'78-'91

中国
高考数学试题
汇析

ZHONGGUO
GAOKAO SHUXUE SHITI
HUIXI

上海教育出版社

中国高考数学试题汇析

马成瑞　孔令颐　陈　捷

上 海 教 育 出 版 社

(沪)新登字107号

'78～'91
中国高考数学试题汇析
马成瑞　孔令颐　陈　捷
上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销　　上海崇明印刷厂印刷
开本 850×1156　1/32　印张 21　字数 519,000
1992年10月第1版　　1992年10月第1次印刷
印数 1—8,000 本
ISBN 7-5320-2761-9/G·2691　　定价：8.50元

前　　言

全国普通高等学校招生统一考试(以下简称高考)，自1978年恢复以来，已有14个年头了．研究和总结高考工作的经验，对于完善高考制度和提高中学教育质量有着重大的意义．作者收集和整理了1978年以来历届高考数学试题，并根据现代教学理论和教改实践对全国数学试题作了深入的分类研究，写就了《'78～'91中国高考数学试题汇析》一书．他们做了一项具有开创性的工作，这是值得称颂的．

我国幅员辽阔，人口众多，各地政治、经济、文化的发展很不平衡，高等教育还不够发达．据1990年统计，近年来每年约有250万高中毕业生，其中只有不到四分之一的人能升入大学．这种大学招生人数少，中学毕业人数多的状况，是我国教育将要长期存在的一个基本情况．针对这种情况，为了保证高校招生的质量，同时，又能方便广大高中毕业生就近参加高校招生考试和办理报考手续，我国从1952年开始对全国普通高等学校招生，实行了统一命题考试和择优录取的制度(其中1966～1977年因“文化革命”终断)．高校的招生计划、高考的考试科目、各科试题和标准答案、评分标准，由国家统一制定，试卷印制、组织考试、阅卷评分和录取工作由各省、自治区、直辖市负责进行．

实行全国统一招生考试制度，命题是一大关键．由于只有一份统一的试题，所以，试题考查的方向及难易程度如何，既关系到高校入学新生的质量，又直接影响中学教学，国家教委和原教育部对此十分重视，曾多次发文阐明高校招生考试命题的指导思想和原则．1984年明确提出了“两个有利”的命题指导思想，即“既

有利于高等学校选拔新生，又有利于中学教学”；明确规定了“命题范围不超过中学教学大纲，试题内容的要求不超过中学所用统编教材所能达到的程度”的命题原则. 1985年起，又在上海、广东两地进行单独命题的试点. 近年来，根据上述指导思想和原则命题，高考试题逐年趋于完善，但要真正落实“两个有利”的指导思想，还需做很多工作，其中之一，就是大力宣传命题的思想、方法、意义和作用，使之为人们所理解并付诸实践. 本书的出版，将有助于向广大中学师生和社会各界人士揭示我国近十多年来高考数学试题的命题思想和试题的演变过程；有助于对过去数学试题的设计成果作一次认真的总结研究；也将促进我国高考制度的科学化、标准化和现代化. 同时，尤为重要的，或者说体现本书特色的是，本书通过对学生应试时出现的错误进行分析后提出的教学建议，将对中学数学教学产生积极的影响.

本书由两部分组成：

一、全国数学试题分类及评析

这一部分是本书的主体，内容结构是按照学科内容，将全国数学试题分成代数、三角、几何（包括平面几何与立体几何）、平面解析几何、综合试题五大类. 每一类又按照知识内容分成若干单元，并选择典型试题进行评析，评析的内容包括：试题考查的主要基础知识、基本思想、方法和能力、学生应试时出现的主要错误及教学方法建议.

二、试题总汇及解答

这部分的主要内容是：将1978年以来的全国、上海、广东高考数学试题及解答，按年编排，以形成一份完整的资料. 其中，全国数学试题的解答，一般列举几种典型的解法，以反映各种解题的思想和方法；上海、广东数学试题的解答，限于本书的篇幅，只选用一种常用的方法.

本书作者马成瑞（北京师范大学附属实验中学高级教师）、孔

令颐(清华大学附属中学特级教师)、陈捷(北京市教育局教学研究部高级教师)均为具有数十年教龄的老教师,他们有反映时代特征的教学思想水平和灵活驾驭教学活动的教学能力,更具有丰富的教学经验,集三人的智慧与经验于一书,再加上上海教育出版社编辑的精心设计、精心安排,使得本书更臻成熟.

最后还需指出,本书虽经作者、编者尽心努力,但缺点和疏漏之处在所难免,特在此敬请专家和广大读者批评指正.

邓 立 言

1991年7月

目　录

一　全国数学试题分类及评析

(一) 代　　数

§1.1　集　　合

[试题]

1．集合{1, 2, 3}的子集总共有　　( )

(A) 7 个;　(B) 8 个;　(C) 6 个;　(D) 5 个.

[1988, 文理一(3)]*

2．设 S、T 是两个非空集合，且 $S \not\subseteq T$, $T \not\subseteq S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于　　( )

(A) X;　(B) T;　(C) $\varnothing$;　(D) S.

[1987, 文理一(1)]

3．设集合 $X = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$, $Y = \{1, 3, 6, 8, 9\}$, $Z = \{3, 7, 8\}$, 那么集合 $(X \cap Y) \cup Z$ 是　　( )

(A) {0, 1, 2, 6, 8};　(B) {3, 7, 8};

(C) {1, 3, 7, 8};　(D) {1, 3, 6, 7, 8}.

[1985, 文一(3)]

4．如果 $I = \{a, b, c, d, e\}$, $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, 其中 I 是全集，那么 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 等于　　( )

(A) $\varnothing$;　(B) $\{d\}$;　(C) $\{a, c\}$;　(D) $\{b, e\}$.

[1989, 文理一(1)]

* 表示该题是 1988 年试题(文、理科)第一大题的第(3)小题。下同。

5. 设全集 $I=\{(x, y)\mid x, y\in R\}$，集合 $M=\left\{(x, y)\middle|\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x, y)\mid y\neq x+1\}$, 那么 $\overline{M\cup N}$ 等于 ( )

(A) $\varnothing$; (B) $\{(2, 3)\}$;

(C) $(2, 3)$; (D) $\{(x, y)\mid y=x+1\}$.

[1990, 理一(9)]

6. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$,集合 $M=\left\{(x, y)\middle|\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x, y)\mid y\neq x+1\}$,那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于 ( )

(A) $\varnothing$; (B) $\{(2, 3)\}$;

(C) $(2, 3)$; (D) $\{(x, y)\mid y=x+1\}$.

[1990, 文一(11)]

7. 已知全集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{1, 3, 6\}$,那么集合$\{2, 7, 8\}$是 ( )

(A) $A\cup B$; (B) $A\cap B$; (C) $\overline{A}\cup\overline{B}$; (D) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

[1986, 文一(3)]

8. 数集 $X=\{(2n+1)\pi$, n是整数$\}$与数集 $Y=\{(4k\pm1)\pi$, k是整数$\}$之间的关系是 ( )

(A) $X\subset Y$; (B) $X\supset Y$; (C) $X=Y$; (D) $X\neq Y$.

[1984, 文理一(1)]

9. 设全集为 R, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $M=\{x\mid f(x)\neq 0\}$, $N=\{x\mid g(x)\neq 0\}$,那么集合$\{x\mid f(x)\cdot g(x)=0\}$等于 ( )

(A) $\overline{M}\cap\overline{N}$; (B) $\overline{M}\cup N$;

(C) $M\cup\overline{N}$; (D) $\overline{M}\cup\overline{N}$.

[1991, 理一(15)]

10. 设 A 表示有理数的集合, B 表示无理数的集合, 即设 $A=\{$有理数$\}$, $B=\{$无理数$\}$, 试写出: (1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$.

[1981, 文理一]

[评析]

集合是现代数学最基本的概念之一，也是集合论的主要研究对象，按现代数学的观点：数学各分支的研究对象或者本身是带有某种特定结构的集合，或者可以通过集合来定义．由于集合概念具有简单性、普遍性及抽象性，因此它已渗入了数学的一切领域．故此由德国数学家乔治·康托尔（1845～1918）所创立的集合论可以看做是整个现代数学的基础．而中学数学中所涉及到的集合知识，只是集合论中最基本的一些常识，从1984年起它已成为每年高考的必考内容．

1．试题分析

试题在集合内容上所考查的基础知识有：子集的概念（第1题）．集合的简单运算，即求集合的交、并、补集（第2～7、9、10题）集合与集合之间的关系（第8题）等，几乎涉及了课本上集合的所有知识内容．题型除第10题是解答题外，其余全部是选择题，试题考查的能力有数学观察能力、数形结合的思维能力，以及解决综合问题的能力．举例分析如下：

例如，1984年文理科第一(1)题，怎么判断数集 $X=\{(2n+1)\times\pi,\ n$ 是整数$\}$ 与数集 $Y=\{(4k\pm1)\pi,\ k$ 是整数$\}$ 之间的关系呢？可以有四条思路，分别体现了对考生数学观察能力、数形结合的思维能力和分析、综合问题的能力要求．

思路一　观察数集的特点，$2n+1(n\in Z)$ 是奇数．再在 $4k\pm1$ 中分别令 $k=0$、±1、±2，得到的数也为奇数．由不完全归纳法猜想 $X=Y$．这样解题，要求考生具有一定的数学观察能力和概括能力．

思路二　借助于单位圆，分别画出 $(2n+1)\pi$ 和 $(4k\pm1)\pi$ 所表示的角的终边，从而发现 X、Y 都表示终边落在 x 轴负半轴上的角的集合．这样解题，要求考生具有数形结合的思维能力．

思路三　利用分类讨论的思想，按“余数”分类，被2除余1的

整数是奇数，而被 4 除余 1 的整数与被 4 除余 3 的整数合在一起，仍是全体奇数．这里考查了整数分类的有关知识，这样解题，要求考生具有分析、综合的思维能力．

思路四 从集合相等、包含等关系的定义出发，看看由 $(2n+1)\pi\in X$ 是否可以推出 $(2n+1)\pi\in Y$，反之亦然．这样解题，要求考生具有逻辑思维能力．

又如，1988 年文理科第一(3)题，含有三个元素的集合的子集的个数有多少？解决这个问题可以有两条思路，都要求学生具有一定的逻辑思维能力．

思路一 子集按其元素的个数为 0、1、2、3 进行分类，考虑其一切可能的结果，得到子集的个数是 $1+3+3+1=8$．

思路二 含 n 个元素的集合的子集个数是 2^n，令 $n=3$，即得本题答案 8．这种解题方法体现了从一般到特殊的思维方法．

2．错误分析

考生犯的主要错误是概念不清．例如，由于对空集的概念不清，考生在解 1981 年文理科第一题中，把 $A\cap B$ 误写成 $\{0\}$、$\{\varnothing\}$；由于对空集是任何集合的子集、任何集合自己是自己的子集概念不清，在 1988 年文理科第一(3)题中，错选了答案(A)或(C)；由于混淆了交集与并集的概念，在 1987 年文理科第一(1)题中，错选了答案(A)；由于不明确 $S\not\subseteq T$ 的含意，在 1987 年文理科第一(1)题中，有的考生只好乱猜，错选了(B)或(C)．此外，还有考虑不周全、计算不准确、表示法不对等错误．例如，在 1988 年文理科第一(3)题中，有的考生不能按元素个数为 0、1、2、3 进行分类，不重不漏地得出全部子集，错选了答案(A)、(C)或(D)；有的考生虽然知道含 n 个元素的集合所有子集的个数是 2^n，但计算 2^3 时变成了 2×3 得 6；在 1981 年文理科第一题中，有的考生明明知道正确答案分别是 $\boldsymbol{R}$ 和 $\varnothing$，但由于没有搞清楚某些专用集合的符号，错误地表示成 $A\cup R=\{R\}$、$A\cap B=\{\varnothing\}$．

3. 几点建议

针对现行教材的要求和学生学习的情况，我们建议在教学和复习中要做到“三注意”、“三引伸”和“两渗透”.

所谓“三注意”是指注意联系生活实际；注意借助文氏框图；注意反复应用复习巩固. 由于集合是不定义的概念，集合的唯一要素是元素，集合的三大特征，即指元素的确定性、互异性和无序性. 因此为了让学生正确理解集合的概念，必须注意联系生活实际. 例如，以下描述都不能成为一个集合：“所有比较大的数”、“全班比较矮的同学”；而以下描述却可以成为一个集合：“方程 $x^2+2=0$ 的全体实数解”、“到线段 AB 两端点距离相等的点”、“本班教室里的全体桌椅”等. 借助文氏框图，学生能更形象地理解子集、交集、并集、全集、补集的概念. 例如，全班学生 45 人，期末考试语文 20 人得优，数学 15 人得优，语文、数学都不得优的共有 20 人，求这两门功课全优的人数. 如果学生知道计算集合元素个数的公式：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$的话，则利用公式即可求得. 但这个公式教材上没有，怎样解题呢？可利用图 1-1-1 的文氏图列出方程 $20+(20-x)+x+(15-x)=45$ 求解. 数形结合是数学思维的重要方法，应有意识地教给学生. 集合概念及其有关知识，应用极广. 例如，代数中方程(组)和不等式(组)的解集，函数的定义域和值域；立体几何中点、直线、平面的位置关系的表示法；三角中三角方程的解集等. 应在这些内容的教学过程中反复应用，以加深对集合有关概念的理解. 对于集合中的一些符号，如 $\in$、$\notin$、$\subset$、$\subseteq$、$\cap$、$\cup$，也应在应用中弄清它们的含义和区别.

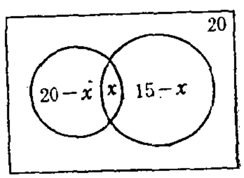

图 1-1-1

所谓“三引伸”是指视学生的程度，教学中教师在等集的证明、有限集中元素个数的一些性质、集合的思想方法在初等数学中的一些应用这三个方面给予适当补充或引伸. 适当地补充等集的证

明，有助于加深对集合有关知识的理解，有助于培养学生的推理能力，高考中曾出过判断两个集合相等(尽管不是证明)的题目，例如1984年文理科第一(1)题．证明的常用方法主要有三种：一是用定义或集合间的运算法则证明两个集合 A、B 满足 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$；二是证出 $\overline{A}=\overline{B}$ 后，两边取补集，还原证得 $A=B$；三是找一个集合 C 证明 $A=C$ 且 $B=C$，得到 $A=B$．有限集中元素个数记为 $n(A)$，则关于交、并、补集元素个数有以下基本公式：

$$n(A)+n(\overline{A})=n(I),$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B),$$

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\overline{B})=n(B)-n(B\cap\overline{A}).$$

这些公式都可以用文氏图加以验证．用这些公式结合集合的其他性质，可以解答许多有关集合中元素个数的问题．如果学生程度较好，教师可以在课内或课外小组中，适当地介绍这些内容．不少数学问题的求解过程，渗透着集合的思想方法．例如，求方程组的解，实际上是求 n 个集合的交集；自然数的不同分类，实际上是把自然数集分为若干个不相交的子集之和；三角方程解的不同形式的判断，实质上是集合相等的证明和判断等．教师若结合这些具体内容，画龙点睛地讲集合的思想方法，对于培养学生的逻辑推理能力，提高学生的数学素质是有帮助的．

所谓“两渗透”，一是渗透集合分类的思想方法．集合 A 的一种分类 $\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 的定义是 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 且 $A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$．教学中，教师应不断提高学生分类讨论的能力；二是渗透集合的思想方法．如在方程的同解变形、方程组的解、复合函数的定义域、几何作图的轨迹交截法中，教师可以引导学生用集合的观点来解释上述问题，从而加深学生对集合知识的理解，提高学生综合运用数学知识解决问题的能力．

§1.2 方　　程

[试题]

1. 设 $\log_3 4\cdot\log_4 8\cdot\log_8 m=\log_4 16$，那么 m 等于　　(　)

(A) $\frac{9}{2}$;　(B) 9;　(C) 18;　(D) 27.

[1987，文一(3)]

2. 设复数 z 满足关系式 $z+|\bar{z}|=2+i$，那么 z 等于　　(　)

(A) $-\frac{3}{4}+i$;　(B) $\frac{3}{4}-i$;　(C) $-\frac{3}{4}-i$;　(D) $\frac{3}{4}+i$.

[1989，理一(7)]

3. 方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$ 的解集是　　(　)

(A) $x=\frac{1}{9}$;　(B) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$;　(C) $x=\sqrt{3}$;　(D) $x=9$.

[1990，文理一(1)]

4. 已知实数 m 及 x 满足 $2x^2-(2i-1)x+m-i=0$，求 m 及 x 的值.

[1984，文二(3)]

5. 求方程 $\sqrt{25^{(x^2+x-0.5)}}=\sqrt[4]{5}$ 的解.

[1986，文理二(1)]

6. 解方程 $9^{-x}-2\cdot 3^{1-x}=27$.

[1988，文理二(2)]

7. 解方程:

$\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{0.25}(2x+1)$.

[1985，理三(1)]

8. 解方程 $\lg(3-x)-\lg(3+x)=\lg(1-x)-\lg(2x+1)$.

[1985，文五(1)]

9. 设 $a\geqslant 0$，在复数集 C 中，解方程 $z^2+2|z|=a$.

[1990,文三(25),理三(24)]

10. 设 c、d、x 为实数，$c\neq 0$，x 为未知数，讨论方程 $\log_{\left(cx+\frac{d}{x}\right)}x=-1$ 在什么情况下有解，有解时求出它的解.

[1984,理,五]

11. 已知 $a>0$，$a\neq 1$，试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.

[1989,文三(23),理三(22)]

12. 解方程组 $\begin{cases}2x-3y-z=5,\\4x+2y+3z=9,\\3x+2y=-1.\end{cases}$

[1980,文二]

13. 已知 $x-y=\dfrac{1}{2}$，$x^2+y^2=1$，求 x^2-y^2 的值.

[1982,文四]

14. 美国物价从1939年的100增加到四十年后1979年的500. 如果每年物价增长率相同，问每年增长百分之几？(注意：自然对数 $\ln x$ 是以 $e=2.718\cdots$ 为底的对数. 本题中增长率 $x<0.1$，可用自然对数的近似公式 $\ln(1+x)\approx x$，取 $\lg 2=0.3$，$\ln 10=2.3$ 来计算.)

[1979,文六,理七]

15. 某地区1979年的轻工业产值占工业总产值的20%，要使1980年的工业总产值比上一年增长10%，且使1980年的轻工业产值占工业总产值的24%，问1980年的轻工业产值应比上一年增长百分之几？

[1980,文四]

16. 设1980年底我国人口以10亿计算.

(1) 如果我国人口每年比上年平均递增2%，那么到2000年底将达到多少？