高

代數學引論

Н. Г. ЧЕБОТАРЁВ 著

黄緣芳 譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

代數學引論

H. Г. 捷玻大列夫著
黃緣芳譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的捷玻大列夫（Н. Г. Чеботарёв）著“代數學引論”（Введение в теорию алгебр）1949 年版譯出。

本書可作爲高等學校數學系學生的參考書。

本書由黃綠芳譯，復旦大學代數學教學小組校閱。

代　數　學　引　論

書號148（課142）

捷玻大列夫著

黃綠芳譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

新華書店總經售

京華印書局印刷

北京南新華街甲三七號

開本850×1092—1/28　印張 3 2/7　字數 70,000

一九五四年十一月北京第一版　印數 1—5,000

一九五四年十一月北京第一次印刷　定價￥ 5,000

編者的話

這本小册是按照 1947 年溘逝的尼古拉·格尼哥列維荚·捷玻大列夫●(Николай Григорьевич Чеботарев)的遺稿刊出的。

這稿很可能是 Н. Г. 捷玻大列夫預定做他的名著《葛羅華理論》(Теория Галуа)第三卷裏的一章的。由於這稿所包含問題的範圍很完整，即使從那部著作的總的計劃裏獨立出來也是有價値的；而且著者在敍述方法上採取温和的要求，極能吸引具有初步修養的讀者，祇要具有大學一年級教學大綱裏所規定的一些域論知識，幾乎就能閱讀整個小册子，只有最後數節才需要葛羅華理論綱要的知識。我們希望，小册子的這個特點會有力地幫助非專攻代數的廣大數學界人士來認識最近幾十年內所建立的超複數體系的高深理論。

原稿有 p 進域上質代數的理論，但是如果要保留它，就得在原稿的開端作根本上修改，所以只好割愛，實是憾事。

阿·烏茲科夫

● Н. Г. 捷玻大列夫生於 1894 年，死於 1947 年。他在代數學上有許多偉大的貢獻，讀者可參看庫洛什(А. Г. Курош)著《高等代數教程》(柯召譯)裏結語一段文字。

——譯者註

目　錄

代數學引論

§ 1. 環的定義

如果某些對象(元素)遵守下面各公理，它們的集合就叫做環：

I. 這集合對於某種演算成爲阿伯爾羣，這種演算叫做（並且標誌以)加法演算。

II. 這集合對於另一種演算成爲半羣(這是一種元素體系，對於所定義的演算適用締合律,但不一定含有么元與每個元素的逆元)，這種演算叫做(並且標誌以)乘法演算。

III. 適用右及左分配律：

$$(a+b)c=ac+bc,$$

$$c(a+b)=ca+cb.$$

如果環還符合下面的補充要求，就叫做域：

1) 把零（就是加羣裏的么元）除外，其餘所有元素對於乘法成爲羣。

2) 這羣是阿伯爾羣。

如果環只符合第一個要求，就叫做體。

此後所討論的域假定它的特徵是零,就是說,假定任意個么元的和不能等於零。

§ 2. 代數的定義

假定 a 是環 A 的任意元素,這環裏同時也就含有元素

$$a+a=2a=a2,$$

$$a+a+a=3a=a3,$$

等等，它的一般形狀是 $na=an$, 這裏 n 是有理整數。現在來個補充的假設：

如果環 A 含有元素 a, 同時它一定也包含所有的元素 $\alpha\cdot a=a\cdot\alpha$, 這裏 α 是某一域 Ω 的任意元素。適合這個假設的環叫做域 Ω 上代數。域 Ω 的元素與代數 A 的元素(對於乘法)總認爲可易的。

假定代數 A 含有元素 a_1 及一切元素 α_1a_1, 這裏 α_1 周歷域 Ω 的元素。如果 α_1a_1 不能把代數 A 的元素表達完全，在 A 裏必可找到不是 α_1a_1 型的元素 a_2, 因此 A 裏面就含有如

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2 \tag{2.1}$$

型的元素，這裏 α_1,α_2 周歷域 Ω 的元素。代數 A 裏不同的元素必定與不同的 α_1,α_2 成對應。這因爲，如果 $\alpha_1\neq\beta_1$, $\alpha_2\neq\beta_2$, 而

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2=\beta_1a_1+\beta_2a_2,$$

就會得出

$$a_2=\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2-\alpha_2}a_1,$$

這就與 a_2 不是 α_1a_1 型的假設相矛盾。

如果元素(2.1)不能把代數 A 的元素表達完全，在 A 裏又可找到不是(2.1)型的元素 a_3, 因此 A 裏面就含有如

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3$$

型的元素，這裏 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 周歷域 Ω 的元素，而且代數 A 裏不同的元素必定與不同的 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 成對應。這樣論證下去，我們或是能够用有限個元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 把代數 A 的所有元素完全表達出來，或是不論找到多少像 a_i 型的元素，總不能把 A 的元素表達完全。在第一種情形下，代數 A 叫做有限階代數，並且在所有元素

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n \tag{2.2}$$

能够把代數 A 的元素表達完全，同時元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 又是彼此無關的

(就是說，不允許有形狀像

$$\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_n a_n=0$$

的關係存在)的時候，這種元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的個數 n 叫做 A 的階，而這種元素的集合

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

叫做代數的基。對於每個代數顯然可找出無數個不同的基，但構成每個基的元素個數 n (就是代數的階)却是一定不變的。這因爲如果假定 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 與 $[b_1, b_2, \cdots, b_m]$ 都是同一個代數 A 的基，而且 $m>n$。假定元素 b_i 通過第一個基來表達：

$$
\begin{aligned}
b_1&=\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2+\cdots+\alpha_{1n}a_n,\\
b_2&=\alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2+\cdots+\alpha_{2n}a_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_m&=\alpha_{m1}a_1+\alpha_{m2}a_2+\cdots+\alpha_{mn}a_n.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

因爲陣

$$
\begin{Vmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}
\end{Vmatrix}
$$

的秩不能超過 n，就必然比 m 小，所以在域 Ω 內可找到不是零的元素 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 使

$$A_1\alpha_{1i}+A_2\alpha_{2i}+\cdots+A_m\alpha_{mi}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

以 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 順序乘(2.3)的各等式，再相加起來，得

$$A_1b_1+A_2b_2+\cdots+A_mb_m=0,$$

這與第二個基的各元素的無關性相矛盾。

由一種基轉變到另一種基可藉線性代換（2.3）而達到，這時候 $m=n$，並且代換的行列式不等於零；反過來說，任何這樣的代換都給出一種新的基。所以知道了代數 A 的一個基，就不難得出它的所有可能

的基。

如果代數 A 含有無數個無關元素，就叫做無限階代數。這本教程裏不想研究它，所以此後如有提到代數而沒有特別的聲明，都是指有限階代數。

有限階代數應該與由有限個元素組成的有限代數相區別。作爲一個有限代數，必須域 Ω 是有限的。如果域是有限，而代數也只有有限的基，這代數就必定是有限代數。

§ 3. 代數的結構

如果代數 A 有已知的基

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

要充分認識它的性質，我們應該有本事把算術上爲首三種演算應用到已知各元素的結果而得出的所有元素都能够用

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \tag{3.1}$$

的形狀表達出來。這只要懂得一切積 $a_i a_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 的表達式就能做到的。假設

$$a_i a_j = \gamma^1_{ij} a_1 + \gamma^2_{ij} a_2 + \cdots + \gamma^n_{ij} a_n \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n), \tag{3.2}$$

或是

$$a_i a_j = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma^\nu_{ij} a_\nu \qquad (i, j = 1, 2, \cdots n), \tag{3.2'}$$

量 γ^ν_{ij} 是域 Ω 的元素，叫做代數的結構常數。

如果已知 n^3 個常數 γ^ν_{ij} $(i, j, \nu = 1, 2, \cdots, n)$，它們要適合什麼條件，才能構成代數結構常數體系呢？不難相信，這樣常數的所有體系除了代數的元素對於乘法必須成爲半羣(就是說，對於乘法適用締合律)這一公理外，對其餘的全部代數公理都能適合。因爲代數 A 的任意元素 a, b, c 必須遵守

$$(ab)c=a(bc),$$

所以可以用基來表達 a, b, c 如

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i a_i,\quad b=\sum_{j=1}^{n}\beta^j a_j,\quad c=\sum_{k=1}^{n}\gamma^k a_k.$$

我們的等式就變做

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\alpha^i\beta^j\gamma^k(a_ia_j)a_k=\sum_{i,j,k=1}^{n}\alpha^i\beta^j\gamma^k a_i(a_ja_k).$$

要使它對於一切可能的 $\alpha^i, \beta^j, \gamma^k$ 都成立,必須而且充分的條件是

$$(a_ia_j)a_k=a_i(a_ja_k).$$

由(3.2′),先是得到

$$\sum_{\nu=1}^{n}\gamma^{\nu}_{ij}a_{\nu}a_k=\sum_{\nu=1}^{n}a_i\gamma^{\nu}_{jk}a_{\nu},$$

進一步得出

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\gamma^{\nu}_{ij}\gamma^{\mu}_{\nu k}a_{\mu}=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\gamma^{\nu}_{jk}\gamma^{\mu}_{i\nu}a_{\mu}.$$

由於基元素的無關性，這關係就給出

$$\text{(3.3)}\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\gamma^{\nu}_{ij}\gamma^{\mu}_{\nu k}=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma^{\nu}_{jk}\gamma^{\mu}_{i\nu}\qquad (i, j, k, \mu=1, 2, \cdots, n).$$

這些等式便是常數 γ^{ν}_{ij} 組成代數的結構常數體系的必須而且充分的條件。

如果基受了線性變換,這些常數會有怎樣的改變呢? 假設 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 與 $[b_1, b_2, \cdots, b_n]$ 都是代數 A 的基,由線性關係

$$\text{(3.4)}\qquad b_i=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^{\nu}_{i}a_{\nu}\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

聯繫着，它的行列式 $|\lambda_i^\nu|\neq 0$。對於 a_i 解這方程組，得

$$(3.5)\qquad a_i=\sum_{\nu=1}^{n}\mu_i^\nu b_\nu\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

這裏 λ_i^ν 與 μ_i^ν 中間有

$$(3.6)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\lambda_i^\nu\mu_\nu^j=\delta_i^j,\quad \sum_{\nu=1}^{n}\mu_i^\nu\lambda_\nu^j=\delta_i^j$$

的關係，而 $\delta_i^i=1$，在 $i\neq j$ 時候 $\delta_i^j=0$。代入(3.2′)，得

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\mu_i^\alpha\mu_j^\beta b_\alpha b_\beta=\sum_{s,\gamma=1}^{n}\gamma_{ij}^{s}\mu_s^\gamma b_\gamma.$$

要由這方程組解出 b_α, b_β，可以 $\lambda_r^i\lambda_t^j$ 乘它們，並且對於 i 與 j 求和，由(3.6)得

$$b_r b_t=\sum_{i,j,\gamma,s=1}^{n}\lambda_r^i\lambda_t^j\mu_s^\gamma\gamma_{ij}^{s}b_\gamma.$$

如果用 $\overline{\gamma}_{rt}^{\gamma}$ 標誌對於新基 $[b_1, b_2, \cdots, b_n]$ 的結構常數，它們就可通過 γ_{ij}^{ν} 表出如

$$(3.7)\qquad \overline{\gamma}_{rt}^{\gamma}=\sum_{i,j,s=1}^{n}\gamma_{ij}^{s}\lambda_r^i\lambda_t^j\mu_s^\gamma.$$

這些等式指出代數的結構常數體系構成張量，不能隨意給的，而是要適合關係(3.3)。所以代數性質的研究與某些三秩張量性質的研究平行。

有些代數裏存在着元素 e，它對於 A 的一切元素 x 有

$$xe=ex=x$$

的關係，這元素 e 叫做代數 A 的主么元。

§ 4. 代數的例子

1. 四維代數 這是歷史上第一個代數的例子。在距今百年前由

漢密頓提出的。元素形狀如

$$\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k \tag{4.1}$$

的叫做四維數，這裏 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 屬於實數的某些域 Ω，而 $1, i, j, k$ 是無關的元素體系組成代數的基(1 是主么元)，並且適合方程

$$x^2+1=0 \qquad (x=i, j, k). \tag{4.2}$$

i, j, k 的乘法表是

$$\begin{aligned} ij&=k, & jk&=i, & ki&=j, \\ ji&=-k, & kj&=-i, & ik&=-j. \end{aligned} \tag{4.3}$$

由這個表顯見四維數的乘法不是可易的。

要證實數域 Ω 上的四維代數是體，就是要證對於每個四維數($\neq 0$)有逆元存在，它與原來四維數的積等於主么元 1，可介紹四維數的一個觀念，就是把

$$\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k$$

叫做與四維數(4.1)成共軛。不難證得，成共軛的四維數的積等於 α^2+ $+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$:

$$(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)(\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2. \tag{4.4}$$

因為 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 在實數域 Ω 上，所以只有 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$，它才會等於零。由此可見每個四維數(4.1)的逆元是

$$\frac{\alpha-\beta i-\gamma j-\delta k}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

II．**零代數**　這種代數的基元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中間存在

$$a_i a_j=0 \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{4.5}$$

的關係(因此代數裏元素的積總等於零)。

III．**格拉斯曼代數**　如果有 n 個元素 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 適合

$$e_i e_j=-e_j e_i,\ e_i^2=0 \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{4.6}$$

的關係，由此作出任意 $k\leqslant n$ 個不同的 e_i 的積（由(4.6)可知，如果積裏面某個元素出現了兩次，這積就要等於零）可得

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1=2^n$$

項，這個代數的基就是由這些項的集合組成。必須指出，元素 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的任何兩個線性組合

$$a=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n,\ b=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\cdots+\beta_n e_n$$

也適合條件(4.6)的：

$$ab=-ba,\ a^2=0.$$

藉助於格拉斯曼代數很容易把行列式的理論建立起來。假定已知 n 個線性形式

(4.7) $$a_i=\alpha_{1i}e_1+\alpha_{2i}e_2+\cdots+\alpha_{ni}e_n \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

它們的積在去掉括號後含有或是等於零的項，或是帶有 $e_1 e_2\cdots e_n$ 的項。因此可以正確地寫做

(4.8) $$a_1 a_2\cdots a_n=\Delta e_1 e_2\cdots e_n.$$

係數 Δ 是依靠各線性形式的係數的，叫做這線性形式體系的行列式，詳細地寫做

(4.9) $$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

由這個定義可推出行列式的各基本性質，其中較困難的是證明行列式的行與列對調的不變性。要做證明，引入第二個元素體系 $f_1, f_2, \cdots, f_n$，並假定它們的每個元素與元素 e_i 對於乘法總是可易的，此外還適合像(4.6)一樣的關係：

$$f_i f_j=-f_j f_i,\ f_i^2=0 \qquad (i, j=1,2,\cdots,n).$$

再在(4.7)外引入記號

(4.10) $$b_i=\alpha_{i1}f_1+\alpha_{i2}f_2+\cdots+\alpha_{in}f_n \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

用 f_i 乘(4.7)，並對於 i 求和，由(4.10)得

$$b_1 e_1+b_2 e_2+\cdots+b_n e_n=a_1 f_1+a_2 f_2+\cdots+a_n f_n.$$

積 b_ie_i 自身顯然是可易的，積 a_if_i 也是一樣。因此由這等式的 n 次方可得

$$(4.11)\qquad n!b_1b_2\cdots b_ne_1e_2\cdots e_n=n!a_1a_2\cdots a_nf_1f_2\cdots f_n,$$

引入與(4.8)相似的記號

$$(4.12)\qquad b_1b_2\cdots b_n=\Delta_1f_1f_2\cdots f_n,$$

這裏

$$(4.13)\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}.$$

並且把(4.8)與(4.12)代入(4.11)，經過化簡後得到

$$\Delta_1=\Delta,$$

這就是求證的結果。

行列式上用他列加於某一列其值不變的性質可由顯明的等式

$$a_1\cdots a_i\cdots a_j\cdots a_n=a_1\cdots(a_i+\lambda a_j)\cdots a_j\cdots a_n$$

推出。

列的互調會使行列式改號的事實可由等式（4.8）的左邊因式的互調會使它的積改號的事實推出。

要得出拉普拉斯等式，只要把積 $a_1a_2\cdots a_n$ 分做兩個因式，而在每個因式裏去掉括號。於是 e_i 的每個積的係數都是子式。求這兩個因式的積，就得出用子式的積的和來表示的行列式的表達式。

要得到行列式乘法的定理，引入記號

$$a_i=\alpha_{1i}e_1+\alpha_{2i}e_2+\cdots+\alpha_{ni}e_n,$$

$$c_i=\beta_{1i}a_1+\beta_{2i}a_2+\cdots+\beta_{ni}a_n.$$

這裏元素 a_i 適用與 e_i 同樣的規律。所以

$$c_1c_2\cdots c_n=|\beta_{ij}|\cdot a_1a_2\cdots a_n,$$

由此得出

$$c_1c_2\cdots c_n=|\beta_{ij}|\cdot|\alpha_{ij}|\cdot e_1e_2\cdots e_n.$$

但另一方面就有

$$c_i=\sum_j\beta_{ji}\sum_\nu\alpha_{\nu j}e_\nu=\sum_\nu\gamma_{\nu i}e_\nu,$$

這裏

$$\gamma_{\nu i}=\sum_j\alpha_{\nu j}\beta_{ji},$$

由此得出

$$c_1c_2\cdots c_n=|\gamma_{ij}|\cdot e_1e_2\cdots e_n,$$

就是說，

$$|\gamma_{ij}|=|\alpha_{ij}|\cdot|\beta_{ij}|,$$

這就是求證的結果。

要得出克拉默爾公式，用 e_i 乘方程組裏的方程

$$\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\cdots+\alpha_{in}x_n=\beta_i,$$

而對於 i 求和，得

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b, \tag{4.14}$$

這裏

$$b=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n.$$

要得出 x_i 的表達式，可用 $a_1a_2\cdots a_{i-1}$ 左邊乘而同時用 $a_{i+1}\cdots a_n$ 右邊乘 (4.14)，這樣就使 (4.14) 的左端除了第 i 項外其餘各項都等於零，而得出

$$a_1\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}\cdots a_nx_i=a_1\cdots a_{i-1}ba_{i+1}\cdots a_n.$$

由此不難推出克拉默爾公式了。

IV. 全陣代數　假定用 e_{ij} 表示第 i 列第 j 行上的元素是 1 而其餘元素都是零的 n 階方陣，不難得出下列關係：

$$e_{ij}e_{jk}=e_{ik},\quad e_{ij}e_{lk}\neq0\quad(j\neq l). \tag{4.15}$$

如果使用以(4.15)做乘法表的 n^2 個元素

$$e_{ij} \qquad (i,\ j=1, 2, \cdots, n)$$

作爲一個代數的基，不難指出締合律是成立的，這個代數叫做全陣代數。任意 n 維方陣 $\|\alpha_{ik}\|$ 都可以表達如

$$\|\alpha_{ik}\| = \sum_{i,k} \alpha_{ik} e_{ik}.$$

不難相信，這種代數裏元素的演算與陣的普通演算是一致的。這代數的主么元是

$$e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn}.$$

V．羣化環　假定 $s_1, s_2, \cdots, s_n$, 是某一有限羣$\mathfrak{G}$的元素。取任意域 Ω, 而着手考究形狀如

$$\xi_1 s_1 + \xi_2 s_2 + \cdots + \xi_n s_n$$

的表達式，這裏 ξ_i 周歷域 Ω 裏各元素。對於這樣元素的演算允許域 Ω 的元素與 s_i 可易，並且採用有限羣的結構律

$$s_i s_j = s_k$$

做乘法表，如此的 n 階代數叫做羣化環。羣的么元就是這環的主么元。

習　題

1）域 Ω（不一定是實數）上四維數體系要成爲斜域，必須而且充分地是：不定方程

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0$$

除了 $x=y=u=v=0$ 外，在域 Ω 裏不能有解。

2）一切含有主么元的 2 階代數必定是可易的。

3）求證：由陣

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Vmatrix}$$

組成的線性體系是一個代數。作~~方~~出它們的乘法表，並且證明這代數與四維代數成同構。

§ 5. 子代數

如果代數 A 的元素的一部分 B 自身也成代數，B 就叫做代數 A 的子代數，而用記號

$$B\subset A$$

表示這事實。如果子代數B不與整個代數A相同，它的階就比代數A的階小。按照基元素的求法(參看§2)，可選取代數A的基使它的一部分組成子代數B的基。要這樣做，首先必須選定代數B的基$[b_1, b_2, \cdots, b_m]$，然後把代數A裏不能用這個基表達的無關元素補充進去。

假定$[b_1, b_2, \cdots, b_m; a_{m+1}, \cdots, a_n]$是代數$A$的基，排在前面的$m$個元素組成子代數$B$的基。現在用分析(就是通過結構常數)來說明這事實。由於$[b_1, b_2, \cdots, b_m]$能够構成代數，所以積b_ib_j用基來表達的時候，只須單獨地用b_i表出，就是說，在表達式

$$b_ib_j=\gamma_{ij}^1b_1+\cdots+\gamma_{ij}^mb_m+\gamma_{ij}^{m+1}a_{m+1}+\cdots+\gamma_{ij}^na_n$$

裏常數

$$\gamma_{ij}^{m+1}, \gamma_{ij}^{m+2}, \cdots, \gamma_{ij}^n \qquad (i, j=1, 2, \cdots, m)$$

該等於零。

假定有已知的基$[c_1, c_2, \cdots, c_k]$，那末元素

$$\xi_1c_1+\xi_2c_2+\cdots+\xi_kc_k$$

的集合叫做線性體系，這裏$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$周歷域$\Omega$裏各元素。現在把這個概念引入代數$A$裏面，特別是在積$c_ic_j$能够用$c_i$的線性形式表出的情形，這線性體系就成爲子代數。

假定$[b_1, b_2, \cdots, b_m]$與$[c_1, c_2, \cdots, c_k]$是線性體系B與C的基，那末用

$$[\cdots, b_ic_j, \cdots] \qquad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, k)$$

做基的線性體系叫做B與C的積，用記號$B\cdot C$來表示。換句話說，這是元素bc的集合，這裏b周歷B的所有元素，而c周歷C的所有元素。

線性體系B成爲子代數的條件就可用記號寫做

$$B\cdot B\subset B, \text{ 或 } B^2\subset B. \tag{5.1}$$

如果用A的元素從右(左)邊乘子代數B的元素所得的積仍舊是B的元素，就是說，