數學第九册目錄

上　册　　數　　　　　　　　　　　　　　　　頁數

下　册　　體

上 册　　數

一元二次方程式

到目前爲止，我們所解過的定數方程式裏，未知數 x 幾乎都 831
是沒有乘冪的。例如 $x-4=6$，這個沒有乘冪的 x，並不表示等於 x^0 而表示等於 x^1，(參閱第四册中之〔351〕節)。因此，以前解過的那些定數方程式，都叫做**一次方程式**。（參閱第八册中之〔753〕節）。

二次方程式亦稱平方方程式；式內如僅出現二次方，卽含有乘冪 2 之未知數者，稱爲純二次方程式（例如：$x^2-9=0$）；如同時出現二次及一次方之未知數者，稱爲雜二次方程式（例如：$x^2+x-6=0$）

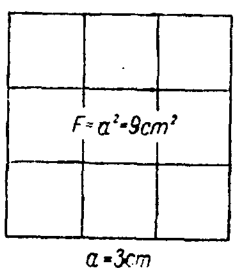
α) 純二次方程式

I. 正數平方根

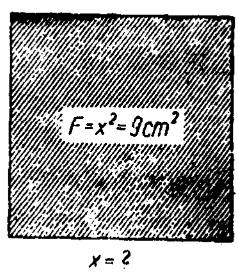
1) 幾何意義

3^2 所以叫做“3 的二次冪”或“3 的平方”，是因爲 $3^2=9$ 832
可以當作一塊其邊爲 3 的正方形面積之尺度數看待的緣故。參看〔832a〕圖：$(3cm)^2=9cm^2$，同理，x^2 也是一塊正方形面積，而其邊長却是 x。

在純二次方程式 $x^2=9cm^2$（參看〔832 b〕圖）中，正方形的面積 F 是指定爲 $9cm^2$。求此方程式之未知數 x，在幾何的意義上，無非是指不用量的方法，却用計算法



832 a



832 b

求出這一正方形的邊長。簡而言之：

已知正方形的面積，所求的是邊長。

凡學過由一邊可以求正方形面積之人，也一定知道如何反過來從面積去求邊長：即用與自乘相反的算法，由已知方程式之兩邊開平方(參閱第二册中之〔109〕節)。例如$x^2=9cm^2$ 解法：$\sqrt[2]{x^2}=\sqrt[2]{9cm^2}$；答案： $x=3cm$。(凡開平方，往往略去根指數 2，各位是曉得的。)

2) 算術意義

833 在純算術的等式中，只計算數目，從不顧及面積與長度單位或其他單位。例如 $x^2=+9$：此未知數 x 的求法，是要使其二次冪等於$+9$；換句話說：某數的平方，或某數自乘等於$+9$，求此數！

各位當知答數爲 $x=\sqrt{+9}=+3$或-3，合併寫成$\sqrt{+9}=\pm3$，因 $(\pm3)^2=(+9)$；參閱（第二册中之〔115〕節）。就幾何意義言，這方程式只有一解，但就算術意義言，却有二解（也稱爲二根），卽$+3$及-3。

各位要時常加以注意的，是算術的二次方程式必有二根！

方程式 $x^2=+9$ 的兩個根可以分開來寫，卽加上指數以示區別： $x_1=+3$；$x_2=-3$；或合起來寫： $x_{1;2}=\pm3$.；又或簡寫爲$x=\pm3$。

一般的寫法： $x^2=q$；$x=\sqrt{q}$；$x_1=+\sqrt{q}$；$x_2=-\sqrt{q}$；或$x=\pm\sqrt{q}$

（如果曉得每一平方根可爲正亦可爲負，則只寫$\sqrt{q}$ 而不附以正負號也就够了。）

用何方法算出平方根？

a) 若 x^2 是令人一望而知的一個平方（例如 $x^2=16$），則用"心算"便可開方，意卽我們記住有關的乘法定律($4\times4=16$) 卽可；求得答數時更不要忘記其負根，卽$x=\pm4$。再擧三個例子：

$x^2=25$；$x=\sqrt{25}=\pm5$；因爲$(\pm5)^2=+25$；

$x^2=144$；$x=\sqrt{144}=\pm12$；因爲$(\pm12)^2=+144$；

$x^2=0.25$；$x=\sqrt{0.25}=\pm 0.5$； 因為$(\pm 0.5)^2=+0.25$（參閱第五册中之〔437〕節）。

還有一些淺近的平方公式，式內平方是由普通數組成之和：

$x^2=a^2+2ab+b^2$；$x=\pm(a+b)$； $x_1=a+b$；$x_2=-(a+b)=-a-b$；參閱第二册中之〔147〕節。

$x^2=a^2-2ab+b^2$；$x=\pm(a-b)$；$x_1=a-b$；$x_2=-(a-b)=b-a$；參閱第二册中之〔147〕節。

在下面兩個和數中，各位也許容易看出其平方數：

$x^2=4a^2+12ab+9b^2$；$x=\pm(2a+3b)$；$x_1=2a+3b$；

$x_2=-(2a+3b)=-2a-3b$；

$x^2=9a^2-24ab+16b^2$；$x=\pm(3a-4b)$；$x_1=3a-4b$；

$x_2=-(3a-4b)=4b-3a$；參閱第二册中之〔136〕節。

b) 若x^2不是一望而知的平方，却以一定數字表示者，則計算其平方根之法，共有 1）借助於對數表（參閱第六册中之〔604〕節）；2）使用計算尺（參閱第六册中之〔606〕節）；3）利用含有平方根之算表（參閱第六册中之〔615〕節）。但不要忘記在根前加正負號！

習題：

求下列各方程式中之 x：

1）$x^2=20$；　2）$x^2=200$；　3）$x^2=4.6$；

4）$x^2=46$；　5）$x^2=20800$；　6）$x^2=208000$；

7）$x^2-144=0$；　8）$x^2-3364=0$；　9）$676=x^2$；

10）$0=9801-x^2$；　11）$x^2-7.29=0$；　12）$3.24-x^2=0$；

13）$x^2=0.1521$；　14）$x^2=0.0001$；　15）$x^2=0.001$；

16）$x^2-\frac{1}{4}=0$；　17）$\frac{4}{9}-x^2=0$；　18）$x^2=0.36$；

19）$x^2-\frac{3364}{3481}=0$；　20）$x^2-1=0$；　21）$x^2=9a^2$；

22）$x^2=b^2-6ab+9a^2$；　23）$x^2=b^2+6ab+9a^2$；

24) $x^2=9-6m+m^2$；

25) $x^2-4a^2-12ab-9b^2=0$；

26) $x^2-36a^2-12a-1=0$；

27) $x^2+56=200$；

28) $60-8=x^2$；

29) $\frac{x^2}{2}=8$；

30) $24-x^2=0.5$；

31) $x^2=a^2+b^2$(要加小心！)；

32) $x^2+b^2=a^2-2ab$；

33) $3x^2-75=0$；

34) $2x^2-70=5-x^2$；

35) $4x^2+3=103$；

36) $3x^2-8=139$；

37) $319=5x^2-1$

38) $\frac{1}{8}x^2-1=7$

39) $\frac{x^2}{25}-3=1$；

40) $0.1x^2-0.4=14$；

41) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$；

42) $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}=0$；

43) $5x^2-\frac{1}{25}=\frac{4}{25}$；

44) $ax^2-b=0$；

45) $x(x-2)+2(x-4)=8$；

46) $(3x+4)\cdot x-4\cdot(x-2)=20$；

47) $5x^2+3(x-25)-3x=0$；

48) $(x+2)^2=58-(x-2)^2$；

49) $(x-3.24)\cdot(x+3.24)=0$；

50) $(x+1.057)\cdot(x-1.057)=0$

51) $\frac{3+x}{3-x}=\frac{x+4}{x-4}$；

52) $\frac{10+11x}{10x+22}=\frac{1}{x}$；

53) $\frac{3-x}{1-3x}=\frac{1-4x}{4-x}$

II. 負數平方根

834 設已知定數方程式 $x^2=(-9)=-9$，欲如〔832〕節將其幾何意義表示出來，是不可能的。

我們暫且先照上面〔832〕—〔833〕兩節所述之方法作算術的解答，也就是用一根號表示應開之平方爲： $x=\sqrt{-9}$。但（-9）的方根是什麼？或許以爲是 3，但正 3，還是負 3 呢？——兩個都不對！因爲 $(+3)^2=+9$ 及 $(-3)^2=+9$；參閱第二册中之〔115〕節。由此可知，用現在所有的方法都是不能求得$\sqrt{-9}$，或一般言之，不能求得負數的平方根的。

這算題自古以來就使許多數學家非常頭痛。他們首先想到，

可以將（-9）寫成乘積：$(-9)=9\times(-1)$，參閱第二册〔112〕節；是則$\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}$，由此便可開一乘積之方，即分別計算每個因子之根（參閱第六册中之〔585〕節）：

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=\pm3\times\sqrt{-1}$$

同樣，如：$\sqrt{-20}=\sqrt{20\times(-1)}=\pm4.472\times\sqrt{-1}$ 依此類推。

這當然並不是隱藏於$\sqrt{9}$ 此一寫法後面之謎之解，因爲未解之部分問題$\sqrt{-1}$ 依然存在！但已使算題簡化，僅剩下如何處理$\sqrt{-1}$ 的問題了。現在我們對此問題就想試行處理一下。

各位只要再作簡單的驗算，便可斷定$\sqrt{-1}$不等於±1。誰願意作此驗算，誰就能以此斷定爲滿足，亦卽認爲對於$\sqrt{1}$ 是無法繼續算下去的。計算時如發現有$\sqrt{-1}$ 這一項，只有不予更動，讓它留在那裏。例如$\sqrt{-100}=\sqrt{100\times(-1)}=\pm10\times\sqrt{-1}$，就好像 $3\cdot a$ 或 $a+b$ 等不能再往下計算一樣。

只有在一個算式好比出現 $(-1)^2$ 之時，可以往前再走一步，因爲根指數 2 的意義與冪指數$\frac{1}{2}$相同（參閱第四册中之〔376〕以下各節），故可比照第六册〔593〕節所講，寫爲：$\sqrt[2]{-1}=(-1)^{\frac{1}{2}}$，因此$(\sqrt[2]{-1})^2=[(-1)^{\frac{1}{2}}]^2=(-1)^{\frac{1}{2}\cdot2}=(-1)^1=(-1)$。但須注意者，以前學過的不論正數或負數，其平方總是正數。因此，各位也許會以爲：不管上式方括弧內的數是正或負，——其平方總應該是正數。但各位沒有注意到，在方括弧內那個悶葫蘆似的數$\sqrt{-1}=(-1)^{\frac{1}{2}}$，各位對之倘無可奈何啊！ 所以要請各位採取上述的求證步驟，由此步驟便可獲致下面的結果：

$$\boxed{(\sqrt{-1})^2=-1}$$

我們在此，暫且回顧一下！上面已經說過，我們對於$\sqrt{-1}$是不能再計算下去的；此數目前對於我們已成爲不可思議的東西。但有一點是已經確定了的，即由此數之平方可得習見之數爲(-1)。因此，可以寫出有關$\sqrt{-1}$ 初步的定義：

$\sqrt{-1}$ 是如此之數，其平方等於 (-1)。

似此定義當然不能令人完全滿意的，因爲此謎仍然無法獲得解答；但暫時只能說到這裡爲止，等到下面〔836〕節及第 24 册中再作詳盡的研討。

835 若計算時時常出現$\sqrt{-1}$，則須採用一個簡單符號代替之，普通是用小寫字母 i 。是則所謂 i，卽指$\sqrt{-1}$ 而言。

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

例如 $3\times\sqrt{-1}$ 可簡單寫成 $3\cdot i=3i$。

這裏的 i，並不是可以代表任何實數的一個普通數（參閱第一册中之〔3〕節）而只是$\sqrt{-1}$，亦卽 $(-1)^{\frac{1}{2}}$ 的簡略符號；它所代表者僅是一個其性質尙未爲我們所完全了解的數。

我們實在用不着告訴各位，一般採用 i 以代替$\sqrt{-1}$ 者，是因爲它是 "imaginär" 的第一個字母。此字乃由拉丁文而來，含有"想像"之意。數學上引用imaginär(中譯虛數)一詞，只是習慣用語，並無其他用意。普通稱 $i=\sqrt{1}$ 爲**虛數一**，或**虛數單位**。

上面已經討論過的一條重要等式$(\sqrt{-1})^2=(-1)$， 現在可以寫爲另一簡單式子：

$$\boxed{i^2=-1}$$

以下若干重要算式裏，仍然使用 i 這個符號。

首先計算 i 的三次及四次乘方。各位要重複的加以計算，使能眞正了解以下所述。（參閱第五册中之〔418〕節及〔419〕節）！

$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^{2+1}=(\sqrt{-1})^2\times(\sqrt{-1})^1=(-1)\times\sqrt{-1}$$

；或用簡略的寫法：$i^3=i^{2+1}=i^2\times i^1=(-1)\times i=-i$

可見 i 的三次方仍然有 i，不能像 i^2 一樣可將 i 消去。——各位要特別注意的，是由 i 的三次冪（或稱立方）計算而得之 i，含有負號！

$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2\cdot(\sqrt{-1})^2=(-1)\cdot(-1)=(+1)$；或簡寫爲；

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 =(-1)\cdot(-1)=(+1)$$

可見 $i=\sqrt{-1}$ 的四次方是我們所熟知的 $(+1)$；但這不能用作 i 的定義，比方說：i 是這樣的一個數，其四次方等於$(+1)$；因爲 $(+1)^4$ 和 $(-1)^4$一樣可求得 $+1$。

茲將以上各式並列在一起，使能一目瞭然：

$$\boxed{i^2=-1\,;\quad i^3=-i\,;\quad i^4=+1}$$

對於 i 的說明不感滿意，且不願等到第 24 冊才繼續討論虛數的讀者，可先看本〔836〕節；其他的讀者則不看本節亦無妨碍。 836

前一類讀者不但想知道 i 的二次冪（即平方）等於-1，而且還想看清虛數是否可以佔據一個確定的位置，如同$+1$ 及 -1 在數字直線上各佔有其位置一樣；尤其想知道**是否可將虛數納入冪的定義之中**。

如何將虛數納入冪的定義之中，暫且不加敘述；但對虛數的位置問題，却有意在此向各位作滿意的答復。

若先就已知之 (-1) 作更深入的研究，則對 $i=\sqrt{-1}=(-1)^{\frac{1}{2}}$ 之涵義必可獲得進一步的了解。請各位先復習第四册中〔350 至 352〕節！

任何一個乘方，(包括 $(-1)^1$ 在內) 其演算的出發點都是正 1（通常對于這點是不特別令人觸目的）。在 $(-1)^1$ 中之指數 1，是要求須在出發點正 1之前附上**一個因子**，而此因子之值是決定於冪底數的，其值應爲(-1)。由此可得下面的寫法（只是溫故而已）：

$$(-1)^1=(-1)\times(+1)=(-1)$$

在有所指的乘冪 $(-1)^{\frac{1}{2}}$ 中，其指數 $\frac{1}{2}$ 所要求的自乘步驟不是一個整數的自乘，却是半數的自乘。但什末叫做“半數的自乘”呢？我們已在第四册中〔376…〕各節對此有過具體的分析。

例如 $+100$，可由 $+1$ 出發，用一“大步”到達，即 $100=100\times1$。

這一大步可分成兩步來走，但此二步**也應該是自乘的步驟**，亦即以不變的因子乘“出發壹”

$$100^1=x\cdot x\cdot 1=10\times10\times1$$

在$\sqrt{100}=100^{\frac{1}{2}}$ 這算式內，是要求由到達 100 的兩個自乘步驟中只完成一個步驟，即 $100^{\frac{1}{2}}=10\times1=10$

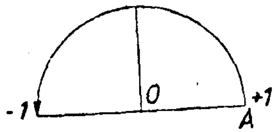
到目前爲止，只把大家所熟悉的重新溫習了一遍而已。——現在的問題是在 $(-1)^1=(-1)\times(+1)$ 此一算式是否也可分成兩個自乘步驟來實施？所謂兩個步驟，即在正的“出發壹”之前要放兩個相同的因子，而由此相乘便可到達最終目標爲 (-1)，亦即要解下面的定數方程式：

$$(-1)=x\cdot x\cdot(+1)$$

上式中的因子 x 究有多大？

我們對於這種難解的問題，想用圖解法作一嘗試。

在第二册中〔113〕節已經說明，如何應用乘法的運算將$(+1)$變成(-1)，(參看〔836*a*〕圖)：



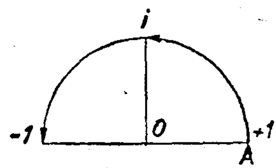
836 a

以 O 點爲中心，使射線 OA 向左旋轉 180°。這種工作的進行，並非貫穿 O 點的位置〔否則便等於减法了：$(+1)-2=(-1)$〕，却依圓弧繞過 O 點；這就相當於以前詳加分析的乘法：$1\times1=1$，不過方向變換了，即在算出的乘積中帶來相反的前號。這一轉變，我們已在有所指的乘積中明白指出，即將乘數附以負號：

$$(-1)\cdot(+1)=(-1)。$$

此一數字射線 OA 旋轉 180°，實即相當於$(-1)\cdot(+1)=(-1)^1$的自乘；似此乘冪也就是我們要詳加研討的。在這種自乘中實施的"自乘步驟"，其意義就等於圖解中的 180° 旋轉。

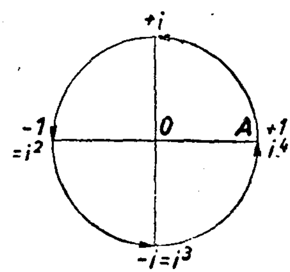
現在各位當能明白，如何使$(-1)^{\frac{1}{2}}$ 在圖中顯示出來。其實是將$(-1)^1$這個題目分爲兩個"一半步驟"來做，也應該是自乘的步驟，即在我們現在所作的圖解中等於 OA 射線的旋轉。



836 b

顯然所謂"一半步驟"，在我們的圖解中是指旋轉 180° 的一半，亦即旋轉 90°，而$(-1)^{\frac{1}{2}}$ 則相當於以$(+1)$爲起點的兩個半步中之第一步，亦即第一個由 0° 至 90° 之旋轉。

各位至此諒必已經了解，爲什末我們有理由在〔836*b*〕圖中對虛數 $i=(-1)^{\frac{1}{2}}$ 給以一定的位置。



836 c

由〔836*c*〕圖更可看出這種圖解法是有其眞實性的：相當於由 0° 至 180° 之旋轉者是 $i^2=-1$，相當于由 0° 至 270° 之旋轉者是 $i^3=-i$，相當於由 0° 至 360° 之旋轉者是 $i^4=+1$。圖中 OA 一軸爲**實數軸**，而與其垂直的軸則爲**虛數軸**，此軸與直角座標系之 Y 軸完無關係（參閱第八册

中之〔748〕節)。實數軸上之數爲**實數**，虛數軸上之數則爲**虛數**。

習題： 837

求下列各方程式中之 x！

1) $x^2=-49$； 2) $x^2+121=0$； 3) $x^2+5776=0$；

4) $29.16+x^2=0$； 5) $x^2+67=0$； 6) $x^2-10=0$；

7) $x^2+10=0$； 8) $6x^2+96=0$ 9) $\frac{x^2}{6}+6=0$；

10) $ax^2+100=0$

β) 雜二次方程式

上面已經說過，純二次方程式中只出現 x 的二次冪，而雜二次方程式中則含有未知數 x 的二次及一次冪。 838

各位對於這種方程式，可用簡便方法自行列出。 例如： 令 $x=5$ ，將方程式左邊任意定爲 x^2-3x，然後以 5 代替 x, 算出此邊之值：$x^2-3x=5^2-3\times5=10$。方程式 $x^2-3x=10$ 的一根爲 $+5$。(試作驗算！) 此方程式是否還有第二個根，各位未能斷定。或令 $x=-7$，各位列出方程式 $x^2+5x=14$ 之後，可知其解爲 $x=-7$。(試作驗算！)

到目前爲止，各位只認識雜二次方程式至少有一個根 (或稱一解)，而且是隨便假定的 (例如 $+5$ 或 -7)；故所組成的雜二次方程式也沒有一定的形式。

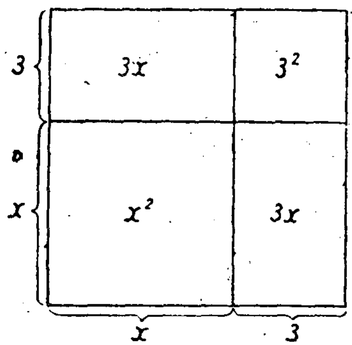
但通常各位碰到的題目與此相反：已知一個雜二次方程式，好比 $x^2+x=132$，而求各位未知之根。

爲此可仿照〔832〕節的圖示法，作進一步的說明：此次不由一個邊長爲 x, 面積爲 x^2 的正方形出發，却由另一正方形出發，其邊長爲兩數之和，例如 $x+3\ cm$，其面積爲： $x^2+2\times3x+3^2$，相當於大家熟悉之公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

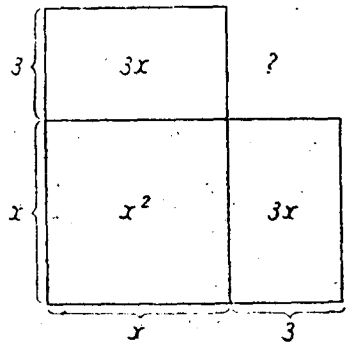
現假設在一題目中已知如此組合之正方形，其總面積爲 $F=64cm^2$ 參看〔838a〕圖 ，這是依比例尺 1：2 畫出來的。從而求未知線段 x 之值，不用量，却用計算的方法。根據〔838a〕圖，假如已知方程式爲 $x^2+6x+9=64$，則此方程式的左邊顯然合

於 $(a+b)^2=\cdots$的公式，因此可求：

$\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{64}$；　$x+3=8$



838 a



838 b

（在使用圖示法的過程中，$\sqrt{64}$ 的負根可略而不計）。

卒之由 $x+3=8$ 求得 $x=8-3=5$，不要忘記驗算：$5^2+6\times5+9=64$ 。沒有錯！

現又假定已知定數方程式爲$x^2+6x=55$；可將此式如〔838b〕圖表示之。由原來的〔838a〕所示之正方形減去了 $3^2=9$；因此，〔838b〕圖的總面積只剩 $64-9=55$ cm^2。

由方程式 $x^2+6x=55$ 而求 x 之值，依〔838b〕圖可見就是要補足有“？”號的地方那一小塊面積，而使成爲有如〔838a〕圖所示完整的正方形。這裏所需的補足稱爲

正方形的補充(或稱配方法)，

其大小爲 3^2。如將此數加入上式，則總面積增加了 3^2 cm^2 卽不再是 55 而是 64 cm^2。

簡單列式如下，以便一目了然：

已知方程式

$x^2+6x=55$；此式兩邊加上正方形的補充數：

$3^2=9$　　乃得

$x^2+6x+3^2=55+9=64$；　　兩邊開方，只取 64 之正根：

$x+3=8$；兩邊減去 3：

$x=5$；驗算：$5^2+6\times5=55$；沒有錯！

這種解法的要領，是將方程式左邊不完全的平方（參看〔838b〕圖），加以正方形的補充，使成完全平方如（〔838a〕圖所示）。

現在要問：不用繪圖却用計算，怎樣才能求得正方形的補充數呢？

在我們的構想中，那是容易的事，因爲我們的出發點是完整的正方形 $(x+3)^2$；其補充數 (3^2) 是事前就已知道的。

現在我們要考慮的，是如何由已知方程式是 $x^2+6x=55$ 才能導引正方形的補充數。由〔838b〕圖可見補充正方形之邊等於長方形 $3x$ 的短邊；$6x$ 是由題意已知二長方形之面積，爲了求得補充正方形的邊長，必須先使這兩個長方形之一孤立起來；其面積爲 $6x\div 2=3x$。長方形的邊長等於補充正方形的邊長，其數是3不是 x，也就是 x 的因數。由此可求正方形之邊長，卽將 $x^2+6x=55$ 方程式中 x（卽 x^1）之因數使之平分；如令 x 之一半因子$(=3)$自乘，便可求得正方形之補充數（卽補充正方形之面積）。

玆再扼要列擧這種構想的步驟如下：

已知方程式：

$x^2+6x=55$；x^1 的因數是 6；折半成 3；3 的平方是 9；將 3^2 加到方程式的左邊；將 9 加到右邊：

$3^2=9$

$x^2+6x+3^2=64$；兩邊開方：

$x+3=\pm 8$；$x=-3\pm 8$；$x_1=-3+8=+5$；

$x_2=-3-8=-11$

驗算：1)$5^2+6\times 5=55$；$25+30=55$；沒有錯！

2)$(-11)^2+6\times(-11)=55$；$121-66=55$；也符合！

再擧一實例：$x^2+4x+3=0$

爲了依據與上例相同的步驟解此方程式，可使之變形，卽將含 x 各項留在左邊，其餘的移到右邊：

$x^2+4x=-3$；正方形的補充數爲 $(\frac{4}{2})^2=2^2=4$，將其加到方程式的兩邊

$2^2=4$

$x^2+4x+2^2=1$；令此式開方：

$x+2=\pm1$；$x=-2\pm1$；$x_1=-2+1=-1$；

$x_2=-2-1=-3$；各位自行驗算！

下面是用普通數的一個例子：

$x^2+ax+b=0$；式中 $a,\ b$ 可代表任何正數或負數。根據前例解此方程式。減去兩邊之 b：

$x^2+ax=-b$；兩邊加上正方形之補充數，即x一半因數之平方：

$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-b$；兩邊加上根號，表示應行開方：

$\sqrt{x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$；左邊經過平方補充之後便可開方，右邊則讓它保留開方的命令：

$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$； 根號前的±號，表示平方根可為正亦可為負；兩邊減去$\frac{a}{2}$。

$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$； 由正負號變為加減號（參閱第一冊中之〔32〕節）。可分別寫成求二根之兩式：

$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$； $x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$

注意：將第一式寫成 $x_1=+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}-\frac{a}{2}$並非不對，但減數$\frac{a}{2}$容易被誤置於根號之下。

一元二次方程式之範式

839 用上面所述的詳細方法，可以解每一個一元二次方程式。最後解出的方程式裏是以字母代替數字，更可用作範式；如將相應的數字代入，即能獲得解答，而中間計算（如正方形之補充等），可

完全予以省略。

任何二次方程式均可使之變爲 $x^2+ax+b=0$ 之範式；或加上各項的冪，更可寫成 $x^2+ax^1+bx^0=0$。因 $x^0=1$（參閱第四册中之〔329〕節），所以上面兩式並無實質上的不同，求得之根亦完全沒有什末兩樣：

$$\boxed{x^2+ax^1+bx^0=0\,;\ x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}$$

此法方程式的左邊包含有三個被加數之和。這三個被加數是依 x 的降冪排列的，意卽指數的順序爲 2, 1, 0。x^2 沒有因數或係數（參閱第七册中之〔770〕節），但也可以說，有因數爲 1；x^1 的因數是 a，x^0 的因數是 b，方程式的右邊之値爲零；a 及 b 可代表任何相對數字，包括 0 在內。若 $a=0$，則擺在我們面前的是一個純二次方程式，也可看作雜二次方程式的特殊情形。a 及 b 二數亦出現於答數，卽此二次方程式之兩根中。

我們現在練習，先將不完全符合於範式的已知方程式"化爲範式"，然後不用中間計算，按照上述之公式解此方程式。

1) $x^2+6x-55=0$；此式（參閱〔838〕節）合於我們的範式；卽 $a=+6$；$b=-55$。以之代入公式內，暫且保留正負號，亦卽暫且不以加減號代替：

$$x=-\frac{+6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{+6}{2}\right)^2-(-55)}=-3\pm\sqrt{\frac{36}{4}+55}=-3\pm\sqrt{64}=$$

-3 ± 8；$x_1=-3+8=+5$；$x_2=-3-8=-11$

以 $x_1=+5$ 驗算：$(+5)^2+6\times(+5)-55=25+30-55=0$；符合！以 $x_2=-11$ 驗算：$(-11)^2+6\times(-11)-55=+121-66-55=0$；符合！

2) $3x^2+6x-45=0$；以 3 除各項得範式：$x^2+2x-15=0$；$a=+2$；$b=-15$

$$x=-\frac{+2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{+2}{2}\right)^2-(-15)}=-1\pm\sqrt{+1+15}=-1\pm4\,;$$

$x_1=-1+4=+3$；$x_2=-1-4=-5$；各位自行驗算！

3) $\frac{1}{2}x^2-x=60$；以2乘各項，得範式為 $x^2-2x-120=0$；

$a=-2$；$b=-120$；

$x=-\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(-120)}=1\pm\sqrt{121}=1\pm11$；

$x_1=1+11=12$；$x_2=1-11=-10$；各位自行驗算！

4) $\frac{x^2}{5}-x+2=0$；以 5 乘各項，得範式：$x^2-5x+10=0$；

$a=-5$；$b=+10$；

$x=-\frac{-5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2-(+10)}=2.5\pm\sqrt{+\frac{25}{4}-10}$

$=+2.5\pm\sqrt{\frac{+25-40}{4}}=+2.5\pm\sqrt{\frac{-15}{4}}=+2.5\pm0.5\sqrt{-15}$；

$x_1=2.5+0.5i\sqrt{15}$；$x_2=2.5-0.5i\sqrt{15}$

以 x_1 驗算：

$x_1^2=(2.5+0.5i\sqrt{15})^2=6.25+2\times2.5\times0.5i\sqrt{15}+0.25\times(-1)\times15$

$[a \quad + \quad b \quad]^2= \quad a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2$

$=6.25+2.5i\sqrt{15}-3.75=2.5+2.5i\sqrt{15}$；

$\frac{x_1^2}{5}-x_1+2=0.5+0.5i\sqrt{15}-(2.5+0.5i\sqrt{15})+2$

$=0.5+0.5i\sqrt{15}-2.5-0.5i\sqrt{15}+2=0$；符合！

x_1 之根是實數 2.5 與虛數 $0.5i\sqrt{15}$ 所組成之和；將實數和虛數結合起來的數，則稱為**複數** (Komplexen Zahl)。$x_2=2.5-0.5i\sqrt{15}$，此二數之差也是一個複數。

複數是一實數與一虛數之代數和(參閱第一冊中之〔32〕節)

840 **習題：**

1) 試以例題 4 的根 x_2 作驗算！

2) $x^2-15=-2x$； 3) $x^2-15=2x$； 4) $x^2+4.9x=6.6$；

5) $x^2=120+2x$；

6) $\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}x=\frac{8}{3}$；

7) $\frac{x^2}{4}-0.75x-1=0$

8) $2x^2+4x-30=0$；

9) $x^2+10=7x$

10) $x^2+3.52=4.3x$；

11) $x^2+865x+21000=0$；

12) $x^2+900=61x$；

13) $100x-x^2=900$；

14) $x^2+100.1x+10=0$；

15) $x^2+0.21=x$

16) $x^2+0.09=x$；

17) $x^2+0.2464=x$；

1) $3x^2+72=30x$；

19) $36x^2-31x+3=0$；

20) $\frac{x^2}{32}-\frac{3x}{8}+1=0$；

21) $x^2-3x+6=0$；

22) $x^2+3x+6.25=0$；

23) $x^2-6x+9=0$；

24) $x^2+8x+16=0$；

25) $x^2+25=10x$；

26) 有些書上，二次方程式的範式，用的是下面的寫法：

$$\boxed{\begin{array}{c} Ax^2+Bx+C=0 \\ x=-\frac{B}{2A}\pm\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \end{array}}$$

試證明根之正確性！在此所用大寫字母，是作爲普通數之代表，並無其他用意，各位不要庸人自擾！

一些特殊情形

1) $x^2-1.3=0$；這是純二次方程式，也可按範式以求解： 841

$a=0$；$b=-1.3$；

$$x=-\frac{0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2-(-1.3)}=\pm\sqrt{1.3}=\pm1.140；x_1=+\sqrt{1.3}；$$

$x_2=-\sqrt{1.3}$

2) $\overbrace{(x-3)}^{k_1}\times\overbrace{(x-4)}^{k_2}=0$

對此方程式不必加以變形，使之符合〔839〕節之範式，便可立即讀出兩個根：$x_1=+3$；$x_2=+4$，爲何有此可能？