固体力学中的有限元素法

译文集

（下集）

科学出版社

内 容 简 介

有限元素法是随着电子计算机的发展，首先在固体力学领域中蓬勃发展起来的一种强有力的数值计算方法.

本译文集分上、下集，介绍有限元素法的发展动态、基本原理，以及它在三维弹性体、平板、薄壳、振动、稳定性和塑性力学等问题中的应用，并介绍有限元素法对电子计算机所提出的要求.

本译文集可供航空、造船、原子能、土木建筑和机器制造方面的工程技术人员、计算数学工作者及高等院校师生参考.

固体力学中的有限元素法
译文集
（下 集）
《固体力学中的有限元素法译文集》编译组 译
*
科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1977 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1977 年 8 月第一次印刷 印张： 10 1/4
印数：0001—4,870 字数：234,000
统一书号：13031·582
本社书号：853·13—2
定价： 1.05 元

目　录

固体连续介质有限元素法的基础 …………………………… 1

板弯曲分析的有限元素刚度矩阵 …………………………… 35

板的有限元素弯曲分析 ………………………………………… 62

壳体分析 …………………………………………………………… 78

三维弹性力学 ……………………………………………………117

三维弹性介质的矩阵分析　小位移与大位移 ………………145

弹塑性分析方法 …………………………………………………166

动态响应的有限元素分析 ………………………………………211

壳体稳定性分析的有限元素法 …………………………………237

有限元素分析通用程序对计算机的要求 ………………………256

计算机图象在产品结构分析上的应用 …………………………270

结构分析自动系统——ASKA……………………………………300

固体连续介质有限元素法的基础

卞学镄　　董　平

一、引　言

本文的目的是：对固体连续介质有限元素分析中的各种方法，作一个逻辑的分类．这些方法跟固体力学中的几个变分原理有关系．鹫津久一郎的教科书[1]中，详尽地论述了变分原理．我们将证明，变分原理的许多修正方案能够用于有限元素分析．

从历史上来讲，圣维南扭转问题的库兰特 (Courant)[2] 近似解法，应被认为是固体连续介质有限元素分析的第一次处理．该问题是用最小位能原理阐述的，其中假设每个三角形元素上翘曲函数为线性分布．普拉格 (Prager) 和辛格 (Synge)[3] 采用函数空间中的几何表示法，进一步探讨了边值问题的近似解法．这个方法通常称为超圆法，在辛格[4]的教科书中有详细论述，并被其它作者进一步推广．超圆法已被应用于固体连续介质的有限元素理想化．它可以用来对近似解的误差作定量估计，并可看成是众所周知的最小位能原理和最小余能原理的几何形式．

特纳 (Turner) 和他的同事们[5]首先用矩阵位移法求解了平面应力问题，采用的是三角形和矩形元素．刚度矩阵是用所谓的直接法推导出来的，但阐述并未依据整个弹性连续体的场方程．多年之后，联系到发展更一般的有限元素法，弹性

力学中的各种类型的变分原理才得到讨论[6-14]．一个固体连续体被分割成离散元素的集合体之后，在每个元素内假设位移和(或)应力场．应用变分原理得到的方程是代数(或矩阵)方程组，以节点处的广义位移或广义应力，或它们两者作为要计算的未知量．因此，通常也将有限元素法分类为“位移法”、“力法”和“混合法”．

然而，对于描述固体连续介质的分析来说，这种分类法并不完全适当．例如，有许多类型的有限元素法是以节点位移作为未知量的，但仅仅其中的一种才只对单个离散元素中的位移函数作假设．这些方法或者应称为刚度法，因为它们用元素刚度矩阵将广义元素节点力跟节点位移联系起来．这些类型的有限元素法中，有一种是由最小位能原理推导出来的[6]，并依据整个固体上位移场连续这一假设．因此，可以把它归入协调模型．第二种方法可以称之为平衡模型，它是由最小余能原理推导出来的[10]，且建立在假设的平衡应力场的基础上．第三种方法基于修正的余能原理[9,14]，除了在每个元素内假设平衡的应力场外，还沿元素间边界假设协调的位移函数．因此，这个方法可称为杂交法．第四种方法可以由赖斯纳(Reissner)变分原理导出[15]，它基于在整个固体上假设连续的位移场和每个元素的假设应力场．这个方法称为混合法．

显然，可以建立对偶的杂交法，即除了在每个元素内假设连续的位移场外，还沿元素间边界假设平衡的内力．山本善之[13]在1966年提出了这种杂交法，但更早一些，1964年琼斯(Jones)[7]提出的方法，也可认为是这种杂交法．最后，许多类型的有限元素分析，可根据赖斯纳原理导出．不可压缩和几乎不可压缩固体[11]以及板弯曲[12]的赫尔曼(Herrmann)的表达，就是有限元素分析中混合法的例子．壳体的赖斯纳原理的一个特殊形式，也已被普拉托(Prato)[16]移植于有限元素分析．

同时应用有限元素分析中的协调模型和平衡模型，可以建立总变形能的上下界[10,35]，因而可用来判断解的精度．变分法表达也可作为证明有限元素法收敛性的一个手段[14,17]．

在普通的变分法中，通常要求：假设的函数应当具有直到相应欧拉微分方程中出现的最高阶的连续导数．在有限元素分析中，我们在每个离散元素内保留这一要求，但对元素间边界条件的要求放松到这种程度，即函数应具有这样的连续导数：除了满足适当的辅助条件之外，只要变分问题的泛函可定义就行了．因为元素间边界的数目是有限的，对应于放松要求的变分泛函极值的函数，仍将是连续介质的微分方程的精确解．这样一来，对于有限元素分析来说，所谓元素间边界处的协调性条件是这样确定的，即要求变分泛函可定义．因此，对于不同的变分泛函，我们可以有不同的协调性条件．这一点将通过下面讨论的各种有限元素模型予以说明．

二、最小位能原理和协调模型

最小位能原理可以叙述为：总位能泛函 Π_p 的变分为零．Π_p 可以表示成

$$\Pi_p=\int_V\left(\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dV-\int_{S_\sigma}\bar{T}_iu_idS, \quad (1)$$

在这个表达式中，

ε_{ij} = 应变张量分量

E_{ijkl} = 弹性常数

V = 体积

$\bar{F}_i$ = 给定的体力分量

u_i = 位移

S = 表面

$\bar{T}_i$ = 给定的面力

$S_\sigma = S$ 上面力给定的部分

在应用这一原理时，ε_{ij} 用位移写出，且泛函的变分应满足位移协调(连续性)条件.

一个固体被分割成有限个离散元素 V_n时，位能泛函可以写成

$$\Pi_p = \sum_n \left(\int_{V_n} \left[\frac{1}{2} E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i \right] dV - \int_{S_{\sigma_n}} \bar{T}_i u_i dS \right), \quad (2)$$

式中 S_{σ_n} 是第 n 个元素的面力 T_i 给定的那部分边界.

在应用有限元素法时，近似的位移函数 u_i 通过插值函数和每个元素有限个节点处的广义位移来表示. 插值函数应当是这样的，即当两相邻元素的节点位移协调时，沿相应元素间边界的位移也协调. 假设的位移可以用矩阵形式写成

$$\mathbf{u} = [\mathbf{A}_q \mathbf{A}_r] \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

式中 $\mathbf{q}$ 是需要跟相邻元素位移协调的边界节点处的元素广义位移列矩阵，而 $\mathbf{r}$ 是内节点处或不需要跟相邻元素位移协调的边界节点处的位移列矩阵. 加入位移 $\mathbf{r}$，不会影响应当跟相邻元素的位移协调的边界位移.

以平面应力问题为例，列矩阵为

$$\mathbf{u} = \{u(x, y), v(x, y)\}, \quad (4)$$

对于四个角点位于 $(x, y)=(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) 和 $(b, 0)$ 的矩形元素（图 1）来说，

$$\mathbf{q} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}. \quad (5)$$

为了保持元素间边界处位移的连续性，可用双线性插值作为假设的位移函数，即

$$\mathbf{A}_q = \frac{1}{ab} \times \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c} (a-x)(b-y) & 0 & x(b-y) & 0 & xy & 0 & (a-x)y & 0 \\ \hdashline 0 & (a-x)(b-y) & 0 & x(b-y) & 0 & xy & 0 & (a-x)y \end{array} \right]. \quad (6)$$

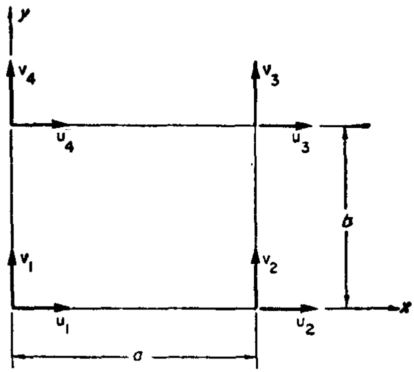

图1　矩形平面应力元素

若引用元素的中心作为内节点(其节点位移是 u_c 和 v_c)，则位移函数

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} & 0 \\ 0 & \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_r\mathbf{r} \qquad (7)$$

不会影响边界协调性条件.

相应的应变分布为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{B}_q\mathbf{B}_r]\begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix}. \qquad (8)$$

对于平面应力问题，$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}$，而 $\mathbf{B}_q$ 和 $\mathbf{B}_r$ 由 $\mathbf{A}_q$ 和 $\mathbf{A}_r$ 的导数得到. 将(8)式代入(2)式,我们得到

$$\boldsymbol{\Pi}_p = \sum_n \left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{k}_{qq}\mathbf{q} + \mathbf{r}^T\mathbf{k}_{rq}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{k}_{rr}\mathbf{r} - \bar{\mathbf{Q}}_q^T\mathbf{q} - \bar{\mathbf{Q}}_r^T\mathbf{r}\right), \qquad (9)$$

式中

$$\mathbf{k}_{qq} = \int_{V_n} \mathbf{B}_q^T\mathbf{E}\mathbf{B}_q dV,$$

$$\mathbf{k}_{rq} = \int_{V_n} \mathbf{B}_r^T\mathbf{E}\mathbf{B}_q dV,$$

$$
\mathbf{k}_{rr} = \int_{V_n} \mathbf{B}_r^T \mathbf{E} \mathbf{B}_r dV,
$$

$$
\overline{\mathbf{Q}}_q = \int_{V_n} \mathbf{A}_q^T \overline{\mathbf{F}} dV + \int_{S_{\sigma_n}} \mathbf{A}_{q\,B}^T \overline{\mathbf{T}} dS, \tag{10}
$$

$$
\overline{\mathbf{Q}}_r = \int_{V_n} \mathbf{A}_r^T \overline{\mathbf{F}} dV + \int_{S_{\sigma_n}} \mathbf{A}_{r\,B}^T \overline{\mathbf{T}} dS.
$$

在上面的表达式中，$\mathbf{E}$ 是弹性常数矩阵，$\overline{\mathbf{F}}$ 和 $\overline{\mathbf{T}}$ 分别是给定的体力与面力，而下标 B 用来表示沿边界计算的 $\mathbf{A}_q$ 和 $\mathbf{A}_r$. 因为不同元素的位移 $\mathbf{r}$ 是独立的，所以关于它们的变分的驻值条件为

$$
\mathbf{k}_{rq}\mathbf{q} + \mathbf{k}_{rr}\mathbf{r} - \overline{\mathbf{Q}}_r = 0. \tag{11}
$$

由方程(11)解出广义坐标 $\mathbf{r}$，并将它代入(9)式，我们得到泛函 Π_p 的下述表达式：

$$
\Pi_p = \sum_n \left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{k} \mathbf{q} - \overline{\mathbf{Q}}^T \mathbf{q} + C_n \right), \tag{12}
$$

式中 $\mathbf{k}$ 和 $\overline{\mathbf{Q}}$ 分别为按下式确定的元素刚度矩阵和等价节点力：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \mathbf{k}_{qq} - \mathbf{k}_{rq}^T \mathbf{k}_{rr}^{-1} \mathbf{k}_{rq}, \\
\overline{\mathbf{Q}} &= \overline{\mathbf{Q}}_q - \mathbf{k}_{rq}^T \mathbf{k}_{rr}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_r,
\end{aligned} \tag{13}
$$

而

$$
C_n = -\frac{1}{2} \overline{\mathbf{Q}}_r^T \mathbf{k}_{rr}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_r = \text{常数}.
$$

不同元素的节点位移 $\mathbf{q}$ 不是完全独立的. 因此，为了将元素节点位移跟独立的总位移列矩阵联系起来，需要作变换

$$
\{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_N\} = \mathbf{J}\mathbf{q}^*, \tag{14}
$$

式中 $\mathbf{J}$ 包括由每个元素的局部坐标到总坐标的变换. 不需要作坐标变换时，$\mathbf{J}$ 就是布尔矩阵. 这样，Π_p 的表达式可以写成

$$
\Pi_p = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{*T} \mathbf{K} \mathbf{q}^* - \mathbf{q}^{*T} \overline{\mathbf{Q}}^* + \sum_n C_n, \tag{15}
$$

式中

$$\mathbf{K}=\mathbf{J}^{T}[\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_N]\mathbf{J}$$

和 (16)

$$\bar{\mathbf{Q}}^{*}=\mathbf{J}^{T}[\bar{\mathbf{Q}}_1\bar{\mathbf{Q}}_2\cdots\bar{\mathbf{Q}}_N]\mathbf{J}$$

分别为整个结构的刚度矩阵和跟假设位移函数协调的广义节点外载荷的列矩阵. 元素刚度矩阵 $\mathbf{k}$ 和总刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 都是正半定的. 然而,若给定某些广义位移,使得分块矩阵的其余部分为正定, 则 Π_p 的表达式是

$$\Pi_p=\frac{1}{2}[\mathbf{q}_1^{*T}\mathbf{q}_2^{*T}]\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}\\ \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{q}_1^{*}\\ \mathbf{q}_2^{*}\end{Bmatrix}-[\mathbf{q}_1^{*}\mathbf{q}_2^{*}]\begin{Bmatrix}\bar{\mathbf{Q}}_1^{*}\\ \mathbf{Q}_2^{*}\end{Bmatrix},\tag{17}$$

式中 $\mathbf{q}_1^*$ 是未知量, $\mathbf{q}_2^*$ 是给定的,而 $\bar{\mathbf{Q}}_1^*$ 是已知的, $\mathbf{Q}_2^*$ 是未知量. 然后用最小位能原理 $\delta\Pi_p=0$ 得到

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1^{*}=\mathbf{Q}_1^{*}=\mathbf{K}_{12}\bar{\mathbf{q}}_2^{*}.\tag{18}$$

应受约束的位移数至少要等于结构的刚体自由度数.

消除不影响相邻元素间协调性的附加广义位移的过程,通常称为静凝聚过程. 根据所用变分原理的性质,假设的位移并不满足内部平衡方程. 附加位移模式的作用是改善每个元素内部这些方程的满足情况. 然而,如果边界位移函数仍未改善的话,那么沿元素间边界平衡条件的满足不会获得改善.

三、最小余能原理——平衡模型与假设应力杂交模型

有限元素分析的平衡模型与假设应力杂交模型,均能够由最小余能原理推导出来,其要取变分的泛函为

$$\Pi_c=\int_V\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}dV-\int_{S_u}T_i\bar{u}_idS.\tag{19}$$

在上式中, C_{ijkl} 是弹性柔顺张量. 应力张量满足平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0,\tag{20}$$

并且与 S_σ 上规定的边界面力相协调，而边界 S_u 上的位移 $\bar{u}_i$ 是给定的.

在应用有限元素法时，不需要假设的应力场在跨过元素间边界处连续,但按照

$$T_i = \sigma_{ij}\nu_j$$

定义的面力却必须保持平衡，这里 ν_j 是边界外法线的方向余弦. 设两相邻元素 'a' 和 'b' 被隔离开来(图 2), 并考虑共同边界 AB 的各自一边上的边界内力分量 $T_i^{(a)}(s)$ 和 $T_i^{(b)}(s)$ ($i = 1, 2, 3$). (为简单起见,用平面应力的例子来说明.) 元素间边界处的平衡方程为

$$T_i^{(a)}(s) + T_i^{(b)}(s) = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{21}$$

方程 (21) 可以看成是约束条件,并能够通过增添拉格朗日乘子项:

$$\int_{AB} \lambda_i(s)[T_i^{(a)}(s) + T_i^{(b)}(s)]ds$$

或 (22)

$$\int_{AB} \lambda_i T_i ds\Big|_{'a'} + \int_{AB} \lambda_i T_i ds\Big|_{'b'},$$

将其引入要取变分的余能泛函中去. 拉格朗日乘子 λ_i 是表面坐标的函数,它应作为附加变量来处理.

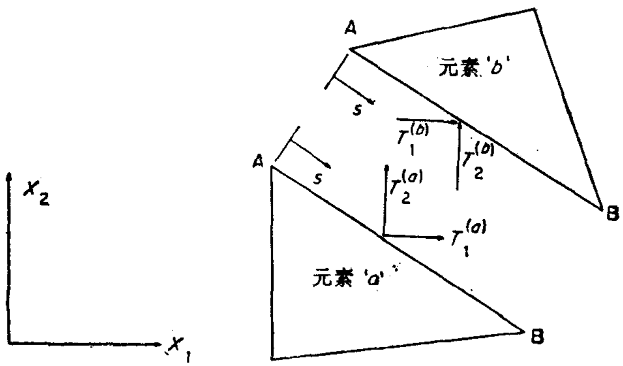

图 2 沿元素间边界的边界内力的平衡

全部元素间边界均考虑到时，余能泛函可以写成：

$$\Pi = \sum_n \left(\int_{V_n} \frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} dV - \int_{S_n} \lambda_i T_i dS - \int_{S_{u_n}} T_i \bar{u}_i dS \right). \tag{23}$$

式中 S_{u_n} 是 V_n 的位移给定的边界，而 S_n 是 V_n 的元素间边界．通过 Π 对 σ_{ij} 和 λ_i 取变分，容易证明拉格朗日乘子 λ_i 等于元素间边界上的位移 u_i，即

$$\Pi = \sum_n \left(\int_{V_n} \frac{1}{2} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} dV - \int_{S_n} T_i u_i dS - \int_{S_{u_n}} T_i \bar{u}_i dS \right). \tag{24}$$

在有限元素解法中，把应力 σ_{ij} 的假设近似函数分成两部分．第一部分由有限个参数 β 组成，应满足齐次平衡方程，而第二部分是具有给定体力项的平衡方程的一个特解．用矩阵形式，应力 σ_{ij} 可以表示成

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}_F\boldsymbol{\beta}_F, \tag{25}$$

式中 $\boldsymbol{\beta}$ 是未知量，而 $\mathbf{P}_F\boldsymbol{\beta}_F$ 是由特解确定．对于其边界上有给定面力的元素来说，第一项中的某些 β 也是给定的． 在这种情况下，所有给定的 β 均放入第二项．

平衡法和杂交法都能够由 (24) 式推导出来，但区别在于对元素间边界上的面积分的处理． 对于平衡模型来说，每个边界上的面力 T_i，可唯一地由与该边界有关的广义载荷 $\mathbf{Q}$ 表示出来，并能够写成

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{Q}. \tag{26}$$

例如，当 $\mathbf{Q}$ 是有限个边界点处的 T_i 值时，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示相应的插值函数． 因为面力也跟假设的应力分布有关，所以它们也能表示成

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{R}_F\boldsymbol{\beta}_F. \tag{27}$$

这样一来，$\mathbf{Q}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 之间存在着形式如

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}^T\boldsymbol{\beta} + \mathbf{G}_F^T\boldsymbol{\beta}_F \tag{28}$$

的唯一关系.

相应的元素广义位移 **q** 按照

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{q}=\int_{\partial V_n}T_iu_i dS=\mathbf{Q}^T\int_{\partial V_n}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{u}_B dS \tag{29}$$

或

$$\mathbf{q}=\int_{\partial V_n}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{u}_B dS \tag{30}$$

来确定,式中

$$\partial V_n=S_n+S_{\sigma_n}+S_{u_n}$$

是 V_n 的全部边界. 这样,广义位移是边界位移的加权积分,而且保持两相邻元素的 **q** 相同并不保证整个边界上的协调性. 可以看出,在平衡模型中,每个广义位移 **q** 仅对两个相邻元素是共同的.

对于杂交法来说,元素间边界上的近似位移,是通过插值函数和有限个边界点处的广义位移 **q** 来表示的,即

$$\mathbf{u}_B=\mathbf{L}\mathbf{q}. \tag{31}$$

因为插值函数 **L** 是应用于每段边界上的,所以要构造能保持元素间协调性的 **L** 比较容易. 不同于平衡模型,这里广义位移 **q** 可以指定于两个以上元素相连接的角节点处.

相应的广义节点力仍按照

$$\mathbf{q}^T\mathbf{Q}=\int_{\partial V_n}T_iu_i dS \tag{32}$$

或

$$\mathbf{Q}=\int_{\partial V_n}\mathbf{L}^T\mathbf{T}dS \tag{33}$$

来确定. 这样一来,广义节点力是边界力的加权积分,而且保持节点处的平衡并不保证整个边界上的平衡. 同平衡模型的另一个重要差别是: 应力和边界位移是分别独立地假设的. 因此,$\boldsymbol{\beta}$ 中的参数数目和广义位移 **q** 的数目,在杂交模型的情

况下是可以独立选择的.

最后,因为杂交法依据假设的边界位移,所以给定的边界应力不再构成受约束的边界条件. 在这一情况下, 泛函Π可以更方便地写成

$$\Pi=\sum_{n}\left(\int_{V_n}\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}dV-\int_{\partial V_n}T_iu_idS+\int_{S_{\sigma_n}}\bar{T}_iu_idS\right), \quad (34)$$

式中

$$\partial V_n=S_n+S_{\sigma_n}+S_{u_n}$$

是V_n的全部边界,而在S_{u_n}上$u_i=\bar{u}_i$.

把(25),(28)和(29)式代入(24)式,以及把(25),(27)和(31)式代入(34)式,都得到以下形状的式子:

$$\Pi=\sum_{n}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{H}_F\boldsymbol{\beta}_F-\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{G}\mathbf{q}+\mathbf{S}^T\mathbf{q}+\mathbf{B}_n\right), \quad (35)$$

式中

$$\begin{aligned}\mathbf{H}&=\int_{V_n}\mathbf{P}^T\mathbf{C}\mathbf{P}dV,\\ \mathbf{H}_F&=\int_{V_n}\mathbf{P}^T\mathbf{C}\mathbf{P}_FdV,\\ \mathbf{B}_n&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_F^T\int_{V_n}\mathbf{P}_F^T\mathbf{C}\mathbf{P}_FdV\boldsymbol{\beta}_F,\end{aligned} \quad (36)$$

而$\mathbf{C}$是弹性柔顺矩阵. 对于平衡模型, $\mathbf{G}$和$\mathbf{G}_F$按照(28)式确定. 对于杂交模型,它们按下式给出:

$$\mathbf{G}=\int_{\partial V_n}\mathbf{R}^T\mathbf{L}dS; \qquad \mathbf{G}_F=\int_{\partial V_n}\mathbf{R}_F^T\mathbf{L}dS. \quad (37)$$

两种模型的矢量$\mathbf{S}^T$也不相同:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^T&=-\boldsymbol{\beta}_F^T\mathbf{G}_F\ (\text{平衡模型}),\\ \mathbf{S}^T&=-\boldsymbol{\beta}_F^T\mathbf{G}_F+\int_{S_{\sigma_n}}\bar{\mathbf{T}}^T\mathbf{L}dS\ (\text{杂交模型}),\end{aligned} \quad (38)$$

式中$\bar{\mathbf{T}}$是给定的边界力.

(35)式关于$\boldsymbol{\beta}$和$\mathbf{q}$的变分为零给出泛函的驻值条件,这样得到

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{H}_F\boldsymbol{\beta}_F - \mathbf{G}\mathbf{q} = 0 \tag{39}$$

和

$$\sum_n (\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{G} - \mathbf{S}^T)\delta\mathbf{q} = 0. \tag{40}$$

由方程(39)解出 $\boldsymbol{\beta}$，并回代至(35)式，我们就能够仅用广义位移 $\mathbf{q}$ 来表示泛函 Π，即

$$\Pi = -\sum_n \left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{k}\mathbf{q} - \overline{\mathbf{Q}}^T\mathbf{q} + C_n\right), \tag{41}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{G}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G} = \text{元素刚度矩阵}, \\ \overline{\mathbf{Q}} &= \mathbf{G}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}_F\boldsymbol{\beta}_F + \mathbf{S}, \\ C_n &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_F^T\mathbf{H}_F^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}_F\boldsymbol{\beta}_F - \mathbf{B}_n. \end{aligned} \tag{42}$$

式(41)的形状同式(12)一样．因此，它也导致同方程(18)一样的矩阵方程．

观察方程(39)可知，如果所有元素的假设应力模式 $\boldsymbol{\beta}$ 的总数小于未知位移 $\mathbf{q}$ 的总数，那么一般来说，将求不出 $\boldsymbol{\beta}$ 的解．即使方程(39)的 $\boldsymbol{\beta}$ 有解，未知量 $\mathbf{q}$ 也不能由方程(39)唯一确定，因为在这种情况下，至少在某些元素中的未知量 $\mathbf{q}$ 的数目必定大于 $\boldsymbol{\beta}$ 的数目．设 M 是应力模式的总数，而 N 是广义位移的总数，其中至少 l 个应受到约束，l 是结构的刚体自由度数．这样，对假设应力模式的要求是 $M \geqslant N - l$．显然，对于假设应力模式最小数目的要求，总是能够为杂交模型所满足，这是由于应力模式和边界位移是独立地假设的．然而，对于某些平衡模型来说，这一要求造成重大困难，在这些平衡模型中，对于一个给定的元素，$\boldsymbol{\beta}$ 的数目和 $\mathbf{q}$ 的数目之间有唯一的关系．

可以证明[18]，上面所述的要求是为了避免任一运动的变

形模式．事实上，采用平衡模型时，每个元素本身可以包含运动变形模式，因此就必须施加足够的约束，以防止运动学的运动．

关于对应于给定体力的应力分布，应当指出一点：董平(Tong)和卞学镄[14]已经证明，当如此选择应力模式时，即 $\mathbf{P}\boldsymbol{\beta}$ 中的多项式是完全多项式，并且其阶次至少同 $\mathbf{P}_F\boldsymbol{\beta}_F$ 中的一样，那么有限元素解将与特解的形式无关．

四、基于假设位移场的杂交法

把最小位能原理应用于有限元素分析时，我们可以假设每个元素的位移函数是独立的，而元素间的协调性条件则可通过在泛函(2)中增添拉格朗日乘子项而引进，即

$$\Pi=\sum_n\left[\int\!\!\int_{V_n}\left(\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dV-\int_{S_n}\lambda_iu_idS-\int_{S_{\sigma_n}}\bar{T}_iu_idS\right].\tag{43}$$

显然，此处拉格朗日乘子 λ_i 是元素间边界内力 T_i，而同(34)式对偶的变分泛函可以写成

$$\Pi=\sum_n\left[\int\!\!\int_{V_n}\left(\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dV-\int_{\partial V_n}T_iu_idS+\int_{S_{u_n}}T_i\bar{u}_idS\right],\tag{44}$$

这里，在 S_{σ_n} 上有 $T_i=\bar{T}_i$．

在有限元素分析中，如果每个元素的假设位移场不保证元素间边界处的协调性，那么只要借助可解释为广义节点力 $\mathbf{Q}$ 的有限个参数，近似地表示出拉格朗日乘子 λ_i（即边界内力 T_i）就行了：

$$\mathbf{T}=\boldsymbol{\Phi}\mathbf{Q}.\tag{45}$$

对应的广义节点位移根据

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{q} = \int_{\partial V_n} T_i u_i dS \tag{46}$$

或

$$\mathbf{q} = \int_{\partial V_n} \boldsymbol{\Phi}\mathbf{u}_B dS \tag{47}$$

来确定．这样一来，广义节点位移是边界位移的加权积分，而保持广义位移的协调性并不保证整个边界的协调性．同别的杂交法一样，位移场和边界内力是独立地假设的．因此，可以独立地选择 $\mathbf{u}$ 中的参数数目和广义力 $\mathbf{Q}$ 的数目．

关于本节的杂交法应当指出几点:

1. 当每个元素内部的假设位移函数包含所有的刚体模式（它们并不进入变形能表达式）时，元素周围的相应的广义力则将通过静力平衡方程联系起来．

2. 与假设应力杂交模型的表达相似，我们能够得出结论：所有元素位移模式的总数应当大于元素间广义力（静不定力）的总数．其物理解释是：位移自由度不足意味着对位移的约束过多．

3. 可以把静不定边界力作为未知量，来建立最终的矩阵方程．象矩阵力法一样，应当这样来选择静不定力，以使矩阵方阵是非病态的．

五、赖斯纳变分原理——混合法

最小位能原理的泛函 Π_p 是用位移场 u_i 来表示的；最小余能原理的泛函 Π_c 是用应力场 σ_{ij} 来表示的．而赖斯纳变分原理的泛函 Π_R 是用 u_i 和 σ_{ij} 两者表示的．Π_R 的表达式如下:

$$\Pi_R = \int_V \left[-B(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \bar{F}_i u_i \right] dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_u} T_i(u_i - \bar{u}_i) dS, \tag{48}$$