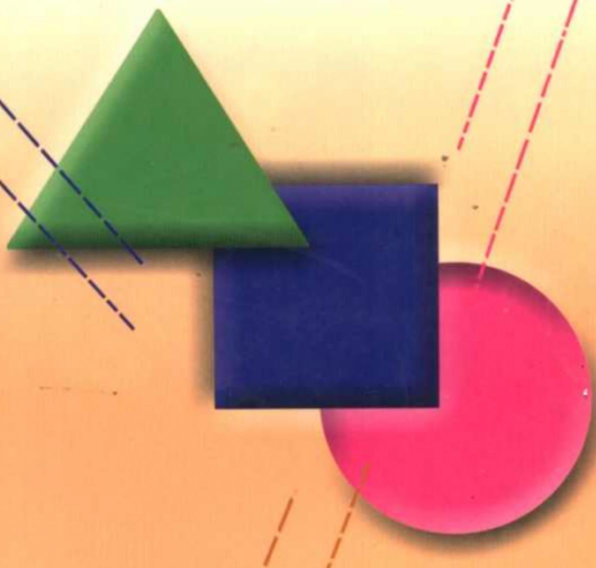
pingmian jihe de jinyaoshi

平面几何的金钥匙

——如何添加辅助线

王永明 编著



杭州出版社

如何添加辅助线

平面几何的金钥匙

ISBN 7-80633-443-2

9 787806 334430 >

ISBN 7-80633-443-2/O·6

定价：10.00元

平面几何的金钥匙

——如何添加辅助线

王永明 编著

杭州出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面几何的金钥匙:如何添加辅助线/王永明编著.
-杭州:杭州出版社,2002.4

ISBN 7-80633-443-2

Ⅰ.平… Ⅱ.王… Ⅲ.平面几何-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第018951号

平面几何的金钥匙——如何添加辅助线

编　　著:王永明
责任编辑:汤　敏
封面设计:李　莎
出版发行:杭州出版社(杭州市体育场路286号)
　　　　邮政编码:310003　电话:(0571)85066612
印刷:杭州钱江彩色印务有限公司
开本:850×1168　1/32
印张:6.75
字数:150千
2002年4月第1版
2002年4月第1次印刷
ISBN　7-80633-443-2/O·6
定价:10.00元

前　言

平面几何是一门提高学生逻辑思维和综合分析能力的学科，但对大部分初中学生来说也是最困难的学科之一。学生在学习平面几何时，往往会产生这样的问题，即简单的不需要添线的平面几何问题基本能解决，一旦遇到较复杂的或不规则的平面几何图形，特别是需要添加辅助线的题目，往往觉得无从下手，因而产生畏难情绪。

笔者通过对几千道几何题的证明和依据多年的教学实践，感悟到平面几何其实有其内在规律，摸索总结了一套简便易懂的解平面几何的方法——基本图形分析法。

我这里讲的基本图形分析法就是一个看似复杂或不规则的平面几何图形，可以根据题目的已知条件及结论，按照一定的规律，将其分解出一个或几个基本图形来，然后利用这些基本图形的性质使问题得到解决。

学生一旦学会了这种分析法，就能掌握平面几何的内在规律，从中分析出这个题目到底要不要添辅助线。①这个题目为什么不需要添辅助线，是因为通过分析发现这个题目分解出来的一个或几个基本图形都是完整的，我们可以利用这些基本图形的性质使问题得到解决，因此就没有添辅助线的必要了。②这个题目为什么要添辅助线，是因为通过分析，从这个题目中分解出来的基本图形有一个或几个是不完整的，那就无法应用这些基本图形

的性质去解决这个问题，因此有必要添辅助线将这些基本图形补完整，使问题得到解决。③凡是需要添辅助线的题目能讲得出添每一条辅助线的道理，因为不同题目的条件和结论会产生不同的基本图形，根据这一结果我们可以把这些基本图形补完整，这就是添辅助线的道理。(比如，题目中出现两个及两个以上中点时，一定会出现中位线基本图形，当出现角平分线与平行线组合的条件时，就会出现等腰三角形基本图形等等。)

对于学生来说，一旦掌握了这种科学的解题方法，就会产生浓厚的学习兴趣，而兴趣是最好的老师。平面几何中的添辅助线对初中生来说无疑是一个创造性思维，因为它可以通过添辅助线创造出一个个解决问题的基本图形来。

一旦学生掌握了添辅助线的规律，将大大有利于提高学生的创造性思维的能力，从而发展了学生的智力，达到不断提高学生素质的目的。本书将按照初中平面几何教材的教学顺序全面系统地阐述这一套平面几何的分析方法。

目　录

总　论

一、什么是基本图形分析法

要了解什么是基本图形分析法，首先要知道平面几何中有哪几类基本图形，归纳起来平面几何里基本图形可以分成以下几类：平行线，全等三角形（包括轴对称型全等三角形、中心对称型全等三角形、旋转型全等三角形），等腰三角形（包括等腰三角形两两等价性、角平分线＋平行线$\xrightarrow{\text{组合成}}$等腰三角形、角平分线＋垂线$\xrightarrow{\text{组合成}}$等腰三角形、直角三角形斜边上的中线），中位线，相似三角形（包括平行线型相似三角形、圆幂定理型相似三角形、旋转型相似三角形），圆（包括圆内接四边形、两圆相交、两圆相切），再加上梯形的几种添线方法。其中正方形、矩形、平行四边形等一些图形教科书上有，这里不列入在内.

所谓的基本图形分析法就是把一个看似复杂或不规则的几何图形，分解成上述类别的几个基本图形，学生可以根据这些基本图形的性质轻而易举地解决这些难题.

下面我举两个例子来说明什么是基本图形分析法.

【例1】　已知：如图1，AB 是半圆的直径，$CD\perp AB$，垂足为 D，MN 切圆 O 于 C，$AE\perp MN$，$BF\perp MN$，垂足分别为 E、F．求证：$CD=CE=CF$，$CD^2=AE\cdot BF$.

分析 这个问题首先要证明的是 $CD=CF$，已知 $\angle CDB=\angle CFB=90°$. 这两条要证明相等的线段就成为 C 点到 $\angle DBF$ 两边的距离，C 到这个角两边距离相等，那么 C 点在这个角的平分线上，或者讲这两条相等的线段是关于这个 $\angle DBF$ 角的平分线成轴对称的，在这样的条件下，就可以添加对称轴，使之成为一对完整的轴对称型的全等三角形，因此把 BC 连起来. 如图 2 和图 3 所示，就是这个问题的第一个基本图形，我们可以看到这个图形就是一对轴对称型的全等三角形，这是针对 $CD=CF$ 来分析的. 如图 4 所示，对于

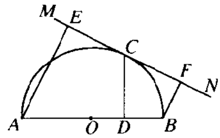


图 1

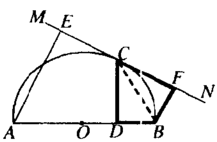


图 2

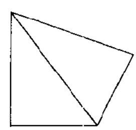


图 3

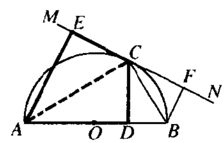


图 4

$CD=CE$ 同样可以分析. 接下来我们可以看到，由于 AB 是半圆的直径，那就要应用直径的性质即半圆上的圆周角是直角. 那么 $\angle ACB=90°$，如图 5 和图6 所示，这个图形就是半圆上的圆周角，

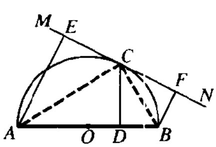


图 5

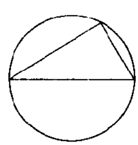


图 6

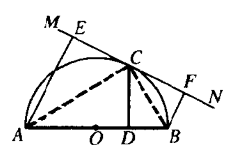


图 7

就是这个问题的第二个基本图形. 由于 $\angle ACB=90°$，$\triangle ABC$ 就

是一个直角三角形，而 $CD \perp AB$，CD 就成为这个直角三角形斜边上的高，因此它满足射影定理，即 $CD^2 = AD \cdot DB$，如图 7、图 8 所示，这个直角三角形斜边上的高，就是这个问题的第三个基本图形．我们看到还有一个条件就是 MN 与这个半圆相切于 C 点，而切线的问题就是弦切角的问题，因此$\angle FCB = \angle BAC$，如图 9 和图 10 所示，这个图形就是这个问题的第四个基本图形．

图 8

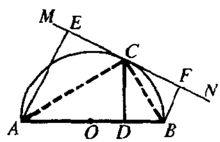


图 9

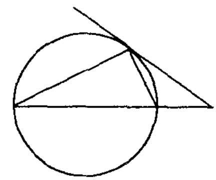


图 10

到这里这个问题的分析实际上已经完成，因为$\angle BCD$ 和$\angle BCF$ 已经都和$\angle BAC$ 相等，所以这两个角相等，这就可以证明$\triangle BCD \cong \triangle BCF$．那么 $CD = CF$，当然也就等于 CE，而且 $BD = BF$，$AD = AE$，所以第二个结论也可以证明．

上面我对例 1 进行了分析，可以看到它是由四个基本图形组合而成的：1．一对轴对称型的全等三角形；2．一个半圆上的圆周角；3．一个直角三角形斜边上的高；4．一个弦切角．当我们运用这四个基本图形的性质的时候，问题就得到解决．

【例 2】 如图 11，四边形 $ABCD$ 是圆 O 的一个内接矩形，过 C 作切线与 AB、AD 的延长线相交于 E 和 F．求证：$\dfrac{AE^3}{AF^3} = \dfrac{BE}{DF}$．

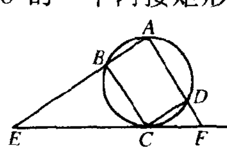


图 11

分析 首先我们看到四边形 $ABCD$ 是一

个矩形，所以$\angle ABC$是直角，而$\angle ABC$是圆O的一个圆周角，圆周角是直角，它所对的弦是直径，这个问题实际上仍然是半圆上的周角的问题，如图12和图13所示，这就是例2的第一个基本图形．既然这是半圆上的圆周角就可以利用直径的性质，而已知图形上没有直径，因此把直径AC添上，也就是连结AC，那么AC一定过O点，FC与圆O相切于C点，这就是一条切线，而切线的问题就是弦切角的问题，我们可以看到$\angle FCA$就是一个弦切角，由于AC是直径，则$\angle FCA=\angle ABC=90°$，如图14和图15所示，这就是例2的第二个基本图形．

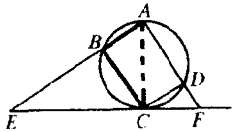


图 12

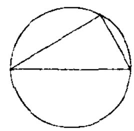


图 13

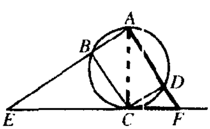


图 14

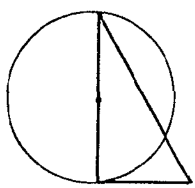


图 15

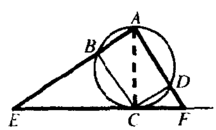


图 16

由于$\angle EAF$也是直角，那么AC和EF垂直，AC就成为直角$\triangle AEF$斜边上的高，如图16和图17所示，这就是例2的第三个基本图形．最后由于$ABCD$是一个矩形，那么CD就和EA平行，这样CD成为$\triangle AEF$中的一条平行线，从而可以得到一对平行线型的相似三角形，如图18和图19所示，这是例2的第四个基本图形．

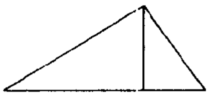


图 17

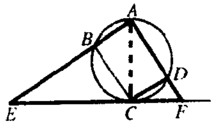


图 18

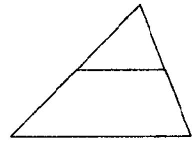


图 19

我们可以看到例 2 是由四个基本图形组成的：1. 半圆上的圆周角；2. 弦切角；3. 直角三角形斜边上的高；4. 一对平行线型的相似三角形. 当我们应用这些基本图形的性质后，例 2 就可以得到解决.

综合上述两题可以得出，把一个复杂的几何图形根据题目的条件和结论，按一定的规律分解成几个基本图形，利用这些图形的性质来解题的方法就是基本图形分析法.

通过两例分析、归纳，我们还可以发现，平面几何问题的基本图形并不很多. 因此，学生只要学好平面几何的全等三角形、相似三角形和圆的基础知识，根据几何问题的条件和结论，分析并找到组合这个几何图形的一个或若干个基本图形，掌握这些基本图形的性质，就可以用基本图形分析法来解几何问题.

二、怎样利用基本图形分析法来解题

要用基本图形分析法来解题，首先要明确基本图形分析的基本步骤，即分析关和应用关. 第一个步骤是分析关，即把这个几何图形看懂，找出一个或若干个基本图形，这时会产生两种情况.

第一种情况是通过分析所找到的基本图形是完整的，不需要添辅助线就能使问题得到解决的，如例 3.

【例 3】 如图 20，已知 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，$IH /\!/ AB$，$IG /\!/ AC$．求证：$\triangle IHG$ 的周长等于 BC．

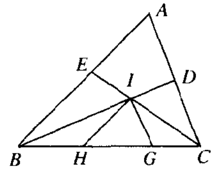


图 20

分析 为了分析这个问题，我先介绍一个基本图形，如图 21 所示，OC 平分 $\angle AOB$，$DE /\!/ OA$，那么 $\triangle ODE$ 就是一个等腰三角形)．这就告诉我们如果在几何问题中出现了角平分线和平行线，这两个图形的组合可以得到一个等腰三角形．如图 22 所示，作 $DE /\!/ OC$ 同样可以得到一个等腰三角形 $\triangle ODE$，这就叫角平分线 + 平行线 $\xrightarrow{\text{组合成}}$ 等腰三角形．

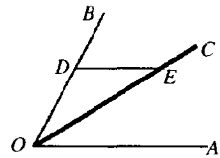


图 21

接下来我们分析例 3，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，说明 IB 是 $\angle ABC$ 的平分线．IH 是这个角一边的平行线，它们一定能够组合成一个等腰三角形，如图 23 所示，因此 $\triangle HBI$ 等腰，$IH = BH$，如图 24 所示．同理 $\triangle IGC$ 等腰，$IG = GC$，从而得到 $BC = BH + HG + GC = IH + GH + GI = \triangle IGH$ 的周长．通过分析，我们在例 3 中找到的两个等腰三角形基本图形都是完整的，因此我们利用等腰三角形的基本性质就能使例 3 得到解决，故不需要添辅助线．

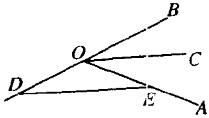


图 22

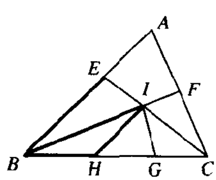


图 23

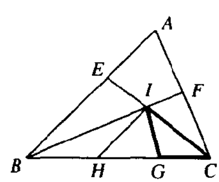


图 24

第二种情况是所找到的几何图形中的一个或者几个是不完整的，因为基本图形不完整，所以要应用它的性质就会发生困难，为了应用性质，先要把不完整的图形添完整，于是就产生了添辅助线的必要，如例4.

【例 4】 如图 25 所示，已知正方形 $ABCD$，$AM=AB$，$MN\perp AC$，求证：$BN=CM$.

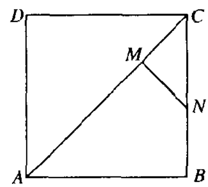


图 25

分析 由已知条件容易知道$\triangle MNC$是等腰三角形，因此 $MN=CM$. 这样要证明 $BN=CM$，只要证明 $MN=NB$ 即可，如图 26 所示，也就证明$\triangle MNB$是等腰三角形. 而这个等腰三角形只有两条腰，缺底边则将底边补上，连结 BM. 这样问题又转化成证明$\angle 1=\angle 2$. 由已知条件可知 $AB=AM$，则$\angle 3=\angle 4$，又$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=90°$，所以$\angle 1=\angle 2$. 因此结论成立. 通过对例 4 的分析，我们从例 4 中找到的三个等腰三角形中有两个是不完整的，一个是完整的. 由于我们在应用等腰三角形的性质和判定定理时发生困难，因此我们有必要将等腰$\triangle ABM$和等腰$\triangle MNB$补完整，从而使问题得到解决.

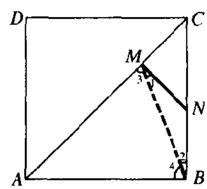


图 26

第二个步骤是应用关，即用基本图形分析法添辅助线的两种方法.

1. **补图形法**

在几何问题中，如果根据问题的条件结论分析得到的基本图

形不完整，那么就通过添辅助线，将不完整的基本图形补完整，这就是补图形法.

2. **辅助方法**

（1）根据定义添线的方法，在几何问题当中，假如出现了有定义的一些概念，那么首先考虑定义，例如要证明一条线段等于两条线段的和，那么根据定义，就把两条短的接起来，证明它和长的线段相等；要证明一个角是另一个角的2倍，我们就把这个大的角一分为二，也就是作大的角的平分线证明它的一半与另一个角相等；要证明一个点是三角形的内心，就把这个点和三角形的两个顶点连起来，证明这两条连线是角平分线．这些添线方法是根据定义来添线的.

（2）假如在几何问题中出现了具有某一种数量关系的线段或角位于不容易建立这种数量关系的位置上，那么就要将线段或角改变位置．这样的添线方法为什么叫做辅助方法呢？第一，补图形的方法是普遍使用的方法，辅助方法是对某一类问题适用．第二，即使运用了辅助的添线方法，它只是完成了分析的第一步，以后分析整个问题还需要通过基本方法，也就是根据基本图形的完整性来完成整个问题的分析，所以我们把这两种方法叫做辅助方法．为了说明添线的方法，下面我举两个例子加以说明.

【例5】 如图27，已知：E是正方形$ABCD$一边AD的中点，F是ED的中点．求证：$\angle FBC=2\angle EBA$.

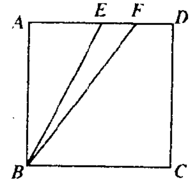


图27

分析 要证明一个角是另一个角的2倍，这是两个角的倍增问题，所以根据定义

把$\angle FBC$一分为二，即作$\angle FBC$的平分线BG交DC于G，如图28所示，这样我们只要证明$\angle GBC=\angle EBA$就可以了.（这就是前面辅助方法上讲到的在几何问题当中假如出现了有关定义的一些基本概念，如一个角是另一个角的2倍，那就首先考虑定义，把大的角一分为二证明它的一半与另一角相等.）

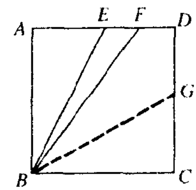


图 28

由于AD与BC是正方形的两对边，不但平行而且相等，这样就出现了角平分线和平行线的组合图形，就可以得到一个等腰三角形的基本图形.这个问题中等腰三角形是不完整的，它只有其中的一部分，所以就要把这个等腰三角形添全.如图29所示，延长FD与BG的延长线相交于H，这样就得到$\triangle FBH$等腰，$FB=FH$.现在要证明$\angle GBC=\angle ABE$，而这两个角分别在两个$\triangle ABE$和$\triangle GBC$中，如图30所示，这样问题就转化成证明$\triangle ABE\cong\triangle GBC$.而这两个三角形要满足$AB=BC$，$\angle A=\angle C=90°$，还需一个条件.根据已知条件，$E$是$AD$的中点，如果两个三角形全等，则$AE=CG$，那么$G$就是$CD$的中点，这样问题就转化成证明$CG=DG$，如图31所示，要证明$GC=DG$只要证明$\triangle GBC\cong\triangle HDG$就可以了，要证明$\triangle GBC\cong\triangle HDG$，角的问题是可以解决的.因为$\angle BGC=\angle HGD$（对顶角相等），$\angle C=\angle GDH=$

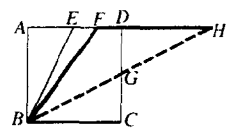


图 29

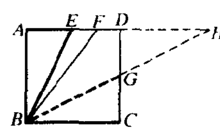


图 30

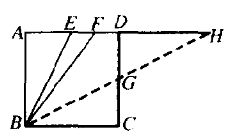


图 31

$90°$，至少一条边对应相等，而 $GC = GD$ 是要证明的，不能用，那么就需要证明 $DH = BC$，要证明 $DH = BC$，只要证明 $FH = \frac{5}{4}BC$ 就可以了．$BF = FH$ 已经证明，这样只要证明 $BF = \frac{5}{4}BC$ 就可以了．已知 F 是 ED 的中点，$AF = \frac{3}{4}BC$，$AB = \frac{4}{4}BC$，由勾股定理可得 $BF = \frac{5}{4}BC$，从而结论成立．

这个题目还说明了另一个问题，就是说根据定义添线的方法是辅助方法，而补图形法是基本方法．因为按定义的添线方法，只能作出$\angle FBC$ 的平分线 BG，它只完成了分析的第一步，要证明$\angle FBC = 2\angle EBA$ 还要通过基本方法——基本图形的完整性来完成整个问题的分析，本题就是通过基本图形等腰三角形的完整性来完成这个题目的分析的．

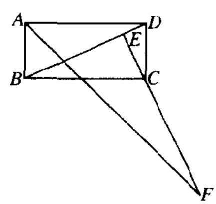


图 32

现在我们来看第二个例子．

【例 6】 如图 32，自矩形 $ABCD$ 的顶点 C，作 $CE \perp BD$，E 为垂足，延长 EC，使 $CF = BD$．求证：$\angle DAF = \angle BAF$．

分析 本题已知 $CF = BD$，由于这两条相等的线段位于无法联系的位置上，利用矩形对角线相等的性质将 BD 换到 AC 的位置上，连结 AC．这样$\triangle ACF$ 就成为等腰三角形，如图 33 所示，由此可得到$\angle 2 = \angle F$，我们知道矩形的对角线互相平分，所以 AO

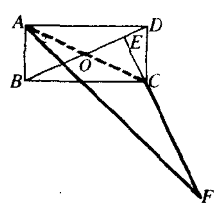


图 33