大学数学教材 UMT

经管类

概率论与数理统计

四川大学数学学院

邹述超　何腊梅　编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学教材

概率论与数理统计

四川大学数学学院

邹述超　何腊梅　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/邹述超，何腊梅编．—北京：高等教育出版社，2002.8
ISBN 7－04－011360－0

Ⅰ．概…　Ⅱ．①邹…　②何…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062060 号

责任编辑：徐　可　**封面设计**：王凌波
版式设计：杨　明　**责任印制**：陈伟光

概率论与数理统计
邹述超　何腊梅　编

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码　100009
传　　真　010-64014048
购书热线　010-64054588
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京民族印刷厂

开　　本　787 × 960　1/16
印　　张　17.25
字　　数　330 000
版　　次　2002 年 8 月第 1 版
印　　次　2002 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　19.00 元

前　言

本书是按照高等学校经济、管理类概率论与数理统计大纲的要求，根据作者多年讲授该课程的经验和体会编写，并经试用修改而成.

该书的主要特点是,在内容安排上由浅入深、重点突出、难点分散、便于学生接受.每一章的前几节讲述基本概念和基本公式,最后一节是综合例题,主要讲解、分析重要公式的综合应用,便于学生融会贯通.每一章配有 A、B 两套习题,A 套是针对基本方法的训练而编写的,B 套具有一定的综合性,有助于学生对知识的进一步巩固与提高.书末附有习题答案与提示,便于自学本书的读者参考.

本书的适用面广,内容和习题可根据专业的需要选用,如:要求较低的可选每章前几节的内容和 A 套习题,要求较高的可加选综合例题和 B 套习题.若无需要,打 * 号的内容可删去.在编写的过程中,得到四川大学的支持,魏季瑄副教授、谢勉忠副教授提出了很多宝贵意见,在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,书中一定有不少缺点和错误,肯请读者批评指正.

编　者

2002 年 8 月

目 录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

一、随机事件的概念

人们在实践中观察到的现象大体可分为两种类型. 一类是事物的变化服从确定的因果联系，其结果可由某条物理定律或某代数方程、微分方程等得出，这一类现象称为确定性现象. 如在标准大气压下水加热到 100°C 时要沸腾；自由落体运动路程与时间满足方程 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 另一类现象，其结果在事前不可预言，既使在相同条件下做重复试验，所得结果也未必相同，这类现象称为 **随机现象** 或 **偶然现象**. 如掷一枚均匀的硬币，其结果可能是正面向上，也可能是反面向上，并且在落地之前不能预言结果是什么；机床加工一件产品，其结果可能是一级品、二级品或次品，事前不能预言它是什么级别的产品；一只灯泡的寿命是区间 $[0,T]$ 上的某一个值，但在测试之前不能预言它的寿命是多少小时. 乍看起来随机现象不可捉摸，它在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律，具有偶然性，但通过长期观察或大量的重复试验可以看出，这些试验结果是有规律可循的，这种规律称为 **统计规律**. 如将一枚均匀的硬币重复掷上千次就可以看出正面向上的次数约占一半；又如机床在相同的条件下加工出一大批产品，则可以确定出一级品在整批产品中的比例. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门数学学科.

要研究随机现象就要对随机现象进行观察，就要做试验，如果试验满足以下三条，则称为 **随机试验**, 简称 **试验**, 记作 E.

(1) 在相同条件下试验可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，在试验之前可以明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验之前不能预言该次试验会出现哪一个结果，但试验后总是恰好出现这些可能结果中的一个.

例如：

E_1: 掷一枚均匀的硬币，观察出现正面和出现反面的情况，有“正面向上”

和“反面向上”两个可能结果;

E_2: 掷一枚均匀的骰子, 观察出现的点数, 有“出现 i 点”, $i=1,2,\cdots,6$ 的 6 个可能结果;

E_3: 在一批灯泡中任抽一只测寿命, 寿命可能为 t 小时, $0\le t\le T$.

随机试验的每一个可能结果称为 **基本事件**. 在随机试验中, 人们往往关心的是一些较复杂的结果, 如在 E_2 中关心“出现奇数点”是否发生, 在 E_3 中关心“灯泡的寿命小于 1000 h”是否发生. 这些结果包含了多个基本事件, 它们在试验中可能发生也可能不发生, 相对于基本事件, 把它们称为 **复合事件**. 基本事件、复合事件统称为 **随机事件**, 简称 **事件**, 通常记为 $A,B,C,\cdots$ 等. 为了研究的方便(因为本质上不是随机事件), 把每次试验都要发生的事件称为 **必然事件**, 记为 Ω, 把每次试验都不发生的事件称为 **不可能事件**, 记为 ϕ. 如 E_2 中的“点数小于 7”是必然事件, “点数大于 6”是不可能事件.

二、样本空间

为了研究事件之间的关系和运算, 用大家熟悉的集合表示事件是很方便的. 我们把随机试验 E 的所有基本事件所成之集合称为 **样本空间**, 记为 Ω. Ω 中的元素称为 **样本点**, 而随机事件则是样本空间的子集. 因为样本空间 Ω 是由所有基本事件组成, 而在任何一次试验中, 基本事件之一必然要发生, 所以, 把样本空间看成一个事件则是一个必然事件, 而空集 ϕ 则是不可能事件. 因此, 事件之间的关系及运算就可用集合论的知识来解释, 也可用图形来表示.

例 1 在 E_1 中, 令 $\omega_1=\{$ 出现正面 $\}$, $\omega_2=\{$ 出现反面 $\}$, 则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$. 或用 H 表示出现正面, T 表示出现反面, 则样本空间 $\Omega=\{H,T\}$.

在 E_2 中, 若用 i 简记基本事件“出现 i 点”, 则样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, 事件 $\{$ 出现奇数点 $\}=\{1,3,5\}$ 是 Ω 的一个子集.

在 E_3 中, 基本事件是区间 $[0,T]$ 上的实数, 所以, 样本空间 $\Omega=\{t|0\le t\le T\}$, 事件 $\{$ 寿命不超过 1000 h$\}=\{t|0\le t\le 1000\}$ 是 Ω 的一个子集.

例 2 箱中有大小形状相同的产品 10 件, 其中 9 件合格品 1 件次品, 合格品编号为 $1,2,\cdots,9$, 次品编号为 10. 现在从箱中任取两件产品观察号码, 求样本空间 Ω 及事件 $A=\{$ 任取的两件中有一件是次品 $\}$ 的集合表示.

解 设试验是从箱中同时抽取两件产品观察其号码, 令 (i,j) 表示两件产品

的号码，则样本空间 Ω 及事件 A 分别为

$$\Omega=\left\{\begin{array}{r}(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,10)\\(2,3),(2,4),\cdots,(2,10)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(9,10)\end{array}\right\},$$

$$A=\{(1,10),(2,10),\cdots,(9,10)\}.$$

若试验是一次抽一件，无放回抽取两次，则样本空间 Ω 及事件 A 分别为

$$\Omega=\left\{\begin{array}{r}(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,10)\\(2,1),(2,3),(2,4),\cdots,(2,10)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(9,1),(9,2),(9,3),\cdots,(9,10)\\(10,1),(10,2),(10,3),\cdots,(10,9)\end{array}\right\}.$$

$$A=\{(1,10),(10,1),(2,10),(10,2),\cdots,(9,10),(10,9)\}.$$

注意：若试验是有放回抽取两次，则样本空间中还应包括 $(2,2),(3,3)$ 等一些样本点．可见，样本空间与试验的具体要求有关．

三、事件的关系及运算

随机试验 E, 可以有很多随机事件，为了将复杂事件用简单事件表示，以便研究复杂事件发生的可能性，需要建立事件之间的关系和事件之间的运算．

设试验 E 的样本空间为 Ω,$A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$ 等都是 E 之下的事件．

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B**包含** 事件 A. 记为

$$A\subset B.$$

若事件 B 包含事件 A, 同时事件 A 也包含事件 B, 则称事件 A 与 B**相等**, 记为

$$A=B.$$

2. 事件的和 (并)

“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”，这一事件称为事件 A 与事件 B 之**和**(或 **并**), 记为

$$A\bigcup B.$$

类似地，"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记为

$$A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

3. 事件的积（交）

"事件 A 与事件 B 同时发生"，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**积**(或**交**)，记为

$$AB \text{ 或 } A \bigcap B.$$

类似地，"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记为

$$A_1 A_2 \cdots A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

类似地，事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和与积分别记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i; \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

4. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"，这一事件称为事件 A 与事件 B 之**差**, 记为

$$A - B.$$

5. 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A \bigcap B = \phi$, 则称事件 A 与事件 B**互不相容**(或称 **互斥**).

基本事件之间是互不相容的.

6. 对立事件

对于事件 A, 称事件"A 不发生"为 A 的 **对立事件**, 记为 $\overline{A}$.

易见，$A\overline{A} = \phi, A \bigcup \overline{A} = \Omega, \overline{A} = \Omega - A, \overline{\overline{A}} = A; A - B = A\overline{B} = A - AB; A \bigcup B = A \bigcup (B - A)$.

7. 完备事件组

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容的事件，并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$

构成一个 **完备事件组**.

容易验证事件的运算满足如下性质:

1° 交换律 : $A\bigcup B = B\bigcup A, A\bigcap B = B\bigcap A$;

2° 结合律 : $A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C, A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C$;

3° 分配律: $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C), A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

4° 德摩根律 : $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcap B} = \overline{A}\bigcup\overline{B}$.

因事件是 Ω 的子集, 故不难看出, 事件的关系及运算与集合的关系及运算是一致的, 为了方便对照, 列出表格和图示 (见表 1.1 和图 1.1).

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\bigcup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\phi$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素

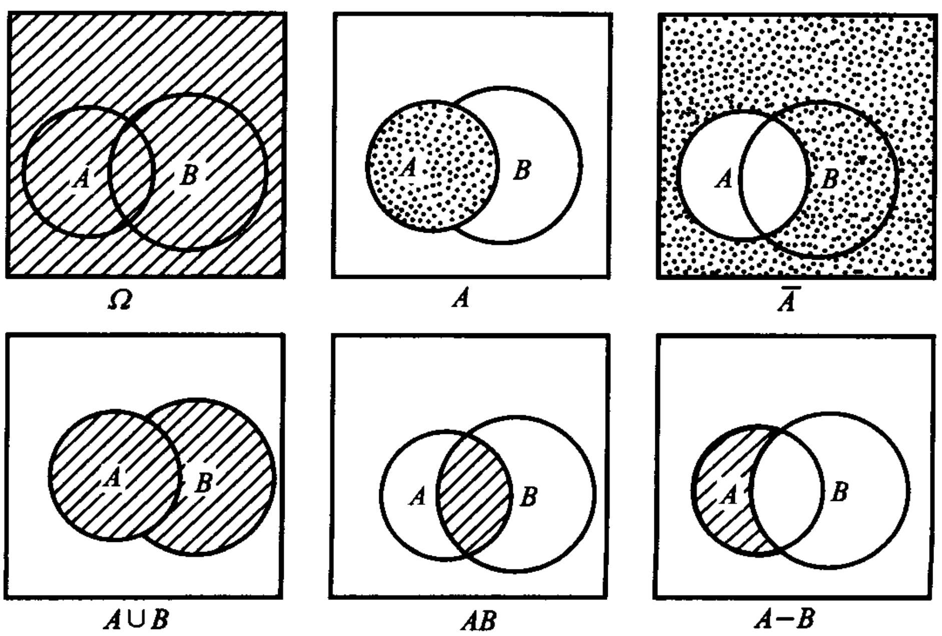

图 1.1

例 3　在 E_2 中，若 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{5,6\}$, 则

$$A\bigcup B=\{1,2,3,4,5\},\quad A-B=\{2,4\},\quad AB=\{1,3\},$$
$$A\bigcup C=\Omega,\quad AC=\phi,\quad \overline{A}=C.$$

下面举例说明如何将复杂事件拆分成一些简单事件的运算.

例 4　对一批产品进行抽样检验，一次抽取一件，连续抽取三次． A_i 表示第 i 次抽到合格品 (i=1,2,3), 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

$A=\{$ 第一次和第三次均抽到合格品 $\}$;

$B=\{$ 只有第一次抽到合格品 $\}$;

$C=\{$ 只有一次抽到合格品 $\}$;

$D=\{$ 至少有一次抽到合格品 $\}$;

$E=\{$ 至多有一次抽到合格品 $\}$.

解　$A=A_1\overline{A}_2A_3\bigcup A_1A_2A_3$;

$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

$C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\bigcup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\bigcup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;

$D=A_1\bigcup A_2\bigcup A_3$;

$E=\overline{A}_1\overline{A}_2\bigcup\overline{A}_1\overline{A}_3\bigcup\overline{A}_2\overline{A}_3$.

例 5　市场上供应的灯泡是由甲、乙、丙三个厂家生产的，现任买一只灯泡，若用 A_1 、 A_2 、 A_3 分别表示灯泡是甲、乙、丙厂生产的， B 表示“任买的一只是合格品”，则事件 B 可表示为：

$$B=A_1B\bigcup A_2B\bigcup A_3B,\quad \text{且}\quad (A_iB)\bigcap(A_jB)=\phi,i\neq j.$$

这里 A_1,A_2,A_3 是一个完备事件组，它将 Ω 作了一个分划，当然也对复杂事件 B 作了一个分划.

§1.2　概　率

一个随机试验中有很多随机事件，人们常常关心的是某些事件发生的可能性有多大. 我们把度量事件发生的可能性大小的一个数值称为事件的概率，记为

$P(A)$. 这一节将从不同的角度给出概率的定义.

一、统计定义

设在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 n_A 次，则称比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的 **频率**. 一个随机事件在少数几次试验中，事件的频率差异是较大的，如将一枚均匀的硬币掷十次，事件 $A=\{$ 出现正面 $\}$ 的频率可能是 $\dfrac{4}{10}$、可能是 $\dfrac{7}{10}$，但当试验次数增多时，事件 A 的频率在 0.5 的左右摆动，而且逐渐稳定于 0.5(见表 1.2).

表 1.2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.5070
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
K. 皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

通过大量重复试验得到事件的频率稳定于某个常数的例子还很多. 随机事件的频率具有稳定性这个现象使我们有理由认为：客观上存在一个由事件 A 的特性所确定的常数 p, 使事件 A 的频率在它的附近摆动. 因此，这个常数 p 能反映事件 A 发生的可能性的大小，于是我们抽象出概率的统计定义.

定义 1.1　在相同条件下重复做 n 次试验，当试验次数不断增加时，事件 A 的频率 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 逐渐稳定于某个常数 p , 则称常数 p 为事件 A 的 **概率**, 记为 $P(A)$.

概率的统计定义是一种描述性定义，不能用定义计算 $P(A)$, 实际中可用事件 A 的频率 $f_n(A)$ 来作为 $P(A)$ 的近似值.

概率有以下性质：

1°　$0\le P(A)\le 1$;

2°　$P(\Omega)=1$;

3°　若事件 A,B 互不相容，则

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B).$$

对于 1°, 因为 $0\le n_A\le n$, 所以 $0\le f_n(A)\le 1$, 于是有 $0\le P(A)\le 1$; 2° 是很显然

的；对于 3°, 设在 n 次试验中，事件 A,B 分别发生 n_A,n_B 次，则当 A,B 互不相容时，事件 $A\bigcup B$ 发生 n_A+n_B 次，频率 $f_n(A\bigcup B)=\dfrac{n_A+n_B}{n}=\dfrac{n_A}{n}+\dfrac{n_B}{n}=f_n(A)+f_n(B)$. 于是有， $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.

二、古典定义

现在讨论一类比较简单的随机试验，事件的概率可以直接计算出来. 这类试验具有以下两个特征:

(1) 样本空间 Ω 中的样本点数是有限的，即每次试验只有有限个可能结果: $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$；

(2) 各基本事件 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$ 发生的可能性相等，即 $P(\omega_i)=\dfrac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$.

具有以上两个特点的试验称为 **古典试验**, 相应的问题称为 **古典概型**.

例如，在掷硬币的试验中，样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ 中只有两个样本点，只要硬币是均匀的，就可以认为 ω_1 和 ω_2 发生是等可能的.

又如，在掷一枚均匀骰子的试验中，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 中只有 6 个样本点，并且出现每一点的可能性是相等的.

古典概型中事件的概率定义如下:

定义 1.2 设古典概型的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$, 事件 A 包含 m 个基本事件，即 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$, 则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{A 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.1}$$

古典概率也有如下三条性质.

1° $0\le P(A)\le 1$;

2° $P(\Omega)=1$;

3° 若事件 A,B 互不相容，则

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B).$$

1° 和 2° 是显然的. 对于 3°, 若 A,B 分别包含 m_1,m_2 个基本事件，由于 A,B 互

不相容，则 $A\bigcup B$ 包含 m_1+m_2 个基本事件，于是有

$$P(A\bigcup B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

从定义看出，在计算概率 $P(A)$ 时，不需要具体找出样本点，只需要综合运用计数原理、排列组合公式计算出 Ω 中的样本点数 n 和 A 所包含的样本点数 m 即可.

例 1　设 10 件产品中有 6 件正品， 4 件次品. 每次从中任取 1 件，无放回抽取 3 次，求下列事件的概率:

(1)$A=\{$ 第 3 件是次品 $\}$;

(2)$B=\{$3 件中恰有 1 件次品 $\}$.

解 (1) 由于试验是无放回抽取，而且事件 A 又是有顺序要求的，因此应该用无重复排列公式计算 n 和 m. 从 10 件产品中无放回地取 3 件的所有可能取法有 $A_{10}^3=10\times 9\times 8=720$ 种 (基本事件总数 n). 由于产品的大小和形状相同，抽取是随机的，从而这 720 种取法是等可能的. 在这 720 种取法中，第 3 件是次品的不同取法有 $A_4^1\times A_9^2=4\times 9\times 8=288$ 种 (事件 A 所包含的基本事件数 m), 所以

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4\times 9\times 8}{10\times 9\times 8}=\frac{4}{10}.$$

(2) 由于事件 B'没有顺序要求，而且每次取 1 件无放回取 3 次等价于一次从中取 3 件，因此可以用组合公式 (当然也可用无重复排列公式) 计算 n 和 m. 从 10 件产品中任取 3 件的所有可能取法有 C_{10}^3 种 (基本事件总数 n), 其中， 3 件中恰有 1 件是次品的不同取法有 $\mathrm{C}_4^1\times\mathrm{C}_6^2$ 种 (事件 B 所包含的基本事件数 m), 所以

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{C}_4^1\times\mathrm{C}_6^2}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{1}{2}.$$

本例的结果可以推广到一般情形: 设 $a+b$ 件产品中有 a 件次品 b 件正品，从中无放回抽取 $k(\leq a)$ 件，第 k 次抽到次品 (A) 的概率为

$$P(A)=\frac{a}{a+b};\tag{1.2}$$

抽得的 k 件中恰有 r 件次品 (B) 的概率为

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_a^r\times\mathrm{C}_b^{k-r}}{\mathrm{C}_{a+b}^k}. \tag{1.3}$$

例 2 设有一辆公共汽车要经过 10 个站，现车上有 5 个人，每人在每站下车的是等可能的. 计算下列事件的概率:

$A=\{$ 前 5 个站各有 1 人下车 $\}$;

$B=\{$ 在指定的一个站恰有 3 人下车 $\}$;

$C=\{$ 有 3 人在同一站下车 $\}$.

解 5 个人在 10 个站下车的所有可能下法共有 10^5 种.

(1) 前 5 个站各有 1 人下车的下法有 5! 种，所以

$$P(A)=\frac{5!}{10^5}.$$

(2) 事件 B 相当于从 5 个人中选 3 个人在指定的一个站下车，而剩下的 2 个人在其余的 9 个站下车，其下法有 $\mathrm{C}_5^3\times 9^2$ 种，所以

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_5^3\times 9^2}{10^5}=\frac{9^2}{10^4}.$$

(3) 在事件 B 的基础上还应考虑车站的 10 种选法，即 $m=10\times\mathrm{C}_5^3\times 9^2$, 所以

$$P(C)=\frac{10\times\mathrm{C}_5^3\times 9^2}{10^5}=\frac{9^2}{10^3}.$$

三、概率的一般定义

前面介绍的概率的统计定义、古典定义直观，容易被人们接受. 统计定义中的概率和古典概率都具有类似的三条性质，但都带有局限性，统计定义必须借助于大量重复试验才能得到概率的近似值，而古典概率又是以等可能性和有限个基本事件为基础，实际中还有许多不具有这种条件的问题. 为了建立一般数学概念，必须进一步抽象，把它们的三条本质相同的属性抽象出来作为概率的一般定义.

定义 1.3 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间. 对于每一个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$, 称为事件 A 的 **概率**, 如果它满足以下三条