机械振动学导论

刘 先 志 编

山 东 人 民 出 版 社

机械振动学导論

刘　先　志編

山东人民出版社
一九六二年·济南

机械振动学导論

刘 先 志 編

*

山东人民出版社出版（济南經9路勝利大街）
山东省書刊出版業营業許可証出001号
山东新华印刷厂印刷　山东省新华書店发行

*

書号：3389
开本 787×1092毫米 1/16・印張 27 3/4・插頁 4・字数 502,000
1962年6月第1版　1962年6月第1次印刷
印数：1——1,600

統一書号：　13099・51
定　　价：（11）6.00元

封面設計：陈之初

自　　序

为了适应我国机械工业的发展和社会主义建設的需要，山东工学院曾于1957年春季到1958年春季，开設了一个机械振动学講习班；参加学习的有各地高等院校准备开机械振动学課程的教师和来自工厂的一些工程师，以及本院的一些教师同志和一批学习时間比較从容的学生。

本書中除船舶的搖摆与振动一章外，其余的材料都是編者在机械振动学講习班上用过的講稿。講稿的前一小部分係編者自1947年到1951年在上海同济大学講授机械振动学时先后四次編写的；后一大部分係考虑到我国今后在工业建設中可能碰到的一些机械振动問題，以及根据参加講习班学习的同志們的愿望新編写的。前一部分講的是机械振动的基础知識，后一部分講的是机械振动学在多种机械工业方面的应用。

为高等工业院校的学生开一門机械振动学課程，因为授課时数和学員的接受能力的关系，偏重于講授机械振动的基础知識，这是很自然的。在机械振动学講习班上講授就有所不同了；参加講习班的成員，多数是富有教学实践經驗的高等工业院校教师或具有丰富設計經驗的工程师，所以必須着重对机械振动的应用作多方面的研討。

有一部分参加机械振动学講习班学习的同志，曾要求把透平机內的机械振动問題也一并編入本書。編者沒有这样做。其原因有二：一，众所共知，对透平机內主軸、輪盘及輪叶机械振动的研討，要以弹性力学和弹性体振动为基础，甚至还与热弹性应力有关。若把这一部分的問題編入，那就会使本書的水平前后悬殊，在利用上可能造成浪費；二，除了書中公式（7·38）的情况之外，編者想在这本应当适用于大众的書里，尽量避免引用偏微分方程式。

在开办机械振动学講习班期間，山东工学院曾委派孔瑞和周克行两位講师协助編者进行工作；在本書的編写过程中，他們两位，曾协助編者澄清和改正了不少不該忽視的要点。此外，参加机械振动講习班学习的同志們，也曾对本書提供过不少的修正意見。本書能达到目前这个样子，与这些同志的大力协助是分不开的。为此，特向他們表示感謝。

由于編写时間短促和本人水平的限制，本書里难免尙有不少缺点或錯誤，恳切地希望讀过这本書的同志們，把意見寄給我。

刘　先　志

1959年12月于济南山东工学院

目　录

第一章　緒論及机械振动学的一点数学基础

第二章　无振阻单度振动系

第三章　有振阻的单度振动系

第四章　二度振动系

第五章 与振动原理有关的几种仪器

第六章 高速旋轉子的靜、动平衡

第七章 活塞式往复机的振动

第八章 完整动力系振动举例

第九章　动力机基础的隔振問題

第十章　自动車中的机械振动

第十一章　摆式調速器的振动

第十二章　金屬切削机床中的振动

第十三章　船舶的搖摆与振动

第十四章　非綫性特征的机械振动系

第一章

緒論及机械振动学的一点数学基础

§1·1 概　　論

机械振动学討論一个物体或一个机械系統受周期变化干扰力的作用所产生的运动状态。在运动的机械系統中存在着的不平衡情况是产生干扰力的主要根源。在某些情形下，振动是有害的，它可使机件破裂或寿命縮短，增加摩擦損耗，使仪器不能发揮其正常的效用。此外，在振动中所发出之杂声每使管理人員有不舒适的感覚，因而影响其工作效率。但在另一些情形下，我們反而需要振动，例如在各种乐器中乐音之产生无不依賴于适宜之振动；在工业中也有一些借振动原理設計成的机械用具，例如篩砂器、篩麵器、篩穀机等等。

一般而論，搖摆运动都是周期性的；換言之，搖摆运动在一定的相等时間間隔中重复演出。重演的时間間隔称为**周期**。在一个周期中所完成之运动称为一个**循环**。在单位时間內所完成的循环数目称为**振动頻率**。振动过程每分为两类，一类是**自主振动**，一类是**强迫振动**。

在一物体或一机械系統上，如无外力作用，只有該系統的內在的不平衡力存在，則产生自主振动。机械系統在自主振动中的頻率称为**自主頻率**，自主頻率是一个振动机械系統的固有特性之一。

机械系統受外力的干扰所发生的振动称为**强迫振动**或**强制振动**。强迫振动的頻率与干扰力的頻率相等。一般而論，干扰力的頻率与自主頻率之間无牽連的关系；惟当干扰力的頻率与机械系統的自主頻率相等时，就会突然产生**共振現象**；此时往往发生具危险性的振幅增长。因此想避免这种振动情况的发生，势必先推求有关机械系統的自主頻率。自主頻率之推算往往成为振动学中主要工作之一。

在一切的机械系統中总是存在着若干摩擦及他种阻力，它們对于振动均有或多或少的**遏制作用**。在自主振动中，因无能量自外界輸入到振动系統，所以振动会逐漸消逝；換言之，振动受到摩擦及他种阻力的遏制。另一方面，在强制振动中，因有一定的能量自

干扰力輸入到振动系統，所以振幅有保持一个一定的常数值的可能。

記述一个运动的机械系統在每个瞬时的位置所必須的独立座标数目称为該系之自由度数目。因为記述一弹性体的各个質点的运动需要无限个独立座标，所以它的自由度数目也是无限个。幸而許多机械系統的某些部分可視为刚硬，因此該机械系統依动力学的观点可視为相当于一个具有有限个自由度的振动系統。实在出乎意料之外的，就是有許多机械系統可以足够准确的被視为单度自由度的振动系統。

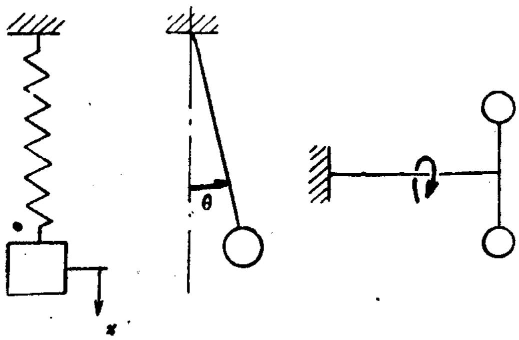

图1·1 单度自由度振动系

如果繩与弹簧的重量可以略而不計，图1·1內的三种情形均可被視为单度自由度振动系。图1·2中的三种机械系統可視为两度自由度振动系。图1·3中的三种可視为多度自由度或无限度自由度的振动系。更应当注意，拉紧的繩弦有产生无限自由度振动型式的可能。同样，在振动中，弹性长杆也可能产生不同型式的振动。我們需要无限个独立座标来記述这一切可能的振动型式。

一般而論，多度自由度的机械系統均能作复杂的振动，其振幅与频率似乎显露着不遵循一定的型式。其实不然，在这些繁伙似无規則的运动中确实存在着几种簡单而又有規則的特别运动型式。这些簡单而又有規則的特别运动型式每称为**基本振动型式**。在此振动中，振动系的每个点均遵循等頻率的一定型式而振动。此外，我們又可論証，一般的运动型式是一些基本振动型式的重迭；意即，可重迭一些基本振动型式来表誌一些一般性的周期运动。以后我們尙有机会碰到，一个有n个自由度的机械系統能够具有n个基本振动型式，而且它們的頻率各不相同。通常推算高級自主振动頻率是異常麻煩的，幸而在許多振动系中往往只需要

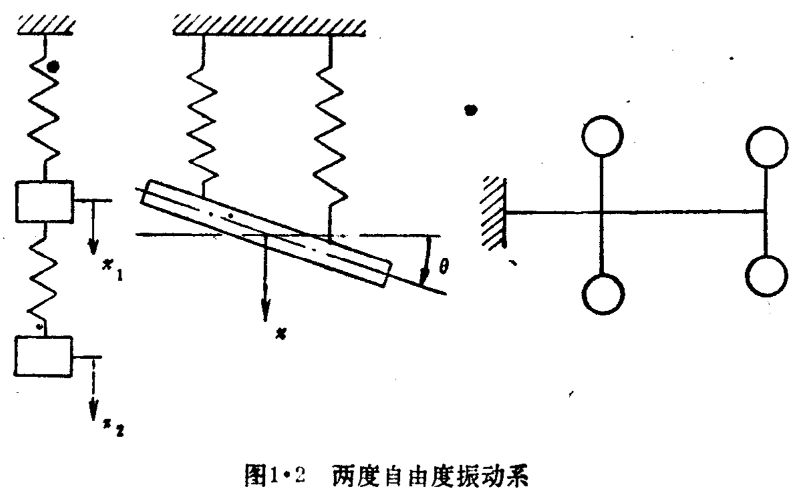

图1·2 两度自由度振动系

推求它們的几个較低級的自主振动频率。

在自主振动中，当物体的速度达到最大时，該系之能量全部变成动能。而当其速度等于零时，动能完全消逝，而在弹簧或弹性杆中貯蓄了最大势能。依照能量不灭原理，最大动能必等于最大势能，这两种能量在一定的时間間隔中，互相变换。如果在上述振动中計入摩擦消耗，势必在該振动系統的动能和势能交互变换的过程中有一定的能量因摩擦消耗而轉变为热能。在强迫振动中如果振动是定常的，則仍然是系統的全部动能和势能等値的相互交换，因为系統的由于干扰力的作用而輸入或者輸出的功的总和为零。如果振动系統处在共振状态时，系統的总能量并不保持等值，而是由于干扰力的作用而不断增長，則这时振动的每一个行程(往程或返程)中系統的全部动能和由于干扰力作用而增加的能量皆轉变为势能，而在下一个过程中，这些势能仍将轉变为动能。因为在該过程中能量的不断輸入，因而得到了比前一过程較大的势能，其增大的数值等于輸入的功量。如果在强迫振动中計入摩擦的影响，則整个系統的能量变换将包括系統的动能、势能，由于干扰力的作用而增加或减少的能量以及由于摩擦消耗而轉变的热能。綜合上述，我們可以为机械振动过程下一定义如下：

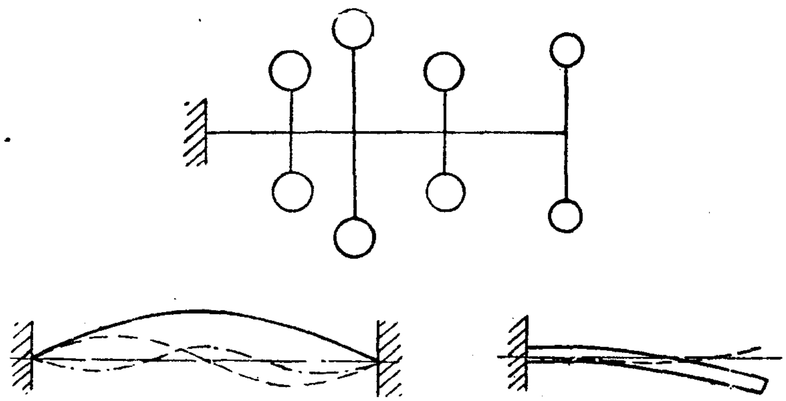

图1·3　多度或无限度自由度振动系

机械振动是在一定时間間隔中具能量变換其形态，使一个机械系統作出的一种有周期性的运动。

§1·2　簡諧运动

周期运动在相等时間間隔中会循环的发生，在图1·4中，实綫与虛綫曲綫均代表一种周期运动；其中，x代表位移，t代表时間。

簡諧运动为周期运动的最簡单型式，这种簡諧运动可以用正弦和余弦两个周期函数代表之。虽然一切簡諧运动均系周期性的，然而一切周期性的运动不一定全都簡諧。法国的物理学及数学家福里哀（*Fourier*）曾經証明过：一切周期性的曲綫可以分解成为一个

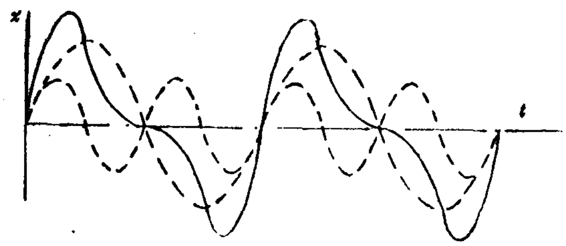

图1·4 周期运动及其組合运动

包括正弦与余弦的級数，其中正弦与余弦的頻率等于原曲綫的頻率的整倍数。例如，图1·4中实曲綫所代表的运动可以用两个簡諧运动之和代表之。这两个簡諧运动在該图中曾以虛曲綫表示之。若用方程式表示这种运动，則有

$$x=x_1\sin\omega t+x_2\sin 2\omega t。\tag{1·1}$$

在（1·1）式中，第一項的頻率与原函数的頻率相同，它所代表的运动称为**第一和諧**或**主要成分**或**基本成分**。第二項称为**第二和諧**，它的頻率等于主要成分的頻率的两倍。以后我們还要討論如何可将一个周期运动分解为多个簡諧运动。

簡諧运动有些奇異的特性。試审查公式

$$x=X\sin\omega t\tag{1·2}$$

所代表的簡諧运动。一个旋轉的向量X在一直径上的投影可以代表这个运动，这个向量係用一个不变的角速度ω繞一定点作圆周运动（图1·5）。

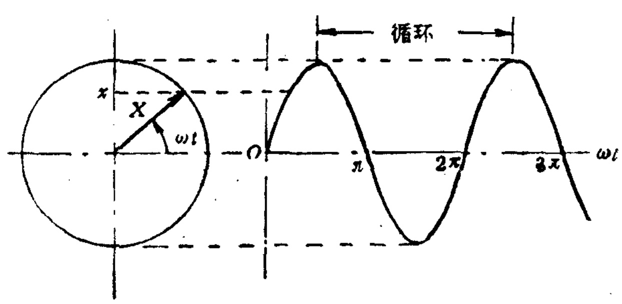

图1·5 簡諧运动

因为正弦函数的周期角是2π，所以完成一个循环的条件是$\omega\tau=2\pi$，或为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega},\tag{1·3}$$

其中τ称为此簡諧运动的周期。周期的倒数为此运动在单位时間內所完成的循环数。这个数值也称为运动頻率。若以f代表此值，則得关系

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega}{2\pi}。\tag{1·4}$$

在应用中，一般的我們采用ω的单位为〔弧度/秒〕，τ的单位是〔秒/循环〕，而f的单位是〔循环/秒〕。

将公式（1·2）对时間t求一阶与二阶微商，可得此运动的速度

$$v=\frac{dx}{dt}=\omega X\cos\omega t=\omega X\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),\tag{1·5}$$

及其加速度

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2X\sin\omega t=\omega^2X\sin(\omega t+\pi)。\tag{1·6}$$

(1·5)与(1·6)公式指出，这个运动的速度与加速度也是簡諧的，因此也可以用等速旋轉的两个向量代表之，不过速度向量的位置要比位移向量先行90度，加速度向量要比位移向量先行180度(图1·6)。

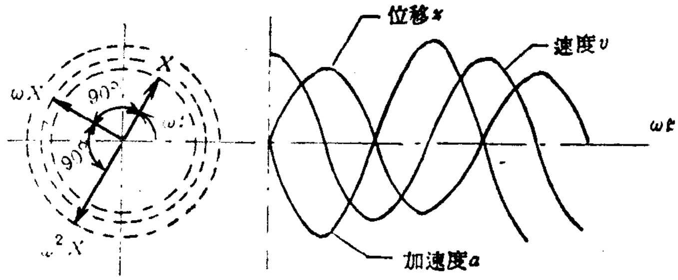

图1·6　簡諧运动之位移、速度及加速度向量的相对位置

在这三个向量中間的夹角称为**位相差**。速度向量的位相差是比位移向量先行90度，而加速度向量的位相差是比位移向量先行180度。因此可作結論：**对于簡諧运动来說，每一次对时間 t 求微商的演算是将被演算的向量突然向前推进了90度，而新微商向量的最大絕对值等于原向量的最大絕对值的 ω 倍**。

若将公式(1·2)与(1·6)联合起来，就得到簡諧运动的微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0; \tag{1·7}$$

上式是等速旋轉向量 X 的頂点在一直径上投影的运动微分方程式。公式(1·7)指明，加速度是与投影点至座标原点的距离成正比例。此外因 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 与 x 的数值必須有相反的符号，所以加速度的朝向永远是朝着座标系的原点。如果一个質点仅受恢复力的作用且恢复力与質点至平衡位置的距离成比例，則上面的方程式就是該点的运动微分方程式。反言之，假設在推求某运动点的运动規律时，我們得出象(1·7)的一个微分方程式时，这个运动也必是簡諧运动。

若引用关系 $i=\sqrt{-1}$，則用指数函数

$$x=Xe^{i\omega t} \tag{1·8}$$

代表一个旋轉向量更覚方便。$e^{i\omega t}$是一个复数，它与三角函数的关系是

$$e^{i\omega t}=\mathrm{co}\ \omega t+i\sin\omega t。 \tag{1·9}$$

图1·7表示一个与实軸成角度 ωt 的单位向量，該向量的实数分量与虚数分量是該单位向量在实軸与虚軸上的投影。

将公式(1·8)对时間 t 求二阶微商，就得到簡諧运动的微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0。$$

这个重要結果指明：指数函数 $e^{i\omega t}$ 是一个可以代表簡諧运动的函数。因为当复数方程式等于零时，其实数部分与虚数部分必須分別各自等于零。也就是 $e^{i\omega t}$ 的实数分量与虚数分量能单独的满足这个簡諧运动的微分方程式。因此，若是一个簡諧运动是用正弦或余弦函数来表达的，我們也可以用指数函数来代替正弦或余弦函数。

具相等周期的任何数目的簡諧运动可以組合起来形成一个具相等周期的組合簡諧运动。假設一个旋轉向量在 x 軸上的投影为 $X_1\cos\omega t$，而另一个旋轉向量在同軸上的投影为 $X_2\cos(\omega t+\varphi)$，其組合向量的投影(图1·8)必为

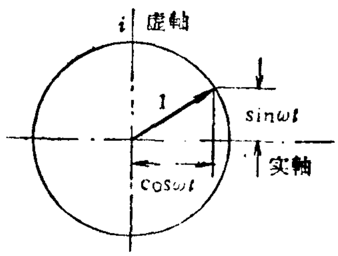

图1·7 平面向量图解

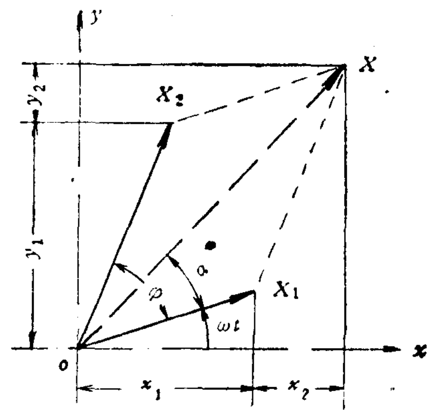

图1·8 周期簡諧运动的向量相加

$$x = x_1 + x_2 = X_1\cos\omega t + X_2\cos(\omega t+\varphi) = X\cos(\omega t+\alpha), \tag{1·10}$$

同理可得：

$$y = y_1 + y_2 = X_1\sin\omega t + X_2\sin(\omega t+\varphi) = X\sin(\omega t+\alpha), \tag{1·11}$$

其中

$$X = \sqrt{(X_1 + X_2\cos\varphi)^2 + X_2^2\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{X_1^2 + 2X_1X_2\cos\varphi + X_2^2}, \tag{1·12}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{X_2\sin\varphi}{X_1 + X_2\cos\varphi}。 \tag{1·13}$$

因此可得推論：三个向量 X_1，X_2 与 X 均用同等角速度 ω 旋轉，而它們在通过原点 O 的任何直綫上的投影均为簡諧运动。

§1·3 振动节奏

若組合不等頻率的簡諧运动，則所得到的組合运动为非簡諧运动。試审查用不同角速度 ω_1 与 ω_2 旋轉的两个向量 a 与 b 的組合向量。因两向量轉速不等，旋轉較快的向量一定会周期的赶过旋轉較慢的向量。組合向量将在限区 $a\pm b$ 内依其相对位置而起变化。二向量的相对角速度为 $(\omega_1-\omega_2)$，每滿了时間間隔 $\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}$，則旋轉較快的向量要超越較慢的向量一次。

比較有意义的一种特殊情况是当两个不同的角速度相差极微时的組合运动。这样一来，因为两向量之間的角度改变极慢，所以組合运动差不多是簡諧运动。

为簡便起見，試审查具有等幅的两个向量的組合情况。可用公式

$$x=a\sin\omega_1 t+a\sin\omega_2 t \tag{1·14}$$

或
$$x=2a\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\cdot\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t \tag{1·15}$$

代表組合运动。若ω_1与ω_2的差别极小，則在上式中必俟正弦函数完成了許多个循环后，余弦函数方能完成一个。因此我們可以理解公式(1·15)是代表一个具有改变极慢的向量模 $2a\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t$ 的正弦函数 $\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$ 的波形运动。組合向量模在 $2a$ 与 O 之間的变化称为該运动之节奏。該节奏的周期为

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}, \tag{1·16}$$

而該运动的节奏频率为

$$f_b=\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}=f_1-f_2; \tag{1·17}$$

图 1·9 中的图解即表示这种非簡諧运动的节奏的产生情势与产生时間。应当格外注意，如果 $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ 的大小为 $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ 的偶倍数，**則每当組合振动的振幅等于零时，其位相突然更换朝向。**

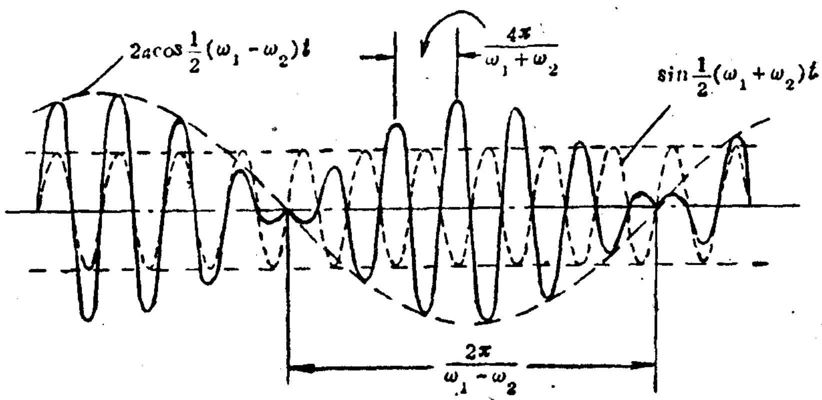

图1·9　节奏現象图解

現在讓我們討論在机械工程中常碰到的一种运动机构（見图1·10）。依照几何关系，活塞之位移为

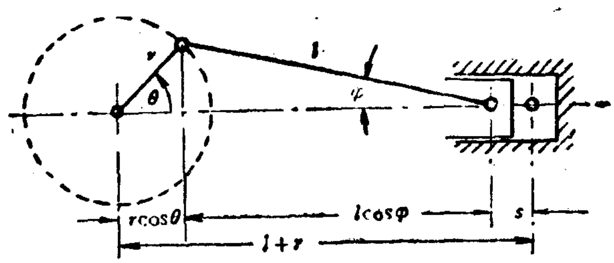

图1·10　曲柄連杆活塞运动机构

$$s=l+r-r\cos\theta-l\cos\varphi。 \tag{1·18}$$

用正弦定律可得

$$\sin\varphi=\frac{r}{l}\sin\theta。\tag{1·19}$$

再以 $R=\frac{r}{l}$ 則得

$$l\cos\varphi=l(1-R^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\tag{1·20}$$

或 $$l\cos\varphi=l\left(1-\frac{1}{2}R^2\sin^2\theta-\frac{1}{8}R^4\sin^4\theta-\frac{1}{16}R^6\sin^6\theta-\cdots\right)。$$

若再利用以下的关系：

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta),$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-2\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos4\theta\right),$$

$$\sin^6\theta=\frac{1}{16}\left(5-\frac{15}{2}\cos2\theta+3\cos4\theta-\frac{1}{2}\cos6\theta\right),$$

則得 $$s=a_0+a_1\cos\theta+a_2\cos2\theta+a_4\cos4\theta+a_6\cos6\theta+\cdots,$$

其中 $$a_0=r\left(1+\frac{1}{4}R+\frac{3}{64}R^3+\frac{5}{256}R^5+\cdots\right),$$

$$a_1=-r,$$

$$a_2=-r\left(\frac{1}{4}R+\frac{1}{16}R^3+\frac{15}{512}R^5+\cdots\right),$$

$$a_4=r\left(\frac{1}{64}R^3+\frac{3}{256}R^5+\cdots\right),$$

$$a_6=-r\left(\frac{1}{512}R^5+\cdots\right)。$$

自上面推算的結果可知，活塞是作非簡諧的周期运动。当R很小时，可得近似的簡諧运动。

在这一种实际問題中，多半略去包括R的指数多于1的項数。因此，活塞的位移可写为

$$s=r\left[\left(1+\frac{1}{4}R\right)-\cos\omega t-\frac{1}{4}R\cdot\cos2\omega t\right]。\tag{1·21}$$

上式包括一个恆数 $r\left(1+\frac{1}{4}R\right)$ 及两个簡諧运动 $-r\cos\omega t$ 与 $-\frac{r}{4}R\cos2\omega t$。自(1·21)可得活塞的最大加速度，

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)_{\max}=r\omega^2(1+R)。\tag{1·22}$$

§1·4　福里哀(Fourier)級数

在相等的时間間隔中，重演的运动称为周期性的运动。福里哀曾証明可用一个包括正弦与余弦函数的級数代表周期性的函数。因限于范围，本节中不能叙述福里哀級数的严格数学条件，而只举出推求这个級数的几个实用法则的例子。

依照一般的慣例，可将福里哀級数写为

$$y(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots$$
$$+a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots。\tag{1·23}$$

在上列級数內，一切正弦項均为奇函数，意即 $y(x)=-y(-x)$，这个函数对 y 軸为非对称。（1·23）式中的余弦項对 y 軸則皆为对称，意即 $y(x)=y(-x)$，因此它們就叫做偶函数。

恆数 a_0 一項表示整个曲綫在 y 軸方向的位移，它是一个偶函数，因此可将它列入余弦組內。因这一部分无波动，在振动学中失掉了它的重要性。

至于（1·23）式中的諸系数 a 与 b 可用下列方法推定：用 $\sin nx$ 乘公式（1·23）的左右两端并在 x 自 O 到 2π 的界限內完成积分运算，結果只剩下正弦函数組的第 n 項等于 $b_n\pi$ 而其余各項均等于零，因此得到

$$\int_0^{2\pi}y\cdot\sin nx dx=b_n\pi。\tag{1·24}$$

同样，再用 $\cos nx$ 乘公式（1·23）的左右两边，也在 $x=o$ 到 2π 的界限中完成积分，則右边只余剩余弦函数組的第 n 項，因而得到

$$\int_0^{2\pi}y\cdot\cos nx\cdot dx=a_n\pi。\tag{1·25}$$

再者，若在界限 $x=o$ 到 2π 中将公式（1·23）左右两边均完成积分，則其右边只有包括 a_0 的这一項尙有数值，因而得到

$$\int_0^{2\pi}ydx=2\pi a_0。\tag{1·26}$$

假設运动規律 y 为已知，而且三个积分运算均为有限量积分，則可用三式（1·24），（1·25）与（1·26）推定（1·23）里的一切系数。