21 世纪高等院校教材

线性代数

王纪林 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

线 性 代 数

王纪林 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书根据原国家教委1995年颁发的“工程数学课程教学基本要求”编写，根据经济管理类专业的实际要求，适当增加部分内容.

本书前四章分别介绍了行列式、矩阵、线性方程组、特征问题及实二次型等基本内容，其中线性空间、线性变换、矩阵序列等内容可作为选学内容.第五章简单介绍一些与线性代数基本知识联系较紧密的经济管理领域中常用的数学方法.

本书可作为高等工科院校经济类、管理类及部分工程专业的线性代数课程的教材.也可以作教师和学生的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王纪林编著. —北京:科学出版社,2003

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-011520-1

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第042964号

责任编辑:杨波 吕虹/文案编辑:彭斌 姚晖/责任校对:宋玲玲

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年9月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年9月第一次印刷 印张:19 1/4

印数:1—5 000 字数:359 000

定价: 25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

线性代数是大学基础数学中的一门主要的理论课程,随着经济建设的发展和经济体制改革的深入,经济数学方法的研究和应用日益受到各学科的理论研究人员及实际工作人员的重视.线性代数的基本知识是古老的,但在现代科学的各学科研究发展中又是最活跃的,最被广泛应用的基础数学分支之一.

目前,高等学校对财经管理专业学生的要求日益提高,对基础数学的教学也提出了更高的要求,本书就是为了适应这种需要而编写的.本书共分五章,从第一章到第四章是介绍线性代数这门课程的基本内容,基本内容的选取主要依据原国家教委 1995 年颁布的"工程数学课程教学基本要求",并根据目前经济管理专业对线性代数课程的实际要求,适当增加了部分内容.增加部分(加(*)部分)的内容,读者可根据需要选学.第五章简单介绍在经济管理领域中与线性代数基本知识联系较紧密的几种常用数学方法,主要是为了引起读者对线性代数这门课程的兴趣.每章后面都有习题,书后附有习题答案与提示,习题用以检验是否掌握了所学的内容.如果能顺利地完成每章后面的习题,则可认为已达到了本课程的教学要求.

本书可作为高等学校的经济类和管理类专业及部分工程专业线性代数课程的教材,也可以供成人教育及大专理工类专业选用,不同的专业或读者,可对本书的内容进行适当取舍,建议课内学时为 36～54 学时.由于编者水平所限,不妥甚至谬误之处在所难免,恳请读者批评指正.

本书的出版得到了科学出版社的大力帮助,并得到上海交通大学教务处及数学系的关心与支持,李世栋、沈灏、贺才兴三位教授和其他一些教师对本书的编写提出了许多有益的意见,在此一并表示感谢.

编　者

于上海交通大学

目　　录

第一章　行列式

在初等数学中,曾通过二元和三元线性方程组的求解引出了二阶和三阶行列式的概念.本章在二阶和三阶行列式的基础上,建立 n 阶行列式的理论,并把 n 阶行列式的理论应用于 n 元线性方程组的求解.

§1.1　n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前,先简单地回顾二阶和三阶行列式的一些概念.

1.1.1　二阶和三阶行列式

在初等数学中,二阶行列式的概念是从二元线性方程组的求解中提出来的.设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法,式(1.1)中第一个方程的等式两端乘以 b_2,第二个方程的等式两端乘以 b_1,然后相减,可得

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x_1 = c_1b_2 - b_1c_2,$$

类似地,由第二个方程的 a_1 倍减去第一个方程的 a_2 倍,可得

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x_2 = a_1c_2 - c_1a_2,$$

当 $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ 时,式(1.1)的解可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆,引入二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

其中 a_{ij} 为行列式的元素，a_{ij} 的下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标称为行下标，表示该元素所在的行；第二个下标称为列下标，表示该元素所在的列. 例如，a_{12} 的下标告诉我们它位于行列式的第一行与第二列的交汇处. 常称 a_{ij} 为行列式的(i,j)元素.

二阶行列式(1.3)的右端又称为行列式的展开式，二阶行列式的展开式可以用所谓对角线法则得到，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中，实线称为行列式的主对角线；虚线称为行列式的次对角线，主对角线上两个元素的乘积带正号；次对角线上两个元素的乘积带负号，所得两项的代数和就是二阶行列式的展开式.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

则由上面的讨论知，当 $D \neq 0$ 时，线性方程组(1.1)的惟一解(1.2)式可表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

D 又常称做线性方程组(1.1)的系数行列式.

例 1.1　已知线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$$

试问常数 a 取何值时方程组有解，并求其解.

解　由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-a) \times 1 = 6 + a,$$

可见当 $a \neq -6$ 时，$D \neq 0$. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & -a\\ 2 & 3\end{vmatrix}=9+2a,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,$$

所以当 $a\neq-6$ 时,方程组有解,其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{9+2a}{6+a},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{6+a}.$$

同样,在求解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=d_1,\\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=d_2,\\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3=d_3\end{cases}$$

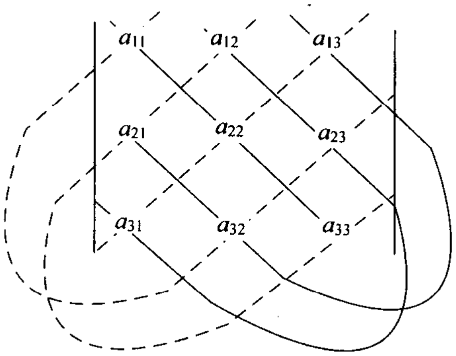
时,可引入三阶行列式.一般三阶行列式记作

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

其展开式为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式的展开式也可以用对角线法则得到,三阶行列式的对角线法则如下所示:



其中沿主对角线方向的每条实线上三个元素的乘积带正号;沿次对角线方向的每条虚线上三个元素的乘积带负号,所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

例 1.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

解　由对角线法则知

$$\begin{aligned}D&=1\times0\times2+2\times5\times0+3\times4\times(-1)-3\times0\times0\\&\quad-2\times4\times2-1\times5\times(-1)=-23.\end{aligned}$$

例 1.3　设方程为

$$D=\begin{vmatrix}x+1 & 3 & 0\\ -1 & x & -3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

试求其根.

解　因为

$$D=(x+1)x+0+0-0+3-3(x+1)=x^2-2x=0,$$

所以方程 $D=0$ 的根为 $x=0,2$.

下面我们把二阶和三阶行列式的概念推广到 n 阶($n\geqslant2$,为正整数)行列式,并在第四节中应用于 n 元线性方程组的求解.

1.1.2　排列与逆序数

在 n 阶行列式的定义中,要用到 n 阶排列的一些性质.

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 n 阶排列,其中 i_k 为 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数,k 表示这个数在 n 阶排列中的位置.共有 $n!$ 个不同的 n 阶排列.

定义 1.1　在 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中任取两个不同的数,记作 (i_j,i_k),其中 $j<k$,若 $i_j<i_k$ 称 (i_j,i_k) 为排列的一个顺序,若 $i_j>j_k$,称 (i_j,i_k) 为排列的一个逆序.排列中逆序的个数称为这个排列的逆序数.排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数记作

$$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n).$$

若 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 为偶数,则称 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为偶排列,否则称为奇排列.

例 1.4　求 $\tau(2\ 3\ 5\ 4\ 1)$，$\tau(3\ 2\ 5\ 4\ 1)$.

解　在五阶排列 2,3,5,4,1 中，有逆序(2,1)，(3,1)，(5,4)，(5,1)，(4,1)，所以 $\tau(2\ 3\ 5\ 4\ 1)=5$. 这是一个奇排列.

在排列 3,2,5,4,1 中，有逆序(3,2)，(3,1)，(2,1)，(5,4)，(5,1)，(4,1)，所以 $\tau(3\ 2\ 5\ 4\ 1)=6$. 这是一个偶排列.

例 1.5　试求 $\tau(1,2,3,\cdots,n)$，$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)$.

解　易见在 n 阶排列 $1,2,3,\cdots,n$ 中没有逆序，所以 $\tau(1,2,\cdots,n)=0$，这是一个偶排列，它具有自然顺序，故又常称其为自然排列.

在 $n,n-1,\cdots,2,1$ 中，只有逆序没有顺序，故

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

排列 $n,n-1,\cdots,2,1$ 的奇偶性与 n 的取值有关，即当 $n=4k$，或 $n=4k+1$（k 为非负整数）时这个排列是偶排列，否则为奇排列.

在一个 n 阶排列中，交换其中某两个数的位置，其他数的位置不变，就得到另一个 n 阶排列. 进行一次这种操作称为一次对换. 在例 1.4 中的两个排列相互由对方经一次对换得到，它们的奇偶性正好相反，一般我们有以下结论.

定理 1.1　对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列.

证　先考虑相邻两数的对换，设

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,a,b,d_1,\cdots,d_t$$

是一个 n 阶排列，交换 a,b 的位置，得

$$c_1,c_2,\cdots,c_s,b,a,d_1,\cdots,d_t$$

在这两个 n 阶排列中，除(a,b)以外，其他各对数的顺序和逆序是相同的. 因此，若 $a>b$，有

$$\begin{aligned}&\tau(c_1c_2\cdots c_s\,a\,b\,d_1\cdots d_t)\\&=\tau(c_1c_2\cdots c_s\,b\,a\,d_1\cdots d_t)+1,\end{aligned}$$

而当 $a<b$ 时，有

$$\begin{aligned}&\tau(c_1c_2\cdots c_s\,a\,b\,d_1\cdots d_t)\\&=\tau(c_1c_2\cdots c_s\,b\,a\,d_1\cdots d_t)-1\end{aligned}$$

所以这两个 n 阶排列的奇偶性不同.

再考虑不相邻两数的对换，设 n 阶排列为

$$c_1, c_2, \cdots, c_i, a, e_1, \cdots, e_j, b, d_1, \cdots, d_k$$

其中 $j \geqslant 1$，交换 a，b 的位置，得

$$c_1, c_2, \cdots, c_i, b, e_1, \cdots, e_j, a, d_1, \cdots, d_k.$$

由定义可知，n 阶排列的逆序数由排列中各数的相对位置确定，与用什么方式得到它无关. 我们用另一个方法实现这个对换，先由 a 依次与右边相邻数对换 j 次，得

$$c_1, c_2, \cdots, c_i, e_1, \cdots, e_j, a, b, d_1, \cdots, d_k,$$

再把 b 依次与左边相邻数对换 $j+1$ 次，得

$$c_1, c_2, \cdots, c_i, b, e_1, \cdots, e_j, a, d_1, \cdots, d_k.$$

其间共进行了 $2j+1$ 次相邻两数的对换，即两排列间改变了 $2j+1$ 次奇偶性，所以它们的奇偶性不同.

推论　在 $n!$ $(n \geqslant 2)$ 个不同的 n 阶排列中，奇偶排列各占一半.

证　设有 p 个奇排列，q 个偶排列. 把每个奇排列的最左边的两个数对换，由定理 1.1 可知 p 个奇排列都变成偶排列，于是 $p \leqslant q$，对每个偶排列作最左边两数的对换，同理可得 $q \leqslant p$，所以有 $p = q$.

1.1.3　n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前，先观察三阶行列式的展开式. 由三阶行列式的展开式

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

可以看出，其中每一项的三个数都取自于行列式的不同行不同列，除正负号外，可把它们写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 j_1, j_2, j_3 是三阶排列，而每一个不同的三阶排列都对应展开式中的某一项，且当 j_1, j_2, j_3 为偶排列时，该项前面取正号，否则该项前面取负号. 这样，利用求和号 $\sum$（见本章附录）及排列的逆序数，三阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

同样,二阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}.$$

根据这个规律,可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列构成的 n 阶行列式记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式的展开式为

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有不同的 n 阶排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 求和. n 阶行列式常简记为 $D = |a_{ij}|_n$.

一阶行列式$|a_{11}|$就是数 a_{11}.

由定义知,n 阶行列式的展开式中每一项中的 n 个元素都取自于 n 阶行列式的不同行不同列,且每一项的行下标都是自然排列 $1,2,\cdots,n$,而每一项的列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是偶排列时该项带正号,否则带负号. 例如 $a_{12}a_{23}a_{32}a_{41}$就不是四阶行列式的展开式中的项,因其中有两个元素 a_{12}, a_{32}都是取自于第二列,而 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$是四阶行列式的展开式中的某项,由 $\tau(3\ 4\ 1\ 2)=4$ 知该项前面取正号.

n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项,由定理 1.1 的推论知,其中带正号和负号的项(不算元素本身所带的正负号)各占一半. 当 $n>3$ 时,由定义知,行列式不能由对角线法则得到展开式.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在这个行列式中,当 $i>j$ 时,有 $a_{ij}=0$,即 D 中可能不为零的元素 a_{ij} 的下标满足 $i\leqslant j$,称这种行列式为上三角形行列式.在 D 的展开式

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

中,当 $j_n<n$ 时,$a_{nj_n}=0$,所以展开式中可能不为零的项中,必有 $a_{nj_n}=a_{nn}$,而此时,j_{n-1}不能取 n,且 $j_{n-1}<n-1$ 时,$a_{n-1j_{n-1}}=0$,即必有 $a_{n-1j_{n-1}}=a_{n-1\,n-1}$,依次可得,$D$ 的展开式中可能不为零的只有一项,即:

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\ &=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

此例说明,上三角形行列式等于其主对角线上的 n 个元素的乘积.

如果在 n 阶行列式$D=|a_{ij}|_n$ 中,当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$ 或 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=0$,则分别称 D 为下三角形行列式或对角形行列式.由行列式的定义同例 1.6 的讨论可知它们也等于主对角线上 n 个元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 类似于例 1.6 的讨论,在 D 的展开式中可能不为零的项必有 $a_{1j_1}=a_{1n}$, $a_{2j_2}=a_{2n-2},\cdots,a_{nj_n}=a_{n1}$,故

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,2,1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}. \end{aligned}$$

定理 1.2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的展开式的一般项可以表示为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 都是 n 阶排列.

证 在 D 的展开式中,一般项可表为

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} \\ =\ &(-1)^{\tau(1\,2\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}. \end{aligned}$$

如果交换其中元素 a_{sk_s} 和 a_{tk_t} 的位置(设 $s<t$),则其行下标和列下标构成的排列分别改变为

$$1,2,\cdots,t,\cdots,s,\cdots,n \quad \text{和} \quad k_1,k_2,\cdots,k_t,\cdots,k_s,\cdots,k_n.$$

由定理 1.1 知,它们同时改变了奇偶性,故

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(12\cdots s\cdots t\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_s\cdots k_t\cdots k_n)} \\ =\ &(-1)^{\tau(12\cdots t\cdots s\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_t\cdots k_s\cdots k_n)}, \end{aligned}$$

所以交换一般项中任两个元素的位置,其符号不变.这样经有限次交换,当行下标与列下标的排列分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 时,有

$$(-1)^{\tau(1\,2\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

$$= (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

例 1.8 若$(-1)^{\tau(521i4)+\tau(j245k)} a_{5j} a_{22} a_{14} a_{i5} a_{4k}$是五阶行列式的展开式中的某一项,试问 i,j,k 分别取何值?该项应取正号还是负号?

解 由行列式的定义,每项中的元素应取自于不同行不同列,故 i,j,k 的取值只能是 3,1,3 或 3,3,1.

当 i,j,k 分别取 3,1,3 时,因 $\tau(5\ 2\ 1\ 3\ 4)+\tau(1\ 2\ 4\ 5\ 3)=7$,该项取负号,即 $-a_{51}a_{22}a_{14}a_{35}a_{43}$是五阶行列式中的一项.

当 i,j,k 分别取 3,3,1 时,$\tau(5\ 2\ 1\ 3\ 4)+\tau(3\ 2\ 4\ 5\ 1)=10$,该项取正号,即 $a_{53}a_{22}a_{14}a_{35}a_{41}$也是五阶行列式中的一项.

如果把 n 阶行列式的展开式中的每一项的行下标都排列成$i_1,i_2,\cdots,i_n$,则它们的列下标是 $n!$ 个不同的 n 阶排列,由定理 1.2 知,n 阶行列式的展开式可表示为

$$D=|a_{ij}|_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

$$= (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

同理,若把 $D=|a_{ij}|_n$ 的展开式中的每一项的列下标都排列成$j_1 j_2 \cdots j_n$,则有

$$D = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

特别是,当 $D=|a_{ij}|_n$ 的展开式中的每一项的列下标都排列成 $1,2,\cdots,n$ 时,可得

$$D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

§1.2 n 阶行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知,当 n 较大时,利用其展开式计算行列式的计算量是很大的.在这一节中介绍的行列式的性质,不仅可以用来简化行列式的计算,而且还能在行列式的理论研究中发挥重要作用.

行列式 D 的行和列互换后得到的行列式称为D 的转置行列式,记作 D^{T} 或 D'.若

$$D=|a_{ij}|_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=|a_{ji}|_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列互换,行列式的值不变,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证　设 $a_{ji}=b_{ij}$,则 $D^{\mathrm{T}}=|a_{ji}|_n=|b_{ij}|_n$,在 D^{T} 的展开式中,把列下标取作 $1,2,\cdots,n$,得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}. \end{aligned}$$

此即 D 的行下标取作 $1,2,\cdots,n$ 的展开式,故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由此性质可知,行列式关于行的性质对于行列式的列也成立,所以下面只需讨论行列式关于行的性质.

性质 2　交换行列式中任两行对应元素的位置(简称为交换行列式中任两行),行列式改变正负号,即若设

$$D=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array},$$