 表示 X 是相容集， $a \uparrow b$ 表示 $\{a,b\}^{\uparrow}$.

在计算机科学中，特别在指称语义学中，偏序集应具有某种完备性，用来模拟信息的无穷逼近情形. 常用的有定向完备性，或链完备性，它表示信息在逼近过程中最终可实现所要的结果.

定义 1.1.14 设 X 是一偏序集，

- 若 X 的每个定向集都有最小上界（即并），则称偏序集 X 是定向完备偏序集（简称 dcpo）. 符号 $\vee^{\uparrow}\Delta$ 表示定向集 Δ 的并，在不引起混淆情况下上标 $^{\uparrow}$ 省略；

- 若 X 的每个链都有最小上界，则称偏序集 X 是链完备偏序集（简称 ccpo）.

定义 1.1.15 定向完备的 P 偏序集称为完备偏序集.

例子 1.1.16 （1）自然数平坦状态域 $\mathcal{N}_{\perp}$，真值状态域 $\mathcal{T}_{\perp}$ 以及二点状态域 **2** 都是完备偏序集.