高等几何

GAODENGJIHE

山东教育出版社

高 等 几 何

泰安师专等五校编

山 东 教 育 出 版 社

一九八六年·济南

高等几何

泰安师专等五校编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　6.75印张　170千字

1986年8月第1版　1986年8月第1次印刷

印数1—3,070

书号 7275·558　定价 1.30 元

前　言

本书是按原教育部制定的二、三年制师范专科学校高等几何教学大纲的要求，结合我省几所师专的教学实践编写成的，可作为师范专科学校、教育学院等学校的教材，也可作为其他高等院校和中学教师的参考书。

书中包括几何基础和射影几何两编及一个附录。第一编主要介绍几何基础的发展简史、希尔伯特的公理体系和罗氏几何的基本定理，阐述了用公理法建立几何学逻辑体系的基本思想。第二编从仿射变换入手，介绍了射影空间、一维射影对应、射影变换群与几何学、二次曲线的射影性质、二次曲线的仿射和度量性质，系统地讲述了平面射影几何的基本内容和研究方法。第二编还介绍了仿射几何、射影几何的公理体系，从而从公理法的角度阐明了欧氏几何、罗氏几何、仿射几何、射影几何之间的内在联系与区别。在附录里又将罗氏几何与黎氏几何统一到射影几何里去，利用变换群的观点对这几种不同的几何学进行了比较与评定。

按照教学大纲的要求，读者可根据自己的实际情况，对书中标有*号的章节灵活取舍。

参加本书编写的有：泰安师专的李云普、任国朝、于荣尊，临沂师专的张立绥、王运生，济宁师专的孙炳泰，菏泽

师专的马知效、方荣凡，枣庄师专的宋述立等同志。最后，由李云普同志修改定稿。

书中的错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1986年2月

目　　录

第一编　几何基础

第二编　射影几何

附 录　非欧几何学的克莱茵模型

第一编　几何基础

公理法是整理和叙述数学知识的一种常用的方法。对于几何学，人们往往把在实践中总结出来的若干最基本的命题作为公理，由此再引出一些较复杂的概念并论证一些其他命题。这种在公理体系的基础上建立的并对其逻辑结构进行研究的几何学，称为几何基础。在本编中，我们主要介绍欧氏几何的公理体系和罗氏几何的公理体系。

第一章　欧氏几何的公理体系

在本章中，我们首先从几何基础的发展简史谈起，然后系统地介绍希尔伯特的公理体系（结合公理、顺序公理、合同公理、连续公理与平行公理）。

§1　古代几何学简史

早在三千多年以前，中国、埃及、巴比伦、印度等国就已经掌握了许多几何知识。

在我国，有一部很古的数学书叫《周髀算经》（约为公

元前400年的作品），里面记有周公（约公元前1100年）与商高的问答。从他们的问答中可以看出，当时人们就已知道了勾股形（即直角三角形）中勾三、股四、弦五的关系。书中还记载了一位名叫陈子的人，他曾用勾股定理和相似形的比例关系推算过地球和太阳的距离以及太阳的直径。其后，如《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》等等，都是我国汉唐以前流传至今的经典数学著作，其中记载有丰富的算术、代数和几何的知识。关于圆周率的计算，我国古代数学家有着重大的贡献。如西汉末年刘歆已算得 $\pi=3.1547$；三国时，刘徽利用割圆术算得 $\pi=3.14$；南北朝时，祖冲之（公元429—500年）算得 $3.1415926<\pi<3.1415927$，已达到了极为精确的程度。

在埃及，公元前3000多年时，库佛王的金字塔就高达138公尺。希腊古代数学家泰勒斯（Thales，约公元前639—548年）曾利用相似形的原理测量了金字塔的高度。这些事实说明，当时已有了测量术和几何的计算。

古希腊的历史学家和数学家，认为埃及人的几何知识产生于对土地的测量。因为在尼罗河每次泛滥之后，他们就得把被河水冲没的地界重新测量一次。在希腊文中，“几何学”这个名词就是“土地测量”的意思。记录了埃及人几何知识的书，有两本流传至今。其一是公元前2000—1700年阿梅斯（Ahmes）手抄的书，后人称为《阿梅斯杂录》；其二是缺少卷首的现在保存在莫斯科的书（约公元前十九世纪左右），称为《莫斯科杂录》。从这两本书上可以看到，当时埃及人

已能够取一边为单位长度的正方形作为面积单位，并能用与现代相同的公式去计算矩形、三角形、梯形的面积。特别重要的是埃及人当时已能够精确地计算正四棱台的体积

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)。$$

但总的看来，当时这些国家对几何学的研究，还是比较简单的，没有能够超出对个别问题求特殊解答的范围。

约在公元前七世纪，埃及人的几何知识传入希腊，那时希腊的经济文化比其他民族要繁荣昌盛得多，几何学也跟着发展成为一门科学。当时，希腊人不仅继续积累新的几何知识，并且开始采用特别的方法去创造理论。这种方法便是我们现在所用的演绎法（公理法）。

希腊几何学的创始人是泰勒斯，他曾在埃及居住过，掌握了埃及人的数学知识，以后他的学识很快超过了当时埃及人的数学水平。泰勒斯从埃及回到他的故乡米勒都斯，在那里创办了学校，为古希腊培养了许多哲学家和其它学科的学者，成为当时著名的流派——依虹尼安派的创始人，对希腊文化的发展起了重大的作用。

继泰勒斯之后，希腊数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前569—500年）也创立了一个有名的学派，称为毕达哥拉斯学派。这个学派为几何学的发展作出了重大的贡献，如毕达哥拉斯定理（勾股定理），三角形内角和定理，有关空间正多面体定理等等，都是由这个学派发现并证明的。毕达哥拉斯的学生希派斯（Hippasus）还发现了无公度线段的

存在，使几何学的发展大大地前进了一步。

毕达哥拉斯学派稍后，在希腊的京城雅典，产生了科学史上著名的雅典学派。希波克拉特（Hippocrates，公元前470年—？），柏拉图（Plato，公元前429—348年），欧道克斯（Eudoxus，公元前408—355年）被称为雅典学派中最著名的三大几何学家。历史上第一部几何学教科书，就是希波克拉特写的。在这本教科书中有了初步的几何定理的证明。柏拉图是当时希腊的哲学家，但他对几何学特别重视，他把逻辑学的思想方法引进了几何学，使原始的几何学变得更加系统与严密。欧道克斯在数学上的主要贡献是创造了比例论与“取尽法”，他的比例论后来编入了欧几里得（Euclid，公元前330—275年）《几何原本》的第五卷。欧几里得在这个理论的基础上，以当时最大可能的严密方式叙述了几何。“取尽法”是以下面的假设作基础的：如果从某数量去掉一半或更多的部分且对剩下的部分施行同一手续，并同样地一直进行下去的话，那么可以获得这样的数量，使它比任意给予的一数量还要小些。欧道克斯还得到了棱体、锥体和球体的体积计算方法。

古希腊几何学的发展，与哲学的发展有着密切的联系。特别值得提出的是逻辑学的创始人亚里斯多德（Aristotle，公元前384—322年）。他曾经指出：任何一种严密的科学体系的形成，是从一些不能证明的原理开始的，不然所需要的证明将要无止境地继续下去，形成无穷尽的步骤。至于不能证明的原理可分成两类：（a）一切科学共同具有的原理；

(b)某一门科学特有的原理……。实际上，亚里斯多德所说的逻辑方法，就是今天我们在数学里普遍应用的演绎法。这种方法对当时的希腊几何学家欧几里得的历史巨著《几何原本》（下一节将详细介绍）有着重大的影响。

§2　欧几里得的《几何原本》

欧几里得是古希腊最伟大的一位几何学家。他是柏拉图派的学生，曾在埃及的亚历山大城教过数学，并且是希腊的亚历山大学派的创始人。

欧几里得在他的千古不朽的名著《几何原本》（以后简称为《原本》）中，不仅非常详尽地搜集了当时人们所知道的一切几何学方面的资料，而且还把这些非常分散的知识用逻辑推理的方法，把它们编排成为一个系统的理论体系。他把几何学，依照亚里斯多德所说的严密科学理论的要求，建筑在几个最初的假设（定义、公设、公理）上，由这些假设利用逻辑推理导出后面的一切定理。不仅如此，欧几里得还示范式地规定了几何证明的方法，主要的是分析法、综合法和归谬法。因此，欧几里得的《原本》，不但在完善和充实上大大地超过了在它以前的所有几何学著作，并且在以后的两千余年间依然没有一部几何著作可以和它比美。虽然十九世纪二十年代，俄国伟大的数学家尼·伊·罗巴切夫斯基(Н.И.Лобачевский，1792—1856)有了新的发现，使几何学发生了革命，但直到现在，中学几何教科书中的叙述方

法，仍与《原本》没有多大的实质性的差别。

欧几里得《原本》的基本结构是定义、公设和公理的系统。《原本》共有十三卷，其中1、2、3、4、6、11、12、13卷属于几何本身，其余则讲比例（用几何方式来叙述）和算术（属代数学的内容）。第一卷，包括三角形全等的条件、三角形的边角关系、平行线的理论以及三角形、多边形面积相等的理论。第二卷，叙述了如何把多边形变成等积的正方形。第三卷，叙述了圆的性质。第四卷，讨论了圆的内接和外切多边形。第六卷，论述了相似多边形。在最后三卷中，叙述了立体几何的理论。

《原本》的每卷里，首先给要建立相互关系的一些重要概念下了定义。例如在第一卷里，首先列举了23个定义。为便于以后分析研究，在这里我们摘引最先的八个：

定义

1.点是没有部分的。

2.线是有长度而没有宽度的。

3.线的界限是点。

4.直线是这样的线，它上面的点是一样放置着的。

5.面是只有长度和宽度的。

6.面的界限是线。

7.平面是这样的面，它上面的直线是一样放置着的。

8.平面上的角是平面上的两条相交直线相互的倾斜度。

在定义以后，欧几里得引进了公设和公理：

公设

1. 从任一点到另一点可以引直线。

2. 每条直线都可以无限延长。

3. 以任意点作中心可以用任意半径作圆周。

4. 所有的直角都相等。

5. 平面上两直线被第三直线所截，若截线一侧的两内角之和小于二直角，则两直线必相交于截线的这一侧。

公理

1. 等于同一量的量彼此相等。

2. 等量加等量得到等量。

3. 等量减等量得到等量。

4. 不等量加等量得到不等量。

5. 等量的两倍相等。

6. 等量的一半相等。

7. 能合同的量相等。

8. 全体大于部分。

在公理后面，欧几里得按逻辑关系叙述了几何定理，把它们按一定的顺序，排成使得每个定理可以根据前面的命题、公设和定理来证明。他整理几何所用的方法是正确的，编著的《原本》是伟大的，但由于历史的局限性，欧几里得不可能把作为几何根基的基础整理得完美无缺。因此在《原本》的逻辑系统中显示出许多漏洞来。

首先在概念方面，欧几里得要给他的书里所遇到的所有概念来下定义，实际上这是不可能的。例如“点”、“线”、“面”就是不能下定义的原始概念。所以，在欧几里得的《原

本》里，除了一些有价值的定义外，也有一些定义并没有起定义的作用。例如定义4，直线是关于它上面的点都一样放置着的线，这句话可随便解释。可以解释为直线在它的所有点处都有同一的方向，但是这样以来，就必须建立“方向”这个概念；也可以解释为，任何直线都可以合同，但是这样以来就必须建立“合同”（或“叠合”、“运动”）这个概念。其它如定义1，“点是没有部分的”，这个定义本身并没有什么精确的几何内容，所以在《原本》中连欧几里得本人都不能应用这样的定义。

关于《原本》中列举的公设和公理，若严格按逻辑要求来证明以后的所有定理，这些公设与公理是不够的。例如，虽然欧几里得用到了连续性，但在他的公理系统中却没有连续公理。《原本》中第一卷第一个命题是这样的：在一定直线（应为线段）上作一等边三角形。

设AB是已知的一定直线。要作立在定直线AB上的等边三角形。

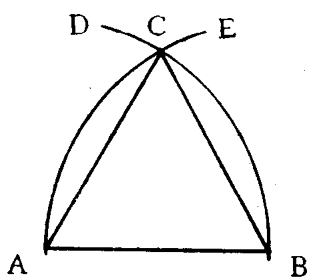

图 1—1

以A为中心，AB为距离画一圆，且以B为中心，BA为距离又画一圆。连结这两圆的交点C与两点A和B（图1—1），由于点A是圆BCD的中心，$AC=AB$；由于点B是圆ACE的中心，$BC=BA$，所以$CA=BC=AB$。因此，三角形ABC是等边