

力学丛书

非线性随机动力学与控制

—Hamilton理论体系框架

朱位秋 著



科学出版社

内 容 简 介

本书在较详细地介绍 Hamilton 系统与扩散过程基础上,系统而深入地论述了随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论,包括 Gauss 白噪声激励下耗散的 Hamilton 系统的精确平稳解与等效非线性系统法、拟 Hamilton 系统随机平均法、拟 Hamilton 系统的随机稳定性、随机分岔、首次穿越以及分别以振动最小、稳定度或可靠度最大为目标的非线性随机最优控制。

本书可供力学、机械、土木、海洋及航空航天工程等方面的科学技术人员以及有关专业的高年级大学生、研究生、教师阅读。

图书在版编目(CIP)数据

非线性随机动力学与控制:Hamilton 理论体系框架/朱位秋著. —北京:科学出版社,2003.2

(力学丛书)

ISBN 7-03-011184-2

I. 非… II. 朱… III. 哈密顿系统-动力系统(力学)

IV. O175.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009555 号

责任编辑:李成香 郝德平 / 责任校对:钟 洋

责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 2 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

2003 年 2 月第一次印刷 印张: 15 7/8

印数: 1—2 000 字数: 415 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《力学丛书》编委会

主 编:张 维

副主编:钱令希 林同骥 郑哲敏

编 委:(按姓氏笔画为序)

丁 懋	卞荫贵	庄逢甘	朱兆祥	朱照宣
刘延柱	孙训方	李 灏	张涵信	周光炯
季文美	苟清泉	胡海昌	柳春图	贾有权
钱伟长	徐芝纶	徐华舫	郭尚平	谈镐生
黄文熙	黄克累	黄克智	程贯一	

序

随机动力学之源始,可追溯至 20 世纪初物理学者对布朗运动之研究,至今已有百年之历史。其后因各种工程应用之需要,范围逐渐扩大,包括通信、航天、航海、土木、机械等领域。近年来精益求精,注意力尤集中于难度较深之非线性系统、系统稳定性及系统控制之发展。朱位秋教授以深厚之数学根底,对此三方面均有显著贡献,在随机动力学领域内,成为国际著名专家之一。其新著《非线性随机动力学与控制》一书,集十余年对此三方面研究之精华于一册,实属学术上重要贡献。书中理论上发展,以统一之哈密尔顿框架为基础,乃朱位秋教授之首创,尤属独特可贵。此书之广受欢迎,可预为朱教授贺。

Y. K. Lin

于美国佛罗里达大西洋大学应用随机研究中心

前 言

非线性随机动力学系统广泛存在于自然科学、工程科学及社会科学之中。例如,强震、强风、强浪等严重随机载荷可使高层建筑、大型桥梁、海洋平台等工程结构产生强烈的非线性随机振动、失稳甚至破坏,因而需要加以控制。又如,在物理、化学、生物学中,噪声对非线性动力学系统可产生多种重要效应。近 20 年中,物理学界对随机共振进行了大量的研究,近 10 年来,化学与生物学的科学家逐渐体会到,噪声在非线性动力学系统中可起积极的作用。因此,愈来愈多的学者从事非线性随机动力学与控制的研究。

上世纪初,Einstein 等人对布朗运动的研究标志着随机动力学研究的开端。对非线性随机动力学的研究则始于上世纪 60 年代初。至上世纪 90 年代初,对非线性随机振动的研究基本上局限于拟线性系统与单自由强非线性系统。对随机稳定性的研究基本上局限于单自由度线性随机系统。首次穿越问题的研究局限于单自由度随机系统。随机分岔研究始于上世纪 80 年代初,至今也基本上局限于一、二维随机系统。对随机最优控制的研究始于上世纪 60 年代初,至今基本上局限于线性随机系统的线性二次 Gauss (LQG)控制。然而,实际的非线性随机动力学系统往往是多自由度、强非线性的。因此,迫切需要发展多自由度强非线性系统随机动力学与控制理论。但是,这是一项十分困难的任务。

近 10 年来,作者将非线性随机动力学与控制的研究从 Lagrange 体系转到 Hamilton 体系,将非线性随机动力学系统表示成随机激励的耗散的 Hamilton 系统,根据相应 Hamilton 系统的可积性与共振性,将系统分成不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五类,提出与发展了随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论,包括 Gauss 白噪声激励下耗散的 Hamilton 系统的精确平稳解与等效非线性系统法、拟 Hamilton 系统随机平均法、拟 Hamilton 系统随机稳定性、随机分岔、首次穿越以及分别以

振动最小、稳定度或可靠度最大为目标的非线性随机最优控制理论方法,构成了一个崭新的非线性随机动力学与控制的 Hamilton 理论体系的框架,特别为解决多自由度强非线性系统随机动力学与控制问题提供了一整套理论方法,得到了非线性随机动力学系统四类能量非等分精确平稳解,打破了自 1933 年以来一直只有能量等分解的局面。该项研究成果获得了 2001 年中国高校科学技术(自然科学)奖一等奖,2002 年国家自然科学奖二等奖。

本书是上述研究成果的一个系统总结。为便于读者理解,前两章较详细地介绍了 Hamilton 系统与扩散过程,6.1 节中介绍了随机稳定性与随机分岔的基本概念与基本方法,8.1 节中介绍了随机最优控制的基本概念与基本方法,各种理论方法的论述皆配以若干应用例子。上述理论尚待完善与发展,理论的应用更需进一步研究。作者希望本书能起到抛砖引玉的作用,期待更多的学者从事这方面的研究,共同继续发展该理论及其应用。

在本书即将出版之际,作者首先要感谢美国工程院院士、美国佛罗里达大西洋大学应用随机学研究中心主任、工程中 Schmidt Chair Y. K. Lin 教授与美国纽约州立大学布法罗分校 Samuel P. Capen 教授 T. T. Soong 的鼓励与支持,作者对随机激励的耗散的 Hamilton 系统的研究是从访问他们期间开始的, Lin 教授还特为本书作了序。感谢国家自然科学基金(19372054, 19672054, 19972059)与高等学校博士学科点专项科研基金(9433528, 20020335092)对此项研究工作的持续资助。感谢黄志龙教授、应祖光副教授、雷鹰博士、杨勇勤与邓茂林等,他们与作者一起发展了上述理论。感谢吴勇军与刘中华,他们协助作者整理手稿与绘制插图。感谢妻子朱巧芝的理解与全力支持。感谢中国科学院科学出版基金与国家自然科学基金优秀研究成果专著出版基金的联合资助。感谢科学出版社在本书出版过程中的全力支持与帮助。

衷心欢迎读者对本书提出宝贵意见与批评指正。

作 者

2003 年 1 月于浙江大学

目 录

序

前言

第一章 Hamilton 系统	(1)
1.1 Hamilton 方程	(1)
1.1.1 从 Lagrange 方程到 Hamilton 方程	(1)
1.1.2 陀螺与非陀螺 Hamilton 系统	(3)
1.2 Poisson 括号	(12)
1.3 Hamilton 相流	(14)
1.4 正则变换	(17)
1.5 Hamilton-Jacobi 方程	(20)
1.6 可积 Hamilton 系统	(25)
1.6.1 Liouville 定理	(25)
1.6.2 作用-角变量	(26)
1.6.3 环面上相流	(31)
1.6.4 Hamilton 系统的积分方法	(34)
1.6.5 可积 Hamilton 系统之例	(39)
1.6.6 Hamilton 系统在平衡位置邻域的可积性	(42)
1.7 不可积 Hamilton 系统	(44)
1.8 部分可积 Hamilton 系统	(50)
1.9 Hamilton 系统的遍历性	(51)
参考文献	(53)
第二章 扩散过程	(55)
2.1 扩散过程及其概率描述	(55)
2.1.1 Markov 过程	(55)
2.1.2 扩散过程与 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程	(57)
2.1.3 后向 Kolmogorov 方程	(63)
2.2 Wiener 过程	(67)

2.2.1 独立增量过程	(67)
2.2.2 Wiener 过程	(69)
2.3 广义随机过程与 Gauss 白噪声	(75)
2.4 Itô 随机微分方程	(77)
2.4.1 Itô 随机积分	(77)
2.4.2 Itô 随机微分与 Itô 微分公式	(83)
2.4.3 Itô 随机微分方程	(86)
2.5 Itô 随机微分方程之解	(89)
2.5.1 强解与弱解	(89)
2.5.2 稳态解	(90)
2.5.3 精确解析解	(92)
2.5.4 数值解	(98)
2.6 Itô 随机微分方程与 Kolmogorov 方程	(102)
2.7 Stratonovich 随机微分方程	(105)
2.8 一维扩散过程的边界	(111)
2.8.1 边界的分类	(111)
2.8.2 奇异边界	(113)
2.8.3 扩散过程的渐近性态与其边界类别之间的关系	(118)
参考文献	(118)
第三章 精确平稳解	(120)
3.1 随机激励的耗散的 Hamilton 系统	(120)
3.2 Gauss 白噪声激励下耗散的 Hamilton 系统	(122)
3.2.1 FPK 方程	(122)
3.2.2 求精确平稳解之方法	(126)
3.3 精确平稳解:Gauss 白噪声激励下耗散的不可积 Hamilton 系统	(130)
3.4 精确平稳解:Gauss 白噪声激励下耗散的可积 Hamilton 系统	(135)
3.4.1 非内共振情形	(135)
3.4.2 内共振情形	(141)
3.5 精确平稳解:Gauss 白噪声激励下耗散的部分可积 Hamilton 系统	(145)
3.5.1 非内共振情形	(145)

3.5.2 内共振情形	(147)
3.6 Gauss 白噪声激励下耗散的陀螺系统的精确平稳解	(150)
3.7 推广	(155)
3.7.1 更一般的系统	(155)
3.7.2 Gauss 白噪声与周期或概周期激励下耗散的 Hamilton 系统的稳态解	(157)
参考文献	(164)
第四章 等效非线性系统法	(166)
4.1 引言	(166)
4.2 Gauss 白噪声激励下耗散的不可积 Hamilton 系统	(169)
4.3 Gauss 白噪声激励下耗散的可积 Hamilton 系统	(175)
4.3.1 非内共振情形	(175)
4.3.2 内共振情形	(182)
4.4 Gauss 白噪声激励下耗散的部分可积 Hamilton 系统	(186)
4.4.1 非内共振情形	(187)
4.4.2 内共振情形	(195)
参考文献	(201)
第五章 随机平均法	(203)
5.1 随机平均原理	(203)
5.2 拟不可积 Hamilton 系统的随机平均	(206)
5.3 拟可积 Hamilton 系统随机平均	(214)
5.3.1 非内共振情形	(215)
5.3.2 内共振情形	(221)
5.4 拟部分可积 Hamilton 系统的随机平均	(227)
5.4.1 非内共振情形	(228)
5.4.2 内共振情形	(232)
5.5 平稳宽带随机激励下拟可积 Hamilton 系统的随机平均	(238)
5.5.1 单自由度系统	(240)
5.5.2 多自由度系统	(252)
5.6 谐和与白噪声激励下单自由度强非线性系统的随机平均	(261)
5.7 有界噪声激励下单自由度强非线性系统的随机平均	(267)

5.7.1 有界噪声	(267)
5.7.2 随机平均方程	(268)
参考文献	(270)
第六章 随机稳定性与随机分岔	(273)
6.1 随机稳定性与随机分岔概述	(273)
6.1.1 随机稳定性	(273)
6.1.2 随机分岔	(280)
6.2 拟不可积 Hamilton 系统的渐近稳定性	(286)
6.2.1 用平均 Itô 方程的 Lyapunov 指数判定概率为 1 渐近稳定性	(286)
6.2.2 用平均扩散过程的边界类别判定概率渐近稳定性	(295)
6.3 拟可积 Hamilton 系统概率为 1 渐近稳定性	(302)
6.3.1 拟可积 Hamilton 系统的最大 Lyapunov 指数	(302)
6.3.2 线性随机非陀螺系统的稳定性	(305)
6.3.3 线性随机陀螺系统的稳定性	(308)
6.3.4 非线性随机系统的稳定性	(313)
6.4 拟部分可积 Hamilton 系统概率为 1 渐近稳定性	(315)
6.5 求概率为 1 渐近稳定域的一种新方法	(318)
6.6 拟不可积 Hamilton 系统的随机 Hopf 分岔	(322)
6.7 Duffing 振子的随机跳跃及其分岔	(330)
6.8 拟 Hamilton 系统的随机同(异)宿分岔与混沌	(335)
6.8.1 单自由度系统	(336)
6.8.2 两自由度系统	(339)
参考文献	(341)
第七章 首次穿越	(346)
7.1 时齐扩散过程首次穿越问题的一般提法	(346)
7.2 拟不可积 Hamilton 系统	(349)
7.3 拟可积 Hamilton 系统	(356)
7.4 拟部分可积 Hamilton 系统	(363)
7.5 谐和与白噪声激励下的单自由度强非线性系统	(367)
参考文献	(368)
第八章 非线性随机最优控制	(370)
8.1 随机最优控制概论	(370)

8.1.1	引言	(370)
8.1.2	随机最优控制问题的提法	(371)
8.1.3	随机动态规划方法	(374)
8.1.4	部分可观测系统的随机最优控制	(382)
8.2	拟不可积 Hamilton 系统的随机最优控制	(388)
8.2.1	一般方法	(388)
8.2.2	Duffing 振子的无界遍历控制	(395)
8.2.3	滞迟系统的无界遍历控制	(398)
8.2.4	弹簧摆的有界遍历控制	(403)
8.3	拟可积 Hamilton 系统的随机最优控制	(405)
8.3.1	一般方法	(405)
8.3.2	非线性阻尼耦合谐振子的无界遍历控制	(408)
8.3.3	非线性阻尼耦合的 Duffing 振子的有界遍历控制	(411)
8.4	应用 ER/MR 阻尼器的随机最优半主动控制	(412)
8.5	部分可观测线性系统的非线性随机最优控制	(418)
8.5.1	问题的提法	(419)
8.5.2	等价的完全可观测随机最优控制问题	(422)
8.5.3	随机平均	(423)
8.5.4	动态规划方程与最优控制力	(424)
8.5.5	最优控制结构的响应	(427)
8.5.6	LQG 控制	(429)
8.5.7	数例	(431)
8.6	随机稳定化	(431)
8.6.1	拟不可积 Hamilton 系统:Lyapunov 指数法	(432)
8.6.2	拟不可积 Hamilton 系统:边界类别法	(438)
8.6.3	拟可积 Hamilton 系统	(444)
8.6.4	拟部分可积 Hamilton 系统	(451)
8.7	首次穿越损坏的反馈最小化	(453)
8.7.1	拟不可积 Hamilton 系统	(454)
8.7.2	拟可积 Hamilton 系统	(463)
8.7.3	拟部分可积 Hamilton 系统	(472)
	参考文献	(475)
	索引	(478)

第一章 Hamilton 系统

本书中将非线性随机动力学系统表示成随机激励的耗散的 Hamilton 系统,其中 Hamilton 系统的性质对整个系统的解的泛函形式与性质起着关键性作用。因此,要理解本书所述理论,需对 Hamilton 系统有所了解。Hamilton 力学是古典动力学的组成部分,Hamilton 系统则是非线性科学的一个重要研究领域,Hamilton 系统理论内容十分丰富。本章只介绍与本书后续部分有关的有限自由度 Hamilton 系统的基本知识。

1.1 Hamilton 方程

1.1.1 从 Lagrange 方程到 Hamilton 方程

一个系统,若其运动可用一组 Hamilton(正则)方程描述,就称它为 Hamilton 系统。Hamilton 方程通常由 Lagrange 方程经 Legendre 变换导得。考虑一个 n 自由度理想、完整、有势的动力学系统,以 q_i 与 $\dot{q}_i$ 分别表示广义位移(坐标)与广义速度, $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 表示 Lagrange 函数, $\mathbf{q} = [q_1 q_2 \cdots q_n]^T$, 由 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0 \quad (1.1-1)$$

可导出如下 Lagrange 方程^[1]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (1.1-2)$$

该方程之解在几何上为 n 维位形空间中的轨线,通过该空间中任一点,可有无穷多条轨线,因而在理论研究中很不方便。可以将广义位移与广义速度组成状态矢量,将 Lagrange 方程化为状态方程,以克服上述不便,但更方便的做法是引入广义动量,将

Lagrange方程化为以广义位移与广义动量为基本变量的 Hamilton 方程。

广义动量定义为

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1-3)$$

(1.1-3)称为由 Lagrange 函数 L 生成的 Legendre 变换。设 L 对 $\dot{q}_i$ 的 Hesse 式不为零,即

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \neq 0 \quad (1.1-4)$$

则(1.1-3)为非奇异变换,可逆,其逆变换也是 Legendre 变换。据 Legendre 变换的逆变换定理^[2], (1.1-3)之逆变换的生成函数为

$$(p_i \dot{q}_i - L)_{\dot{q}_i \rightarrow p_i} = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (1.1-5)$$

式中重复下标表示求和,下同, $\mathbf{p} = [p_1 p_2 \dots p_n]^T$ 。而逆变换为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1-6)$$

同时,正逆变换的生成函数 L 与 H 之间有如下关系式:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1-7)$$

由(1.1-2)、(1.1-3)及(1.1-7)可得

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1-8)$$

组合(1.1-6)与(1.1-8)就得到以 q_i, p_i 为基本变量的 Hamilton 方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1-9)$$

该方程与 Lagrange 方程(1.1-2)等价。 q_i, p_i 称为正则变量,由它们组成的状态空间称为系统的相空间, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ 称为 Hamilton 函数。

将(1.1-5)代入(1.1-1),得到另一形式 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt = 0 \quad (1.1-10)$$

它与(1.1-1)等价。两者的区别在于,(1.1-1)中,仅 q_i 为独立变量,它们在积分上、下限为固定值,积分为 n 维位形空间中的作用泛函,而(1.1-10)中, q_i 与 p_i 同为独立变量,它们在积分上、下限上之值固定,积分为 $2n$ 维相空间中的作用泛函。Hamilton 方程(1.1-9)亦可从修正的 Hamilton 原理(1.1-10)导得。

以 $z = [q^T p^T]^T$ 记 $2n$ 维正则(状态)矢量,将 Hamilton 函数改写成 $H(z, t)$,再以 $D = [\partial/\partial z_1 \partial/\partial z_2 \cdots \partial/\partial z_{2n}]^T$ 记梯度算子矢量,则 Hamilton 方程(1.1-9)可改写成

$$\dot{z} = JDH(z, t) \quad (1.1-11)$$

式中

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1-12)$$

为单位辛矩阵, I_n 为 $n \times n$ 单位阵。辛矩阵 J 具有下列性质:

$$J^T = J^{-1} = -J, |J| = 1 \quad (1.1-13)$$

Hamilton 方程(1.1-9)与(1.1-11)的耦对性决定了 Hamilton 系统在相空间中具有辛结构。

1.1.2 陀螺与非陀螺 Hamilton 系统

Lagrange 函数为动能 T 与势能 U 之差

$$L = T - U \quad (1.1-14)$$

一般情形下,动能为广义速度的二次式

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad (1.1-15)$$

式中

$$T_2 = m_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j / 2, T_1 = b_i^{ke}(q, t) \dot{q}_i, T_0 = T_0(q, t) \quad (1.1-16)$$

m_{ij} 构成 $n \times n$ 正定、对称质量矩阵 M 。势能

$$U = U_0 + U_1 \quad (1.1-17)$$

式中

$$U_0 = U_0(q, t), U_1 = b_i^{kp}(q, t) \dot{q}_i \quad (1.1-18)$$

分别为普通势与广义势。因此,一般 Lagrange 函数形为

$$L = L_2 + L_1 + L_0 \quad (1.1-19)$$

式中

$$\begin{aligned} L_2 &= T_2 = m_{ij}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i \dot{q}_j / 2 \\ L_1 &= T_1 - U_1 = [b_i^{ke}(\mathbf{q}, t) - b_i^{sp}(\mathbf{q}, t)] \dot{q}_i \\ &= b_i(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i \\ L_0 &= T_0 - U_0 = c(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (1.1-20)$$

将(1.1-19)代入(1.1-2),得 n 自由度理想、完整、有势动力学系统的 Lagrange 方程

$$\begin{aligned} m_{ki} \ddot{q}_i + [ij, k] \dot{q}_i \dot{q}_j + g_{ki} \dot{q}_i + \frac{\partial m_{ki}}{\partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial b_k}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial q_k} &= 0 \\ i, j, k &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.1-21)$$

式中

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right), g_{ki} = \frac{\partial b_k}{\partial q_i} - \frac{\partial b_i}{\partial q_k} \quad (1.1-22)$$

$[ij, k]$ 称为 Christoffel 符号, g_{ki} 构成 $n \times n$ 反对称陀螺矩阵 $\mathbf{g}$ 。注意, (1.1-21)中陀螺力项 $g_{ki} \dot{q}_i$ 来自动能对广义速度的一次式与广义势,它与惯性力项及有势力项一样为系统的固有性质。

对定常(自治)系统, $T_1 = T_0 = 0$, m_{ij} , U_1 及 U_0 不显含时间 t , Lagrange 函数(1.1-19)与 Lagrange 方程(1.1-21)退化为

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j / 2 - b_i^{sp}(\mathbf{q}) \dot{q}_i - U_0(\mathbf{q}) \quad (1.1-23)$$

$$m_{ki} \ddot{q}_i + [ij, k] \dot{q}_i \dot{q}_j + g_{ki} \dot{q}_i + \partial U_0 / \partial q_k = 0 \quad (1.1-24)$$

式中

$$g_{ki} = \partial b_i^{sp} / \partial q_k - \partial b_k^{sp} / \partial q_i \quad (1.1-25)$$

此时,陀螺力项仅由广义势产生。

若再假定系统只有普通势,则 Lagrange 函数(1.1-23)与 Lagrange 方程(1.1-24)进一步退化为

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j / 2 - U_0(\mathbf{q}) \quad (1.1-26)$$

$$m_{ki} \ddot{q}_i + [ij, k] \dot{q}_i \dot{q}_j + \partial U_0 / \partial q_k = 0 \quad (1.1-27)$$

(1.1-21)与(1.1-24)分别为非定常与定常陀螺系统的 Lagrange 方程, (1.1-27)为定常非陀螺系统的 Lagrange 方程, 它们一般是二阶非线性常微分方程组, 上述各方程的第二项乃由质量依赖于广义位移引起的非线性惯性力, 陀螺力项与普通有势力项也可为非线性的。

若进一步假定质量不依赖于广义位移, b_i^p 为 q_j 的齐一次式, U_0 为 q_i 的齐二次式: $U_0 = k_{ij} q_i q_j / 2$, 则 Lagrange 函数(1.1-23)与 Lagrange 方程(1.1-24)退化为

$$\begin{aligned} L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= [m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + g_{ij} \dot{q}_i q_j - k_{ij} q_i q_j] / 2 \\ &= [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}] / 2 \end{aligned} \quad (1.1-28)$$

$$m_{ij} \ddot{q}_j + g_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = 0 \quad (1.1-29)$$

(1.1-28)中 $\mathbf{G} = [g_{ij}]$ 为陀螺矩阵, $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ 为刚度矩阵。相应地, (1.1-26)与(1.1-27)退化为

$$\begin{aligned} L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= [m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - k_{ij} q_i q_j] / 2 \\ &= [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}] / 2 \end{aligned} \quad (1.1-30)$$

$$m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j = 0 \quad (1.1-31)$$

(1.1-28)~(1.1-31)中, m_{ij} , g_{ij} 及 k_{ij} 皆为常数。(1.1-29)与(1.1-31)分别是定常线性陀螺与非陀螺系统的 Lagrange 方程。

上述 Lagrange 函数对 $\dot{q}_i$ 的 Hesse 式为质量矩阵 $\mathbf{M}$ 的行列式, $\mathbf{M}$ 为对称正定矩阵, 条件(1.1-4)满足, 因此, 可用 Legendre 变换将上述各 Lagrange 方程变换成相应的 Hamilton 方程。(1.1-19)代入(1.1-3), 得

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i = m_{ij} \dot{q}_j + b_i \quad (1.1-32)$$

可知, 广义动量是广义速度的线性函数。(1.1-32)之逆为

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1} (p_j - b_j) \quad (1.1-33)$$

式中 $m_{ij}^{-1} = (\mathbf{M}^{-1})_{ij}$ 。由(1.1-33)知, 广义速度亦是广义动量的线性函数。(1.1-19)代入(1.1-5)得

$$H = (\dot{p}_i q_i - L)_{\dot{q}_i \rightarrow p_i}$$

$$= m_{ij}^{-1} p_i p_j / 2 - m_{ij}^{-1} b_j p_i + m_{ij}^{-1} b_i b_j / 2 - c \quad (1.1-34)$$

可知, Hamilton 函数是广义动量的二次式。(1.1-32)~(1.1-34)代入(1.1-9),得

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1} p_j - m_{ij}^{-1} b_j$$

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}^{-1}}{\partial q_i} p_j p_k + \frac{\partial(m_{jk}^{-1} b_j)}{\partial q_i} p_k - \frac{1}{2} \frac{\partial(m_{jk}^{-1} b_j b_k)}{\partial q_i} + \frac{\partial c}{\partial q_i}$$

(1.1-35)

这是 n 自由度理想、完整、有势动力学系统的 Hamilton 方程,它与 Lagrange 方程(1.1-21)相应。

对定常陀螺系统,广义动量、广义速度、Hamilton 函数及 Hamilton 方程为

$$p_i = m_{ij} \dot{q}_j - b_i^{sp} \quad (1.1-36)$$

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1} (p_j + b_j^{sp}) \quad (1.1-37)$$

$$H = m_{ij}^{-1} p_i p_j / 2 + m_{ij}^{-1} b_j^{sp} p_i + m_{ij}^{-1} b_i^{sp} b_j^{sp} / 2 + U_0$$

(1.1-38)

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1} p_j + m_{ij}^{-1} b_j^{sp}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}^{-1}}{\partial q_i} p_j p_k - \frac{\partial(m_{jk}^{-1} b_j^{sp})}{\partial q_i} p_k - \frac{1}{2} \frac{\partial(m_{jk}^{-1} b_j^{sp} b_k^{sp})}{\partial q_i} - \frac{\partial U_0}{\partial q_i}$$

(1.1-39)

对定常非陀螺系统,相应的方程为

$$p_i = m_{ij} \dot{q}_j \quad (1.1-40)$$

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1} p_j \quad (1.1-41)$$

$$H = m_{ij}^{-1} p_i p_j / 2 + U_0 \quad (1.1-42)$$

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1} p_j$$

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}^{-1}}{\partial q_i} p_j p_k - \frac{\partial U_0}{\partial q_i} \quad (1.1-43)$$

(1.1-36)~(1.1-43)中, m_{jk}^{-1} , b_j^{sp} 及 U_0 皆不显含 t , 但可为 q_i 的任意函数。