复变函数
百题多解法

广西教育出版社

复变函数百题多解法

沈燮昌　顾筱英　编著

广西教育出版社

复变函数百题多解法
沈燮昌　顾筱英　编著
*
广西教育出版社出版
（南宁市七一路7号）
广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷
*
开本 850×1168　1/32　12.375 印张　270 千字
1990年5月第1版　1990年5月第1次印刷
印　数：1—3000册
ISBN 7-5435-0820-6/G·647
定价：4.55 元

前　言

为了帮助综合性大学、师范院校、理工科大学、电视或业余大学的学生以及广大的科技工作人员、自学青年学好“复变函数基础”这一门课程，使之能够真正地掌握这门课程的一些基本概念、基本理论、基本思想、基本的解题方法和技巧，开阔思路，提高灵活应用所学的知识去分析问题和解决问题的能力，我们编写了本书．这无疑地也为广大从事于复变函数教学工作的老师提供了参考资料．

本书根据现行的、通常在大学中所依据的“复变函数教学大纲”的要求，结合作者多年来的教学经验，选择了复变函数论中的一些较为典型的题目，介绍了一些常用的基本方法及技巧，并适当结合作者的体会，加以发挥，每一道解力求给出多解，有的题甚至于给出四、五种解法．在对一道题给出一种证法或解法前力求作出一些分析，阐明解题的基本思想或方法．当然，这里并没有讲得太多，否则就会基本上等于解题了．在每一题结束时，都给以简评，说明每一种方法的特点、关键之处及主要差别，有时也说明这题在今后的学习中所起的作用．最后两道题给出了哥西定理的严格证明，以及哥西定理推广的几种证明．对这两个问题在国内的一般教科书中是很少见到严格的证明的，而这两个问题是整个复变函数论的基础，它们的重要性是显然的，因此在本书中作出了介绍．

作者在选题过程中深感到有些很好的题目无法将它选择在内，例如，用多值函数进行积分，解析开拓中有关问题，用对称变换进行保角变换等等，因为对有些题目要做到一题多解是很不

容易的.

在编排上，大体参照沈燮昌编著的《复变函数论基础》一书（大学自学丛书，上海科技出版社出版，已出版了三版，第一版在1982年出版）中所列的次序，不过有时为了一题多解，也有个别的题目没有按这次序编排.

我们希望读者能参照本书中所提供的一些解题的方法及技巧，自己进一步独立思考，反复分析，总结经验，从而不断地提高自己的创造能力，进一步掌握复变函数这门课程的基本内容及方法.

作者衷心地感谢广西教育出版社的大力支持，也衷心感谢该出版社的黄力平同志，他为本书的出版付出了很多劳动，并提出了很多宝贵的意见.

沈燮昌　顾稼英

1988年8月于北京大学

目　录

一、复　数

1．设 z 是复数，$|z|=1$，求证$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$是实数，且其值在 -1 与 1 之间。

分析1　将复数用它的实部与虚部来表示，利用实部的平方加上虚部的平方为 1 的性质直接来验证。

证法1　令 $z=x+iy$，由条件$|z|=1$ 知，

$$x^2+y^2=1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1 \tag{1}$$

因此，利用(1)就可以得到

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=x\leqslant|z|=1$$

$$\left|\frac{1}{2}z\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(|z|+|\bar{z}|\right)=1$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)&=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{1}{x+iy}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+i\frac{1}{2}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}\right)\\
&=x.
\end{aligned}$$

再由(1)看出，当$|z|=1$时，$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=x$，其值在 -1 与 1 之间。

分析2　若将复数用指数表示，利用其模为 1，也可直接验算。

✓**证法2**　令$z=e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，则

例2：[illegible]

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)=\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

因此，当$|z|=1$时，$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\cos\theta$，其值在$-1$与$1$之间。

简评 这两种证法都是利用复数的基本表示式而得到，都很基本，读者需熟练地掌握。

2．证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$。几何意义

分析1 将复数用实部与虚部来表示，然后利用复数的模可以用实部与虚部平方之和来表示这一性质，进行直接验算。

证法1 令$z_k=x_k+iy_k$，$k=1$，2，则有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2\\&\quad+(y_1-y_2)^2\\&=2(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)\\&=2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned}$$

✓**分析2** 将复数模的平方用其本身及其共轭复数的乘积来表示，再进行验算。

证法2 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$

$$\begin{aligned}&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\&=|z_1|^2+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2+|z_2|^2+|z_1|^2-\bar{z}_1z_2-z_1\bar{z}_2+|z_2|^2\\&=2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned}$$

简评 这两种证法都很基本，但似乎证法二更为简单，因为它利用了共轭复数的一些性质。

3．设$-1\leqslant x\leqslant 1$，求复数

$$\frac{1+x+i\sqrt{1-x^2}}{1+x-i\sqrt{1-x^2}}\tag{1}$$

的模与幅角。

分析1 复数相除的运算，可以看作将分式的分子与分母同乘以分母的共轭复数来得到，对于这样得到的复数，已可以直接求出其实部与虚部，从而求出其模及幅角。

解法1 $\dfrac{1+x+i\sqrt{1-x^2}}{1+x-i\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{(1+x+i\sqrt{1-x^2})(1+x+i\sqrt{1-x^2})}{(1+x-i\sqrt{1-x^2})(1+x+i\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{(1+x)^2+2i(1+x)\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)}{(1+x)^2+(1-x^2)}$$

$$=\frac{2x(1+x)+2i(1+x)\sqrt{1-x^2}}{2(1+x)}$$

$$=x+i\sqrt{1-x^2}).$$

由此得到其模为

$$\sqrt{x^2+(\sqrt{1-x^2})^2}=1,$$

其主幅角为

$$\arg(x+i\sqrt{1-x^2})=\begin{cases}\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\pi, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases} \qquad (2)$$

$$\text{令 } \sin\theta=x,\ |\theta|\leqslant\frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

因此 $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$. 因而有

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{ctg}\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

这样一来，当$x>0$时，由于$x+i\sqrt{1-x^2}$在第一象限，因此有

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \tag{4}$$

当$x<0$时，由于$x+i\sqrt{1-x^2}$在第二象限，因此有

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\pi+\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

比较(2)与(4)，(5)，得到

$$\arg(x+i\sqrt{1-x^2})=\frac{\pi}{2}-\theta \tag{5}$$

因此　$\mathrm{Arg}(x+i\sqrt{1-x^2})=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$k=0, \pm 1, \pm 2\cdots$

其中θ由(3)确定，$\theta=\arcsin x$，这就是复数(1)的幅角。

分析2　用复数的指数表示，利用两个复数相除的模是其模相除，两个复数相除的幅角是其幅角相减的性质，也可以得到这个复数的指数表示式，从而求出其模及幅角。

解法2　$\dfrac{1+x+i\sqrt{1-x^2}}{1+x-i\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x})}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}} \tag{6}$$

令$\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}=re^{i\theta_1}$，利用$-1\leqslant x\leqslant 1$，可知

$$\sqrt{1+x}-i\sqrt{1-x}=re^{-i\theta_1} \tag{7}$$

其中　$r=\sqrt{(\sqrt{1+x})^2+(\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{2}$　(8)

因此这复数的模为1，而

$$\theta_1 = \operatorname{Arg}(\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x}) = \operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

即

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \tag{9}$$

由(6)、(7)与(8)得

$$\frac{1+x+i\sqrt{1-x^2}}{1+x-i\sqrt{1-x^2}} = e^{2i\theta_1} \tag{10}$$

由(9)可以得到

$$\operatorname{tg}2\theta_1 = \frac{2\operatorname{tg}\theta_1}{1-\operatorname{tg}^2\theta_1} = \frac{\dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}}{1-\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

因此，若令 $\sin\theta = x$，$|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$ (11)

则 $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$，用上面方法可以得到

$$2\theta_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

由(10)知复数(1)的幅角为

$$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

其中 θ 由(11)所确定，即 $\theta = \arcsin x$。

简评　解法1比较基本，用这个方法一定可以求出复数的模与幅角．解法2有一定技巧，对于特殊的复数，可比较容易地求出其模及幅角。

4. 已知复数 z 满足

$$z^2+z+1=0 \tag{1}$$

求复数 $z^{11}+z^7+z^3$ 的值。

分析1 由(1)可以得到

$$z^2=-(z+1) \tag{2}$$

即 z 的二次幂可以用 z 的低次幂来表示，因此想到若不断应用这结果，就可以将 z 的高次幂一直简化到最低次幂，从而求出所需要计算的复数的值。

解法1 由(2)得

$$\begin{aligned} z^4&=(z+1)^2=z^2+2z+1 \\ &=-(z+1)+2z+1=z \end{aligned} \tag{3}$$

因此由(3)及(2)，可以得到

$$\begin{aligned} z^{11}+z^7+z^3&=z^3[1+z^4(1+z^4)] \\ &=z^3[1+z(1+z)] \\ &=z^3[1+z+z^2] \\ &=z^3[1+z-(1+z)] \\ &=0. \end{aligned}$$

分析2 将满足方程(1)的复数 z 看作满足方程

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0$$

的根，即 $z^3=1$，这样可以简化求解过程。

解法2 由 $z^3=1$，得

$$z^7=z^6\cdot z=z,\quad z^{11}=z^9\cdot z^2=z^2$$

因此由(1)得

$$z^{11}+z^7+z^3=z^2+z+1=0$$

简评 这两个解法都比较简单，但解法1更为基本，因为对于这种类型的题总可以化为一次多项式。用解法2也能化到一次多项式，但有一定的技巧。这两个解法都可取。如果从方程(1)

中解出 z，再直接代入到$z^{11}+z^7+z^3$中去计算，虽然也能算出其值，但就显得麻烦了。

5．求$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$，及$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$。

分析1 对于有规律的三角函数求和，常用的方法是设法乘上一个简单的三角函数，以便利用三角函数的积化和差的公式，化成两两相减，再利用前后相消来求得所需要的和。

解法1 我们有 (恒等式)

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\left(kx+\frac{1}{2}x\right)-\sin\left(kx-\frac{1}{2}x\right)\right]$$

$$=\sin\frac{1}{2}x+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

$$=2\sin\frac{1}{2}(n+1)x\cos\frac{n}{2}x$$

由此得

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

此外，类似地有

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$=\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

$$=2\sin\frac{n}{2}x\ \sin\frac{1}{2}(n+1)x$$

因此有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

分析2 利用德莫弗(De Moivre)公式

$$\cos^{n}\theta+i\sin^{n}\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^{n}=e^{in\theta}$$

可以想到，正弦及余弦的倍角相加可以化为$\cos\theta+i\sin\theta$即 $e^{i\theta}$ 的一个等比数列相加。这样也就能得到一个紧凑的形式了。

解法2 显然有

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kx+i\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\sum_{k=0}^{n}(\cos kx+i\sin kx)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\cos x+i\sin x)^{k}=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}$$

$$=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{[1-e^{i(n+1)x}][1-e^{-ix}]}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})}$$

$$=\frac{1-e^{-ix}-e^{i(n+1)x}+e^{inx}}{(1-\cos x)^{2}+\sin^{2}x}$$

$$=\frac{e^{i\frac{n}{2}x}\left[\left(e^{-i\frac{n}{2}x}+e^{i\frac{n}{2}x}\right)-\left(e^{i(\frac{n}{2}+1)x}+e^{-i(\frac{n}{2}+1)x}\right)\right]}{1-2\cos x+\cos^{2}x+\sin^{2}x}$$

$$=\frac{2e^{i\frac{n}{2}x}\left(\cos\frac{n}{2}x-\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)x\right)}{4\sin^{2}\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{e^{i\frac{n}{2}x}\sin\frac{1}{2}(n+1)x\ \sin\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{e^{i\frac{n}{2}x} \quad \sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

比较两边的实部与虚部，就得到

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos\frac{n}{2}x \sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{n}{2}x \sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

简评　比较这两个解法，可以看出用复数方法，应用德莫弗公式比较简单，这里的关键是将三角函数利用尤拉(Euler)公式化为指数函数，即由

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

得

$$\cos x - i\sin x = e^{-ix}$$

(这实际上已用到德莫弗公式)，然后分别将两式相加及相减，可以得到

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

(这个公式在解法中实际上已用到)。因此，余弦及正弦的倍角和就可以化为指数函数的倍角和，而指数函数的倍角和可以用等比数列求出，因此就能求出其和了。虽然在方法 2 中不是这样来进行的，但是从本质来看是一样的。

这两个求和在富里哀(Fourier)级数理论以及后面要讲到的调和函数的积分表示时都用到，是重要的公式。

6．求平面上的直线与圆周的复方程．

分析1 利用复数是向量的思想，直线可以由直线上一固定点及一个固定向量完全确定，而圆周上每一点到圆心的向量的长度必是常数，就可以写出其复方程．

解法1 平面上任给一个向量z_1，显然经过任意点z_0，且与此向量z_1平行的直线的参数方程为：

$$z-z_0=tz_1,\quad -\infty<t<+\infty \tag{1}$$

即 $$z=z_0+tz_1,\quad -\infty<t<+\infty$$

由此得 $$\bar{z}=\bar{z}_0+t\bar{z}_1,\quad -\infty<t<+\infty$$

由后两式消去 t 后得

$$\bar{z}_1(z-z_0)=z_1(\bar{z}-\bar{z}_0)$$

即 $$\bar{z}_1z-z_1\bar{z}+\bar{z}_0z_1-z_0\bar{z}_1=0 \tag{2}$$

若令$\alpha=iz_1$，从几何上看，向量α与z_1相垂直，即向量α是上述直线的法线向量．因此，将(2)式两边乘$-i$后得：

$$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+D=0 \tag{3}$$

其中$D=i(z_0\bar{z}_1-\bar{z}_0z_1)$为实数，$\alpha\neq0$．

反过来，若有复方程(3)，其中$\alpha\neq0$可以是复数，但D是实数，则将上述推导过程反推回去，可以看出，它必是某个形如(1)的直线方程，其中$\alpha=iz_1$，即$z_1=-i\alpha$，而由

$$D=i(z_0\bar{z}_1-\bar{z}_0z_1)=i(z_0\overline{(-i\alpha)}-\bar{z}_0(-i\alpha))$$

$$=-(z_0\bar{\alpha}+\bar{z}_0\alpha)=-2\mathrm{Re}(z_0\bar{\alpha})$$

知，可以取

$$z_0=t_1\alpha,$$

只要t_1满足

$$D=-2t_1|\alpha|^2,\quad 即t_1=\frac{-D}{2|\alpha|^2}既可．$$

由方程(1)还看出，直线(1)经过原点的充要条件是D为零，即$D=0$。

根据圆周的定义，动点z到一个定点z_0的向量的长度为常数（以后说这个常数为$R>0$）的动点z的轨迹被称为圆周，其中z_0称为此圆周的圆心，R称为此圆周的半径．因此就得到了方程：

$$|z-z_0|=R \tag{4}$$

由此得

$$|z-z_0|^2=R^2$$

即

$$(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0)=R^2$$

$$z\overline{z}-z_0\overline{z}-\overline{z}_0z+|z_0|^2-R^2=0 \tag{5}$$

$$z\overline{z}+\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}\,z+D=0 \tag{6}$$

其中

$$\alpha=-z_0 \tag{7}$$

$$D=|z_0|^2-R^2=|\alpha|^2-R^2\text{是实数} \tag{8}$$

反过来，若已给方程(5)，其中D为实数，且满足

$$|\alpha|^2-D>0 \tag{9}$$

则刚才所推导的过程全部都可以反推回去，而得到方程(4)，其中

$$z_0=-\alpha \tag{10}$$

$$R=\sqrt{|\alpha|^2-D}>0 \tag{11}$$

因此满足(6)的复方程是一个圆周方程，只要常数D满足关系式(9)即可，其圆心z_0及半径R由(10)与(11)所确定。

合并(3)与(6)，我们知道，对于方程

$$Az\overline{z}+\alpha\overline{z}+\alpha z+D=0 \tag{12}$$

其中A与D为实数，若$A=0$，则要求$\alpha\neq0$，此时(12)是直线的复方程；若$A\neq0$，则要求满足