力学丛书

# 非线性随机动力学与控制

## ——Hamilton理论体系框架

朱位秋 著

科学出版社

## 内 容 简 介

本书在较详细地介绍 Hamilton 系统与扩散过程基础上，系统而深入地论述了随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论，包括 Gauss 白噪声激励下耗散的 Hamilton 系统的精确平稳解与等效非线性系统法、拟 Hamilton 系统随机平均法、拟 Hamilton 系统的随机稳定性、随机分岔、首次穿越以及分别以振动最小、稳定度或可靠度最大为目标的非线性随机最优控制。

本书可供力学、机械、土木、海洋及航空航天工程等方面的科学技术人员以及有关专业的高年级大学生、研究生、教师阅读。

**图书在版编目(CIP)数据**

非线性随机动力学与控制：Hamilton 理论体系框架/朱位秋著 .—北京：科学出版社，2003.2

(力学丛书)

ISBN 7-03-011184-2

Ⅰ.非… Ⅱ.朱 … Ⅲ.哈密顿系统-动力系统(力学) Ⅳ.O175.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009555 号

责任编辑：李成香 鄢德平 /责任校对：钟 洋

责任印制：安春生/封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2003 年 2 月第一次印刷 印张：15 7/8

印数：1—2 000 字数：415 000

**定价：48.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

# 《力学丛书》编委会

# 序

随机动力学之源始，可追溯至 20 世纪初物理学者对布朗运动之研究，至今已有百年之历史。其后因各种工程应用之需要，范围逐渐扩大，包括通信、航天、航海、土木、机械等领域。近年来精益求精，注意力尤集中于难度较深之非线性系统、系统稳定性及系统控制之发展。朱位秋教授以深厚之数学根底，对此三方面均有显著贡献，在随机动力学领域内，成为国际著名专家之一。其新著《非线性随机动力学与控制》一书，集十余年对此三方面研究之精华于一册，实属学术上重要贡献。书中理论上发展，以统一之哈密尔顿框架为基础，乃朱位秋教授之首创，尤属独特可贵。此书之广受欢迎，可预为朱教授贺。

Y. K. Lin

于美国佛罗里达大西洋大学应用随机研究中心

# 前　言

非线性随机动力学系统广泛存在于自然科学、工程科学及社会科学之中。例如，强震、强风、强浪等严重随机载荷可使高层建筑、大型桥梁、海洋平台等工程结构产生强烈的非线性随机振动、失稳甚至破坏，因而需要加以控制。又如，在物理、化学、生物学中，噪声对非线性动力学系统可产生多种重要效应。近 20 年中，物理学界对随机共振进行了大量的研究，近 10 年来，化学与生物学界的科学家逐渐体会到，噪声在非线性动力学系统中可起积极的作用。因此，愈来愈多的学者从事非线性随机动力学与控制的研究。

上世纪初，Einstein 等人对布朗运动的研究标志着随机动力学研究的开端。对非线性随机动力学的研究则始于上世纪 60 年代初。至上世纪 90 年代初，对非线性随机振动的研究基本上局限于拟线性系统与单自由强非线性系统。对随机稳定性的研究基本上局限于单自由度线性随机系统。首次穿越问题的研究局限于单自由度随机系统。随机分岔研究始于上世纪 80 年代初，至今也基本上局限于一、二维随机系统。对随机最优控制的研究始于上世纪 60 年代初，至今基本上局限于线性随机系统的线性二次 Gauss (LQG)控制。然而，实际的非线性随机动力学系统往往是多自由度、强非线性的。因此，迫切需要发展多自由度强非线性系统随机动力学与控制理论。但是，这是一项十分困难的任务。

近 10 年来，作者将非线性随机动力学与控制的研究从 Lagrange体系转到 Hamilton 体系，将非线性随机动力学系统表示成随机激励的耗散的 Hamilton 系统，根据相应 Hamilton 系统的可积性与共振性，将系统分成不可积、可积非共振、可积共振、部分可积非共振、部分可积共振五类，提出与发展了随机激励的耗散的 Hamilton 系统理论，包括 Gauss 白噪声激励下耗散的 Hamilton 系统的精确平稳解与等效非线性系统法、拟 Hamilton 系统随机平均法、拟 Hamilton 系统随机稳定性、随机分岔、首次穿越以及分别以

振动最小、稳定度或可靠度最大为目标的非线性随机最优控制理论方法，构成了一个崭新的非线性随机动力学与控制的 Hamilton 理论体系的框架，特别为解决多自由度强非线性系统随机动力学与控制问题提供了一整套理论方法，得到了非线性随机动力学系统四类能量非等分精确平稳解，打破了自 1933 年以来一直只有能量等分解的局面。该项研究成果获得了 2001 年中国高校科学技术（自然科学）奖一等奖，2002 年国家自然科学奖二等奖。

本书是上述研究成果的一个系统总结。为便于读者理解，前两章较详细地介绍了 Hamilton 系统与扩散过程，6.1 节中介绍了随机稳定性与随机分岔的基本概念与基本方法，8.1 节中介绍了随机最优控制的基本概念与基本方法，各种理论方法的论述皆配以若干应用例子。上述理论尚待完善与发展，理论的应用更需进一步研究。作者希望本书能起到抛砖引玉的作用，期待更多的学者从事这方面的研究，共同继续发展该理论及其应用。

在本书即将出版之际，作者首先要感谢美国工程院院士、美国佛罗里达大西洋大学应用随机学研究中心主任、工程中 Schmidt Chair Y. K. Lin 教授与美国纽约州立大学布法罗分校 Samuel P. Capen 教授 T. T. Soong 的鼓励与支持，作者对随机激励的耗散的 Hamilton 系统的研究是从访问他们期间开始的，Lin 教授还特为本书作了序。感谢国家自然科学基金（19372054，19672054，19972059）与高等学校博士学科点专项科研基金（9433528，20020335092）对此项研究工作的持续资助。感谢黄志龙教授、应祖光副教授、雷鹰博士、杨勇勤与邓茂林等，他们与作者一起发展了上述理论。感谢吴勇军与刘中华，他们协助作者整理手稿与绘制插图。感谢妻子朱巧芝的理解与全力支持。感谢中国科学院科学出版基金与国家自然科学基金优秀研究成果专著出版基金的联合资助。感谢科学出版社在本书出版过程中的全力支持与帮助。

衷心欢迎读者对本书提出宝贵意见与批评指正。

作　者

2003 年 1 月于浙江大学

# 目　　录

# 第一章　Hamilton 系统

本书中将非线性随机动力学系统表示成随机激励的耗散的 Hamilton 系统，其中 Hamilton 系统的性质对整个系统的解的泛函形式与性质起着关键性作用。因此，要理解本书所述理论，需对 Hamilton 系统有所了解。Hamilton 力学是古典动力学的组成部分，Hamilton 系统则是非线性科学的一个重要研究领域，Hamilton 系统理论内容十分丰富。本章只介绍与本书后续部分有关的有限自由度 Hamilton 系统的基本知识。

## 1.1　Hamilton 方程

### 1.1.1　从 Lagrange 方程到 Hamilton 方程

一个系统，若其运动可用一组 Hamilton(正则)方程描述，就称它为 Hamilton 系统。Hamilton 方程通常由 Lagrange 方程经 Legendre变换导得。考虑一个 $n$ 自由度理想、完整、有势的动力学系统，以 $q_i$ 与 $\dot{q}_i$ 分别表示广义位移(坐标)与广义速度，$L=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$表示 Lagrange 函数，$\boldsymbol{q}=[q_1q_2\cdots q_n]^{\mathrm{T}}$，由 Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\mathrm{d}t=0 \tag{1.1-1}$$

可导出如下 Lagrange 方程[1]：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.1-2}$$

该方程之解在几何上为 $n$ 维位形空间中的轨线，通过该空间中任一点，可有无穷多条轨线，因而在理论研究中很不方便。可以将广义位移与广义速度组成状态矢量，将 Lagrange 方程化为状态方程，以克服上述不便，但更方便的做法是引入广义动量，将

Lagrange方程化为以广义位移与广义动量为基本变量的 Hamilton 方程。

广义动量定义为

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1-3}$$

(1.1-3)称为由 Lagrange 函数 $L$ 生成的 Legendre 变换。设 $L$ 对 $\dot{q}_i$ 的 Hesse 式不为零,即

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right] \neq 0 \tag{1.1-4}$$

则(1.1-3)为非奇异变换,可逆,其逆变换也是 Legendre 变换。据 Legendre 变换的逆变换定理[2],(1.1-3)之逆变换的生成函数为

$$(p_i\dot{q}_i - L)_{\dot{q}_i \to p_i} = H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \tag{1.1-5}$$

式中重复下标表示求和,下同,$\boldsymbol{p} = [p_1 p_2 \cdots p_n]^{\mathrm{T}}$。而逆变换为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1-6}$$

同时,正逆变换的生成函数 $L$ 与 $H$ 之间有如下关系式:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1-7}$$

由(1.1-2)、(1.1-3)及(1.1-7)可得

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1-8}$$

组合(1.1-6)与(1.1-8)就得到以 $q_i, p_i$ 为基本变量的 Hamilton 方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1-9}$$

该方程与 Lagrange 方程(1.1-2)等价。$q_i, p_i$ 称为正则变量,由它们组成的状态空间称为系统的相空间,$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$称为 Hamilton 函数。

将(1.1-5)代入(1.1-1),得到另一形式 Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}_i - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t))\mathrm{d}t = 0 \tag{1.1-10}$$

它与(1.1-1)等价。两者的区别在于,(1.1-1)中,仅 $q_i$ 为独立变量,它们在积分上、下限为固定值,积分为 $n$ 维位形空间中的作用泛函,而(1.1-10)中,$q_i$ 与 $p_i$ 同为独立变量,它们在积分上、下限上之值固定,积分为 $2n$ 维相空间中的作用泛函。Hamilton 方程(1.1-9)亦可从修正的 Hamilton 原理(1.1-10)导得。

以 $\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 记 $2n$ 维正则(状态)矢量,将 Hamilton 函数改写成 $H(\boldsymbol{z},t)$,再以 $\boldsymbol{D}=[\partial/\partial z_1\partial/\partial z_2\cdots\partial/\partial z_{2n}]^{\mathrm{T}}$ 记梯度算子矢量,则 Hamilton 方程(1.1-9)可改写成

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{JD}H(\boldsymbol{z},t) \tag{1.1-11}$$

式中

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1-12}$$

为单位辛矩阵,$\boldsymbol{I}_n$ 为 $n\times n$ 单位阵。辛矩阵 $\boldsymbol{J}$ 具有下列性质:

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}^{-1} = -\boldsymbol{J},\ |\boldsymbol{J}|=1 \tag{1.1-13}$$

Hamilton 方程(1.1-9)与(1.1-11)的耦对性决定了 Hamilton 系统在相空间中具有辛结构。

### 1.1.2 陀螺与非陀螺 Hamilton 系统

Lagrange 函数为动能 $T$ 与势能 $U$ 之差

$$L = T - U \tag{1.1-14}$$

一般情形下,动能为广义速度的二次式

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \tag{1.1-15}$$

式中

$$T_2 = m_{ij}(\boldsymbol{q},t)\dot{q}_i\dot{q}_j/2,\ T_1 = b_i^{ke}(\boldsymbol{q},t)\dot{q}_i,\ T_0 = T_0(\boldsymbol{q},t) \tag{1.1-16}$$

$m_{ij}$构成 $n\times n$ 正定、对称质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。势能

$$U = U_0 + U_1 \tag{1.1-17}$$

式中

$$U_0=U_0(\boldsymbol{q},t),\ U_1=b_i^{gp}(\boldsymbol{q},t)\dot{q}_t \tag{1.1-18}$$

分别为普通势与广义势。因此,一般 Lagrange 函数形为

$$L = L_2 + L_1 + L_0 \tag{1.1-19}$$

式中

$$\begin{aligned} L_2 &= T_2 = m_{ij}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_i\dot{q}_j/2 \\ L_1 &= T_1 - U_1 = [b_i^{ke}(\boldsymbol{q}, t) - b_i^{gp}(\boldsymbol{q}, t)]\dot{q}_i \\ &= b_i(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_i \\ L_0 &= T_0 - U_0 = c(\boldsymbol{q}, t) \end{aligned} \tag{1.1-20}$$

将(1.1-19)代入(1.1-2),得 $n$ 自由度理想、完整、有势动力学系统的 Lagrange 方程

$$m_{ki}\ddot{q}_i + [ij, k]\dot{q}_i\dot{q}_j + g_{ki}\dot{q}_i + \frac{\partial m_{ki}}{\partial t}\dot{q}_i + \frac{\partial b_k}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial q_k} = 0$$

$$i, j, k = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1-21}$$

式中

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right), g_{ki} = \frac{\partial b_k}{\partial q_i} - \frac{\partial b_i}{\partial q_k} \tag{1.1-22}$$

$[ij, k]$称为 Christoffel 符号,$g_{ki}$构成$n \times n$ 反对称陀螺矩阵$\boldsymbol{g}$。注意,(1.1-21)中陀螺力项 $g_{ki}\dot{q}_i$ 来自动能对广义速度的一次式与广义势,它与惯性力项及有势力项一样为系统的固有性质。

对定常(自治)系统,$T_1 = T_0 = 0$, $m_{ij}$, $U_1$ 及 $U_0$ 不显含时间 $t$,Lagrange 函数(1.1-19)与 Lagrange 方程(1.1-21)退化为

$$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = m_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j/2 - b_i^{gp}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i - U_0(\boldsymbol{q}) \tag{1.1-23}$$

$$m_{ki}\ddot{q}_i + [ij, k]\dot{q}_i\dot{q}_j + g_{ki}\dot{q}_i + \partial U_0/\partial q_k = 0 \tag{1.1-24}$$

式中

$$g_{ki} = \partial b_i^{gp}/\partial q_k - \partial b_k^{gp}/\partial q_i \tag{1.1-25}$$

此时,陀螺力项仅由广义势产生。

若再假定系统只有普通势,则 Lagrange 函数(1.1-23)与 Lagrange 方程(1.1-24)进一步退化为

$$L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = m_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j/2 - U_0(\boldsymbol{q}) \tag{1.1-26}$$

$$m_{ki}\ddot{q}_i + [ij, k]\dot{q}_i\dot{q}_j + \partial U_0/\partial q_k = 0 \tag{1.1-27}$$

(1.1-21)与(1.1-24)分别为非定常与定常陀螺系统的 Lagrange 方程,(1.1-27)为定常非陀螺系统的 Lagrange 方程,它们一般是二阶非线性常微分方程组,上述各方程的第二项乃由质量依赖于广义位移引起的非线性惯性力,陀螺力项与普通有势力项也可为非线性的。

若进一步假定质量不依赖于广义位移,$b_i^{gp}$ 为 $q_j$ 的齐一次式,$U_0$ 为 $q_i$ 的齐二次式:$U_0 = k_{ij}q_iq_j/2$,则 Lagrange 函数(1.1-23)与 Lagrange 方程(1.1-24)退化为

$$\begin{aligned} L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= [m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_{ij}\dot{q}_iq_j - k_{ij}q_iq_j]/2 \\ &= [\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}]/2 \end{aligned} \tag{1.1-28}$$

$$m_{ij}\ddot{q}_j + g_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = 0 \tag{1.1-29}$$

(1.1-28)中 $\boldsymbol{G} = [g_{ij}]$为陀螺矩阵,$\boldsymbol{K} = [k_{ij}]$为刚度矩阵。相应地,(1.1-26)与(1.1-27)退化为

$$\begin{aligned} L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= [m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - k_{ij}q_iq_j]/2 \\ &= [\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}]/2 \end{aligned} \tag{1.1-30}$$

$$m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = 0 \tag{1.1-31}$$

(1.1-28)~(1.1-31)中,$m_{ij}$, $g_{ij}$ 及 $k_{ij}$ 皆为常数。(1.1-29)与(1.1-31)分别是定常线性陀螺与非陀螺系统的 Lagrange 方程。

上述 Lagrange 函数对 $\dot{q}_i$ 的 Hesse 式为质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的行列式,$\boldsymbol{M}$ 为对称正定矩阵,条件(1.1-4)满足,因此,可用 Legendre 变换将上述各 Lagrange 方程变换成相应的 Hamilton 方程。(1.1-19)代入(1.1-3),得

$$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i = m_{ij}\dot{q}_j + b_i \tag{1.1-32}$$

可知,广义动量是广义速度的线性函数。(1.1-32)之逆为

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1}(p_j - b_j) \tag{1.1-33}$$

式中 $m_{ij}^{-1} = (\boldsymbol{M}^{-1})_{ij}$。由(1.1-33)知,广义速度亦是广义动量的线性函数。(1.1-19)代入(1.1-5)得

$$H = (p_i\dot{q}_i - L)_{\dot{q}_i \to p_i}$$

$$= m_{ij}^{-1}p_ip_j/2 - m_{ij}^{-1}b_jp_i + m_{ij}^{-1}b_ib_j/2 - c \quad (1.1\text{-}34)$$

可知,Hamilton 函数是广义动量的二次式。(1.1-32)~(1.1-34)代入(1.1-9),得

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1}p_j - m_{ij}^{-1}b_j$$

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial m_{jk}^{-1}}{\partial q_i}p_jp_k + \frac{\partial(m_{jk}^{-1}b_j)}{\partial q_i}p_k - \frac{1}{2}\frac{\partial(m_{jk}^{-1}b_jb_k)}{\partial q_i} + \frac{\partial c}{\partial q_i}$$

(1.1-35)

这是 $n$ 自由度理想、完整、有势动力学系统的 Hamilton 方程,它与 Lagrange 方程(1.1-21)相应。

对定常陀螺系统,广义动量、广义速度、Hamilton 函数及 Hamilton 方程为

$$p_i = m_{ij}\dot{q}_j - b_i^{gp} \quad (1.1\text{-}36)$$

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1}(p_j + b_j^{gp}) \quad (1.1\text{-}37)$$

$$H = m_{ij}^{-1}p_ip_j/2 + m_{ij}^{-1}b_j^{gp}p_i + m_{ij}^{-1}b_i^{gp}b_j^{gp}/2 + U_0$$

(1.1-38)

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1}p_j + m_{ij}^{-1}b_j^{gp}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial m_{jk}^{-1}}{\partial q_i}p_jp_k - \frac{\partial(m_{jk}^{-1}b_j^{gp})}{\partial q_i}p_k - \frac{1}{2}\frac{\partial(m_{jk}^{-1}b_j^{gp}b_k^{gp})}{\partial q_i} - \frac{\partial U_0}{\partial q_i}$$

(1.1-39)

对定常非陀螺系统,相应的方程为

$$p_i = m_{ij}\dot{q}_j \quad (1.1\text{-}40)$$

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1}p_j \quad (1.1\text{-}41)$$

$$H = m_{ij}^{-1}p_ip_j/2 + U_0 \quad (1.1\text{-}42)$$

$$\dot{q}_i = m_{ij}^{-1}p_j$$

$$\dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial m_{jk}^{-1}}{\partial q_i}p_jp_k - \frac{\partial U_0}{\partial q_i} \quad (1.1\text{-}43)$$

(1.1-36)~(1.1-43)中,$m_{jk}^{-1}$,$b_j^{gp}$ 及 $U_0$ 皆不显含 $t$,但可为 $q_i$ 的任意函数。