279488
成都工学院图书馆
基本館藏

李群和微分几何

严志达 著

人民教育出版社

27948

3163
6643

3163
6643

李群和微分几何

严志达 著

人民教育出版社

本書在簡单的介紹了李群及李代数方面的一些基本概念后即着重討論紧致李群与它相关的复半单純李代数。用几何学对称黎曼空間的观点討論实半单純李代数直至它的分类及自同构为止。本書可供綜合大学数学系高年級学生，研究生及数学工作者参考。

李群和微分几何

严　志　达　著

人民教育出版社出版（高等学校教学用書編輯部 北京宣武門內承恩寺7号）

（北京市書刊出版業營業許可証出字第2号）

欒文印刷厂印装　新华書店发行

統一書号13010•793开本850×1168 1/32印張 3 11/16

字数84000　印数0001—7,000　定價(8)0.48

1960年12月第1版　1960年12月第1次印刷

（另精2,000本）

目　录

緒　言

李群和微分几何两門数学都有比較久远的历史：这两門科学在它們建立的开始，就表現出在理論和应用上的重要的价値。古典微分几何对于其他数学，力学，物理，以及工程技术而言，已經成为經常遇到的不可少的工具。罗巴切夫斯基几何学的发現，其后更广义的所謂黎曼几何的建立，虽然初时驟然感覺得玄妙和抽象，同时也似乎不容易看出它們和客观事物間的連系。但从爱因斯坦的狹义和广义相对論提出以后，它們便成了近代物理現象研究中不可少的空間理論基础。可以預言，随着科学技术的发展，它們会找到更多的应用和发展。我們知道在上世紀末克来因氏指出所謂几何学，其本質是研究变换群下空間形式的科学。由于这个思想是非常合乎辯証唯物主义观点的，他主要以变换或运动代替了靜止的观点，以变换下图形間的联系代替了孤立的考慮，因此成了这个世紀几何学工作的指导思想，大大地促进和推动了他的发展。首先有李建立了現在以他的名字命名的一門数学：李群。他的理論在当时已經找到对于很多方面的应用，特别如微分方程，力学，以及几何学。但将李的工作継續加以发揮充实，而广泛指出他在几何学，物理学方面的重要应用，自然要推这个世紀以来特别是二十年代嘉当和外尔的工作。現在知道五十年前嘉当氏的似乎极端繁复艰深的群表現論，在量子力学中有着重要的应用。这个理論之所以深刻乃由于他联系着宇宙物質的秘奥，而并不由于他的符号是否难懂，演算是否冗长。

这本小书主要介紹紧致李群和半单純非紧致李群的理論，这个理論虽起始于上世紀末，而在本世紀二十年代嘉当氏的对称黎

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

曼空間理論出現后才指出了李群論，特别是半单純李群，和微分几何学的一个极重要的內在关系。嘉当这个工作在近代数学中可以說有着很大的影响，引起各种的推广和应用。我們的书分为四部分。第一章介紹李群和李代数的一些基本概念。这些內容为后来的討論所必需的。第二章主要是吉林-嘉当的关于单純代数分类的結果。我們是从所謂紧致李群和他的对应李代数出发。然后說明和他相同的問題复数域的李代数理論。这样不仅比較易于接收，同时对于几何学上的应用也比較直接。在这里应該指出我們准备这一章时非常受了邓金和奥尼西克[6]的論文的影响。邓金素根系的观念在理論和应用上都很重要，也重点的引入。紧致李群的图解也作了比較仔細的介紹。第三章介紹非紧致单純李代数的理論。主要的采取了嘉当对称黎曼空間的几何学观点。着重闡明这个理論的几何学的深刻意义。关于嘉当若干重要定理的証明有些采用了麦斯托夫論文中的写法。第四章主要是解决关于实半单純非紧致李代数的分类問題，及他的自同构的討論。这里着重对于非紧致李代数引进角图的表示，以及角图表示在討論自同构中的应用。为了討論我們也引进了群表現論方面一些簡单和必須的知識。虽然如前所說这个理論在应用方面有它的重要性，但深入的討論与本书的內容相去較远，所以只好滿足于极簡单的介紹。但是本书对于即使不攻几何学，而仅研究群表現論及其应用的人，例如物理学家和工程师，相信也有助益。关于本书內容的一些更深入的討論，近代的一些推广和应用，都将是很有趣的問題，希望能够留待异日。

本书前三部分是作者1955—1956在复旦大学和南开大学几何学討論会上作的报告。由于各方的关注，現在将它付印。除了添加了第四章外，其他內容沒有作重要的添加或修改。本书虽然希望讀者只要知道一些近世代数及点集拓朴学的若干基础知識，

就可以閱讀它。但是如果对于某些內容，特别是第一章的基本概念，不滿足于我們的介紹，恐怕还需要参考例如薛伐雷(Chevalley: *Theory of Lie groups I*. Princeton Press, 1946)之书的若干部分。我們第一章的內容是采自該书的，另外去年彭特里亚金所著"連續群"譯本在我国出版，彭著对我們討論的若干問題也有重要的参考的价值。

第一章　基本概念

§1. 李群和李代数

1. 李群的概念是微分流形和抽象群两种結构的結合。我們假定讀者已知抽象群的定义，現在先从微分流形的討論出发。

定义 1. 設 $\mathfrak{E}$ 是一个合于第二可数公理的 (*Hausdorff*) 豪氏道夫空間。(可以具体的看作一个欧氏空間的点集)。我們称 f 是定义在 $\mathfrak{E}$ 内一点 x_0 的某一邻域 U 的函数，卽表示 f 是一个 U 到实数域 R^1 的一个单值对应，$f(x)$ 表示 f 在点 $x\in U$ 的値。給定了一組定义在 $\mathfrak{E}$ 的一些邻域的函数組 $\mathfrak{F}$，这样便放在 $\mathfrak{E}$ 上定义了一个微分流形結构，如果下面的条件成立：

(1) 对于任一点 x_0 都存在，它的一个邻域 U_0，及 $\mathfrak{F}$ 内的一組函数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$，使得当 $x\in U_0$ 时对应 $\varphi_0: x\to(x^1(x), x^2(x), \cdots, x^n(x))$ 是 U_0 和一个 n 維数値空間 R^n 的一个連通开集 $\varphi_0(U_0)$ 的一个同胚对应，式中 $(x^1(x), \cdots, x^n(x))$ 是表点在 R^n 内对一固定坐标系的笛卡儿坐标。

(2) 任一个定义在邻域 W 的函数 f 属于 $\mathfrak{F}$ 的必須充分条件是：$f(x)=F(x^1(x),\cdots,x^n(x))$ $x\in W\cap U_0$，式中 F 表示一个定义在 R^n 的一邻域的有任意次連續偏导数 $\dfrac{\partial^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}F}{(\partial x^1)^{\lambda_1}\cdots(\partial x^n)^{\lambda_n}}$ 的函数。

滿足 (1) 的邻域 U_0 称为 x_0 的一个坐标邻域，$x^1, x^2, \cdots, x^n$ 称为对应于該邻域的一組坐标函，或簡称坐标。U_0 及对应 φ_0 組成 x_0 的一个局部坐标系，以 $\{U_0, \varphi_0\}$ 表示之。自然如果 $y\in U_0$ 則它也是 y 的一个局部坐标系。用 $\mathfrak{M}$ 表示微分流形，称拓朴空間 $\mathfrak{E}$ 为 $\mathfrak{M}$ 的底空間。这样的微分流形称为 C^∞ 类微分流形；属于 $\mathfrak{F}$ 的函数通称 $\mathfrak{M}$ 上的 C^∞ 类函数。假如在条件 (2) 中假定 F 不仅是有任意次偏导

数而更假定它是解析函数（即 F 可以展为收敛的戴勒級数是），則称 $\mathfrak{M}$ 是一个解析流形，$\mathfrak{F}$ 内的函数称为 $\mathfrak{M}$ 上的解析函数；以 C^{ω} 表示解析流形。

我們假定 $\mathfrak{E}$ 是連通的，流形自然是局部連通的。

n 称为流形 $\mathfrak{M}$ 維数，这个数可以証明（利用函数論的隐函数定理），是不依賴于坐标的取法的。

我們称两个解析（或 C^{∞}）流形 $\mathfrak{M}_1\to\mathfrak{M}_2$ 的对应 φ 为一个解析对应或 C^{ω} 对应（或 C^{∞} 对应）：如果对于任一个定义在 $\mathfrak{M}_2$ 上的 C^{ω} 函数 f 都有 $f o\varphi$ 是 $\mathfrak{M}_1$ 的一个 C^{ω} 函数。更具体的說如果 $x\in U_1\subseteq\mathfrak{M}_1$，$\varphi(x)\in U_2\subseteq\mathfrak{M}_2$，在 U_1，U_2 内引进坐标 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 及 $(y^1, y^2, \cdots, y^m)$，对应 φ 是解析的条件等价于将 y^i 表为 $x^1, x^2, \cdots x^n$ 的函数 $y^i=\varphi^i(x^1, x^2, \cdots x^n)$，$i=1, 2, \cdots m$，时；$\varphi^i(i=1, 2, \cdots, m)$ 都是解析函数。

从两个流形 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$，它們的底空間是 $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$，作一个新的流形称为 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ 的直乘积，以 $\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_2$ 表示之，的方法是这样：取 $\mathfrak{E}_1$，$\mathfrak{E}_2$ 的拓朴积 $\mathfrak{E}_1\times\mathfrak{E}_2$。令 ω_1 是对应 $(x_1, x_2)\to x_1$，ω_2 是对应 $(x_1, x_2)\to x_2$，式中 $x_i\in\mathfrak{E}_i$，$i=1, 2$。定义 $\mathfrak{E}_1\times\mathfrak{E}_2$ 的 C^{∞} 函数全体为所有这样一些函数：$f_1 o\omega_1$，及 $f_2 o\omega_2$ 其中 f_1, f_2 分别是 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ 上的 C^{∞} 函数。这样很容易証明在 $\mathfrak{E}_1\times\mathfrak{E}_2$ 上便有了一个流形的結构。

有了这样的准备現在我們来定义解析群。

定义 2. 一个解析群具有下面的結构：

(1) $\mathfrak{M}$ 是一个微分流形，$\mathfrak{E}$ 是底空間，它是連通的。

(2) 在 $\mathfrak{E}$ 内定义抽象群的結构，如 x，$y\in\mathfrak{E}$，$x\cdot y$ 是抽象群的結合，假定这个結合須滿足通常群的公理。

(3) $(x, y)\to x^{-1}y$ 所定的 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ 的对应是一个解析对应。

$\mathfrak{M}$ 称为解析群 $\mathfrak{G}$ 的底流形，抽象群 G 則称为 $\mathfrak{G}$ 的底群。

由于解析对应是連續的，所以解析群 $\mathfrak{G}$ 对应唯一的一个拓朴

群：即是底空間 $\mathfrak{G}$ 和群 G 所成的結构而同时对应 $(x, y) \to x^{-1} \cdot y$ 是 $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ 到 $\mathfrak{G}$ 的一个連續对应。

一个拓朴群称为李群，如果他的单位元素 ϵ 的連通分支是一个解析群。

2. 現在討論流形的切向量：

定义3. 称 X 是流形 $\mathfrak{M}$ 在 x_0 点的一个切向量，如果它是对于定义于 x_0 的邻域的 C^ω 函数 f 的一个綫性运算子，$Xf \in R^1$；合于

(1) $$X(f_1+f_2) = Xf_1 + Xf_2,$$

(2) $$X(cf) = cXf, \quad c \in R^1,$$

(3) $$X(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot Xf_2 + f_2 \cdot Xf_2, \quad f_1 \cdot f_2 \text{ 是两个函数之积。}$$

根据这个定义可以証明，如果在 x_0 的邻域 U_0 内取定一組坐标 $(x^1, x^2, \cdots x^n)$ 則

(1) $$Xf = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_0 Xx^1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_0 Xx^n,$$

式中 $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_0$ 是函数 f 对于坐标的表达式 $f(x) = F(x^1(x), \cdots x^n(x))$ 的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ 在 $x = x_0$ 点所取的值 $\frac{\partial F}{\partial x^i}(x^1(x_0), \cdots x^n(x_0))$ 的簡式。

定义4. 在 $\mathfrak{M}$ 上定义一个切向量場，或称 C^ω 切向量場，即是对于 $\mathfrak{M}$ 的一个区域 $\mathfrak{D}$（可能即是 $\mathfrak{M}$）内每一点 x 定义一个切向量 X_x，对于任何定义在 $\mathfrak{D}$ 的某一邻域 U 的 C^ω 函数 f 恒有：对应 $x \to X_x f$ 是定义于 U 的一个解析函数。

这个定义也等于說在取定一坐标后，用表达式(1)所定义的 x_0 的向量，其中 $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 作为 x_0 的函数当他属于 $U \cap U_0$ 时是解析的。

$\mathfrak{M}$ 的一个切向量場又称为一个无穷小变換。

設 φ 是流形 $\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ 間的一个解析对应，$y_0 = \varphi(x_0)$，φ 将 x_0 的切向量 X_{x_0} 对应于 y_0 点的一个切向量 Y_{y_0} 以 $\varphi(X_0)$ 表之。这个对应可以从下面的关系决定之：

(2) $$\dot{\varphi}(X_{x_0})f = X_{x_0}(f\circ\varphi)$$

f 是任何定义于 $\mathfrak{M}_2$ 中 y_0 邻域的解析函数。

注意 $f\circ\varphi$ 是 $\mathfrak{M}_1$ 上定义在 x_0 邻域的 C^ω 函数，所以(2)式右端之値为已知，易知 $X_{x_0}(f\circ\varphi)$ 对 f 是一个綫性运算子，故得唯一的一个 $Y_{y_0}=\dot{\varphi}(X_{x_0})$ 合于(2)。

現在研究解析群的切向量場，引入所謂**李代数**的概念。

令 $\mathfrak{G}$ 是一个解析群，$\mathfrak{M}$ 是他的底流形，令 σ 是 $\mathfrak{G}$ 内一个固定的元素，作对应 $\Phi_\sigma: \xi\to\sigma\cdot\xi$, $\xi\in\mathfrak{G}$。它是 $\mathfrak{G}$ 的一个解析 1－1 对应，称为 $\mathfrak{G}$ 的一个由 σ 决定的**左推移**。对于 $\mathfrak{G}$ 上任一个无穷小变换 X，自然由(2)使定义一个无穷小变换 $\dot{\Phi}_\sigma(X)$。X 称为**左不变无穷小变换**，如果

(3) $$\dot{\Phi}_\sigma X = X;$$

詳細的説即如以 X_ξ 表示 X 在 ξ 点定的切向量則(3)式表示

(3′) $$\dot{\Phi}_\sigma X_\xi = X_{\sigma\cdot\xi}.$$

对于无穷小变换 X, Y，我們在通常的数学分析中知道可以作另一个无穷变换称为**蒲阿松**(Poisson)**括号**，它的定义：

(4) $$[X, Y]f = Y\cdot Xf - X\cdot Yf.$$

可以从(2)，(3)，(4)証明：如果 X, Y 是左不变的則 **$[X, Y]$ 也是左不变无穷小变换**。

对于蒲阿松括号有熟知的所謂**亚可比**(Jacobi)**恒等式**。

(5) $$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

要得到一个左不变无穷小变换，我們只須取在单位元素 ϵ 点一个向量 X_ϵ，令 $X_\sigma=\dot{\Phi}_\sigma X_\epsilon$，于是得到一个向量場 X(不难証明其解析性)，从(3′)知道他自然是不变的；由此可知 $\mathfrak{G}$ 的所有左不变无穷小变换构成一个 n **維的向量空間**，在这个向量空間内同蒲阿松括号定义两个元素的結合，于是下面的規則是显然的

(1) $[X, Y]$ 对于 X 和 Y 都是綫性的，如 $[\alpha X_1+\beta X_2, Y]=$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$=\alpha[X_1,Y]+\beta[X_2,Y]$;

(2) $$[X,Y]=-[Y,X];$$

(3) $$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

这样所得的一个有限維环称为对应于解析群 $\mathfrak{G}$ 的李代数以 $\mathfrak{g}$ 表示之，它是一个非結合且非交换的代数。我們称一个有限維向量空間用$[X,Y]$表示它中間两元素的結合，如其合于(1)—(3)的条件者为一个抽象的李代数或簡称李代数。虽然根据李-嘉当的所謂李群第三基本定理，抽象的李代数都可以看作是一个解析群的李代数，我們将見到在以后有些討論往往不一定假定它是某一个李群的对应代数。

例：复数域 C 上的 n 維向量空間 V^n 的所有非异的綫性变换构成一群以 $GL(n,C)$表示之。求它的李代数。在 V^n 内取一組固定的底，則对于任一 $\sigma\in GL(n,C)$唯一的对应一个矩陣 $(x_{ij}(\sigma))$，令 $x_{ij}(\sigma)=x'_{ij}(\sigma)+\sqrt{-1}\,x''_{ij}(\sigma)$，其中 x'_{ij},x''_{ij} 都是实函数。这样令 $\sigma\to(x'_{11}(\sigma),x'_{12}(\sigma),\cdots,x'_{nn}(\sigma),x''_{11}(\sigma),\cdots x''_{nn}(\sigma))$是 $GL(n,C)$的一組坐标函，于是在$GL(n,C)$定义了一个解析流形結构，使成为一个解析群，$2n^2$ 是流形的維数。

設 X 是一个左不变无穷小变换，令 $a_{ij}(X)=X_\epsilon x'_{ij}+\sqrt{-1}\,X_\epsilon x''_{ij}$ 也以 $X_\epsilon x_{ij}$ 表之。这样便将X对应于一个 C 上的 $n\times n$ 矩陣$(a_{ij}(X))$，令 $\mathfrak{M}_n(C)$表示 C 上的全矩陣环，上面的对应即将 $GL(n,C)$的李代数，以 $\mathfrak{gl}(n,C)$表之，1—1 映之于 $\mathfrak{M}_n(C)$。現在要計算 $\mathfrak{gl}(n,C)$ 内的結合規律如何用 $\mathfrak{M}_n(C)$内的通常矩陣的乘法規律表出之？

$$[X,Y]_\epsilon x_{ij}=Y_\epsilon X_\sigma x_{ij}-X_\epsilon Y_\sigma x_{ij}.$$

計算 $X_\sigma x_{ij}$:

(5) $$X_\sigma x_{ij}=\phi_\sigma(X_\epsilon)x_{ij}=X_\epsilon x_{ij}\circ\phi_\sigma=X_\epsilon\Big(\sum_{k=1}^{n}x_{ik}(\sigma)x_{kj}\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}(\sigma)X_e x_{kj}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}(\sigma)a_{kj}(X)$$

于是

$$Y_e X_\sigma x_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(Y)a_{kj}(X).$$

最后得到

$$a_{ij}([X,Y])=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}(Y)a_{kj}(X)-a_{ik}(X)a_{kj}(Y))$$

以$\bar{X}$表示矩陣$(a_{ij}(X))$，則从上式可知

$$\overline{[X,Y]}=\bar{Y}\cdot\bar{X}-\bar{X}\cdot\bar{Y} \tag{6}$$

式中 $\bar{X}\cdot\bar{Y}$ 表示 $\mathfrak{M}_n(C)$内通常的結合法，即通常矩陣的乘法，这样便得到$\mathfrak{gl}(n,C)$的結构，它是在全矩陣环中以$\bar{X}\cdot\bar{Y}-\bar{Y}\cdot\bar{X}$ 表示結合 $[\bar{X},\bar{Y}]$ 所构成的李代数。

§2. 李群的局部同构

前节已經給出如何对一个李群对应一个李代数的方法，因此將問題化为一个純粹的代数問題。但是一个李群的李代数究竟能決定原来的群到如何程度呢？是我們現在要研究的問題。本节仅給出一般的結果，絕大部分的証明是缺的，因为这些对以后的討論不是完全必要的。

定义 1. 两个李群 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 間的一个对应 φ 称为同态，如果

(1) 它是抽象群間的一个同态。

(2) 它是流形間的一个解析对应。

对于两个李群 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 間的同态 φ，它們的李代数間也有一个同态对应以 φ 表出之。

要証明这个事实我們先在 $\mathfrak{G}$ 的单位元素 e 点取一个切向量

X_e，$\dot{\varphi}$ 将它对应到 $\mathfrak{G}'$ 的单位点 η 的一个向量 Y_η，

$$(7) \qquad Y_\eta = \dot{\varphi}(X_e)$$

在 $\mathfrak{G}$ 上由 X_e 所定的不变无穷小变换 $X_\sigma = \dot{\Phi}_\sigma X_e$ $(\sigma \in \mathfrak{G})$，$Y_\eta$ 在 $\mathfrak{G}'$ 上所定的左不变无穷小变换 $Y_{\varphi(\sigma)} = \dot{\Phi}_{\varphi(\sigma)} Y_\eta$。由(7)式得到

$$(8) \qquad Y_{\varphi(\sigma)} = \dot{\Phi}_{\varphi(\sigma)} Y_\eta = \dot{\Phi}_{\varphi(\sigma)} \cdot \dot{\varphi} X_e = \dot{\varphi} \cdot \dot{\Phi}_\sigma X_e = \dot{\varphi}(X_\sigma)$$

注意到 φ 是一个同态故有 $\Phi_{\varphi(\sigma)} \cdot \varphi = \varphi \cdot \Phi_\sigma$，因之 $\dot{\Phi}_{\varphi(\sigma)} \cdot \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \cdot \dot{\Phi}_\sigma$。从 (8) 知道 $\dot{\varphi}$ 将左不变无穷小变换对应到不变无穷小变换。要証明 $\dot{\varphi}$ 是一个同态，另外还须知道 $[\dot{\varphi}(X), \dot{\varphi}(Y)] = \dot{\varphi}([X, Y])$，这可以从他們的定义 (§ 1, (2), (4)) 得到，因此 $\dot{\varphi}$ 定了 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 的李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ 間的一个同态。

定义 2. 两个李群 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 称为**局部同态**，如果存在单位元素 e 和 η 的两个邻域 U 及 U'，二者之間有一个解析对应 φ，如果

$$y, x \in U, \text{ 且 } x \cdot y \in U \text{ 則 } \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

局部同态称为**局部同构**，如果 φ 还是 U 映在 U' 上的 $1-1$ 对应。事实上上面李代数的同态，仅须假定 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 是局部同态卽可。不难証明如果 φ 是一个局部同构，則 $\dot{\varphi}$ 也是 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ 間的一个同构。反之如果李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ 是同构，則李群 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 是否局部同构呢？这个問題答案是肯定的，我們通常称为李群第二基本定理。

定理 1. **两个李群 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 局部同态(或同构)的必須充分条件是它們的李代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ 間同态(或同构)。**

定理 1 也等于説如果 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 間有一个同态 Ψ，則恒存在唯一的一个 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ 的局部同态 φ，使得 $\dot{\varphi} = \Psi$。

对于同一个李代数，他所对应的李群只是局部同构的，局部同构的李群間的关系如何呢？两个李群的局部同态何时可以扩充为他們間的同态呢？这就使 O. Schreier 引进复盖群的观念。(注意下面的主要結果对于任意的拓朴群也能成立。)

定义 3. 連通的李群 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 称为 $\mathfrak{G}$ 的**复盖群**如果存在 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 映在 $\mathfrak{G}$

上的一个同态 f，使得对于 $\mathfrak{G}$ 的任一点存在一个邻域 U，$f^{-1}(U)$ 非空的，它的任一个連通分支与 U 同胚，f 在該分支上的限制是同胚对应。以 $(\mathfrak{G}, f)$ 表示复盖群。

定义 2. 单連通的复盖群称为**通用复盖群**。

下列两个定理是基本的。

定理 2. 如果 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 是单連通的，它和 $\mathfrak{G}$ 是局部同态的，f 是这个局部同态对应，则 f 可扩充为 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 和 $\mathfrak{G}$ 的一个同态。

所以如果 f 是一个局部同构，则扩充的 f 便是 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 到 $\mathfrak{G}$ 的一个复盖对应，因之 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的复盖群。

定理 3. 連通李群 $\mathfrak{G}$ 的通用复盖群存在，并且是唯一的。

所謂唯一的意义是这样：群 $\mathfrak{G}$ 的两个复盖 $(\tilde{\mathfrak{G}}_1, f_1)$，$(\tilde{\mathfrak{G}}_2, f_2)$ 訊为相等的如果存在 $\tilde{\mathfrak{G}}_1 \to \tilde{\mathfrak{G}}_2$ 的一个同构对应 φ 使得 $f_2 o \varphi = f_1$。

根据定理 3 可知任一个李群 $\mathfrak{G}$ 必同构于它的通用复盖群 $\tilde{\mathfrak{G}}$ 的一个商群 $\tilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ 是复盖对应 f 的核。由于 f 是局部同胚，所以 $\mathfrak{N}$ 是离散的，从拓朴群的一个定理知 $\mathfrak{N}$ 必属于 $\mathfrak{G}$ 的中心 $\mathfrak{Z}$，因之他是一个可换群。$\mathfrak{N}$ 称为群 $\mathfrak{G}$ 的潘加雷 (Poincaré) 群，所以 $\mathfrak{G}$ 的潘加雷群是可換的。这儿的討論对于紧致李群特别簡单，因为这时候 $\mathfrak{N}$ 是紧致的，所以是有限的。

定理 2 中的条件单連通是必要的。

§3. 正則坐标

将实数域 R^1 看作一維加群，它自然构成一个李群取 R^1 上的笛卡儿坐标 t 作为坐标函，它的李代数 $\mathfrak{r}^1 = \{L\}$ 式中 L 是由 $Lt = 1$ 所定义。作 $\mathfrak{r}^1$ 映入 $\mathfrak{G}$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的同态 φ 使 $\varphi(L) = X$。由于 R^1 是单連通的，这時 φ 所定的局部同态 ψ，$\dot{\psi} = \varphi$，可以扩充为 R^1 映入 $\mathfrak{G}$ 的对应 ψ，令 $\psi(t) = \theta(t, X)$ 表示点 t 的对应元素，取 $t = 1$，则 $\theta(1, X)$ 定义 $\mathfrak{g}$ 映入 $\mathfrak{G}$ 的一个对应 $c: X \to \theta(1, X)$，称为**正則对**

应；即 $c(X)=\theta(1,X)$。

如果在 $\mathfrak{g}$ 内引进坐标使得它成一个微分流形；因为 $\mathfrak{g}$ 是一个 n 維向量空間我們可以用通常向量空間的拓朴及通常的仿射坐标来定义微分流形。具体的說在 $\mathfrak{g}$ 内取一組固定的底 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，任一个 $X\in\mathfrak{g}$ 可表为 $X=u^1(X)X_1+\cdots+x^n(X)X_n$，$X\to u^i(X)$ 是坐标函。这样的流形与底的取法无关。現在証明

定理 1. c 是 $\mathfrak{g}$ 映入 $\mathfrak{G}$ 的一个解析对应。

証明：令 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 是 $\mathfrak{G}$ 在单位点 ϵ 邻近的一組坐标函，定义域是 W。考虑 $\theta(t,X)$，其中 $X=\sum_{i=1}^{n} v^i X_i$，由于 θ 的連續性得到一个正数 $T(v)$ 使当 $t<T(v)$ 时 $\theta(t,X)\in W$。令 $y^i(\theta(t,X))=$ $=F^i(t,v)$，它定义在区間 $|t|<T(v)$ 而 v 为任何值时；令 a 是这样的数，$|y^i(\theta)-y^i(\epsilon)|<a$ 时恒有 $\theta(t,X)\in W$。由 θ 的定义对于 $\sigma=\theta(t,X)$ 恒有

$$(9) \qquad X_\sigma f=\frac{df(\theta(t,X))}{dt}$$

如果令 f 是坐标函 y^i，于是 $X_\sigma y^i=\sum_{j=1}^{n} v_j X_j y^i$，$X_j y^i$ 是已知的，他是 $y^1, y^2, \cdots y^n$ 的解析函数，以 U_{ij} 表示之。于是 (q) 式成为 $\frac{dF^i(t,v)}{dt}=\sum_{j=1}^{n} v_j U_{ij}(y)$。故知函数 $y^i(\theta(t,X))=F^i(t,v)$ 是微分方程組

$$(10) \qquad \frac{dz^i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} v_j U_{ij}(z^1,\cdots,z^n), \quad i=1,2,\cdots n$$

的合于初始条件 $t=0, z^i=0$ 的解（假定 $y^i(\epsilon)=0$）。从微分方程的理論知，(10) 有唯一的一組解 $z^i=z^i(t,v)$ 对于 $|t|<c'$，$|v_k|<b$（简

当作 $|v|<b$)时是 t,v 的解析函数，且 $|z^i(t,v)|<a$，所以这个唯一解即是 $y^i\theta(t,X)$。这就知它當作 t,v 的函数 $F^i(t,v)$ 在上述区域内是解析的。

因为 $F^i(\lambda t,v)=F^i(t,\lambda v)$ 对于任何 $|t|<|\lambda|^{-1}T(v)$ 成立。由 $T(v)$ 的定义所以当 $|v|<b$ 时恒有 $T(v)\geqslant c'$。取 $\lambda=c<c'$，则 $F^i(t,cv)$ 是定义在 $|t|\leqslant 1$，$|cv|<bc$ 的解析函数它等于 $y^i(\theta(t,X))$，因此可取 $t=1$，于是 $F^i(1,u)$ 对于 $|u|<bc$ 是 u 的解析函数，这説明 $y^i(c(X))$ 当 $X=\sum u^iX_i$，当 $|u|<bc$ 时是 X 的坐标的解析函数，所以 c 是解析对应。

另一个事实也是很重要的，即(10)的解对于 $t=1$，$|v|<bc$ 时所成的亚可比行列式(Jacobian) $D(y^1(v),\cdots y^n(v))=D(U_{ji}(0,\cdots 0))$ 由于 X_j，$j=1,2,\cdots n$，的无关性，知其不为零。所以对应 $c\cdot\mathfrak{g}\to\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的零元素邻域 U_0 和 $\mathfrak{G}$ 的单位元素 ϵ 邻域 V_ϵ 他們間的一个同胚对应。于是可以用 $(v^1(X),\cdots v^n(X))$ 作 $c(X)$ 的坐标。以 $x^i(i==1,2,\cdots n)$ 表示坐标函，于是有 $x^i(c(\sum v^iX_i))=v^i$，这样定义的 V 的坐标称为正则坐标。

下面的一个定理是重要的。

定理 2. 令 φ 是 $\mathfrak{G}$ 映入 $\mathfrak{G}'$ 的一个同态，$\dot\varphi$ 是李代数 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ 間的同态，則恒有

(11) $$\varphi(c(X))=c(\dot\varphi(X)).$$

証明：令 θ 是上面定义的 R^1 到 $\mathfrak{G}$ 的同态 $\varphi o\theta$ 是 R^1 映入 $\mathfrak{G}'$ 的同态。而 $(\varphi\circ\theta)^\cdot(L)=\dot\varphi\circ\dot\theta(L)=\dot\varphi(X)$。令 θ' 是 R^1 映入 $\mathfrak{G}'$ 的同态他使 $\theta'(L)=\dot\varphi(X)$，于是 θ' 和 $\varphi\circ\theta$，都是 R^1 到 $\mathfrak{G}'$ 的同态，它們的 $\dot\theta'$，$(\varphi\circ\theta)^\cdot$ 是相同的，所以必須 $\theta'=\varphi o\theta$（参看 §2 定理 1)。取 $t=1$，即得 $\theta'(1,\dot\varphi(X))=\varphi(\theta(1,X))$，即 $c(\dot\varphi(X))=\varphi(c(X))$。

这个定理在以后有很多的应用。

例：取 $\mathfrak{G}$ 是 $GL(n,C)$，它的李代数 $\mathfrak{gl}(n,C)$ 已在 §1 中定出，令

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com