报考研究生复习丛书

YAN JIU SHENG

高等数学复习纲要

（上册）

中国展望出版社

YAN

JIU

SHENG

高等数学复习纲要

（上册）

高等数学复习纲要

顾秉琏　曾华堂　洪鸿炳
张春炎　蒋和理　蔡凤生　编

（上　册）

中国展望出版社

一九八五年九月

编 辑 说 明

《报考研究生复习丛书》是为了帮助广大青年复习有关课程，应考硕士研究生，约请有丰富教学经验的教师，根据部颁教学大纲和报考研究生的要求而编写的。力求使同学们通过学习，进一步掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生和社会青年的辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

本丛书包括：《大学政治理论课纲要》、《大学英语复习指导》、《高等数学复习纲要》、《大学物理复习纲要》、《物理化学复习纲要》、《化工原理复习纲要》、《理论力学复习纲要》、《材料力学复习纲要》、《结构力学复习纲要》、《电工基础复习纲要》。

本套丛书由宋权、席庆义主编。

高等数学复习纲要（上、下册）

*

中国展望出版社 出版

（北京西城区太平桥大街4号）

南京京新印刷厂印刷

北京新华书店发行

开本787×1092毫米1/32 21.625 印张

485.6千字 1985年9月 北京第1版

第1次印刷 1—20,000册

统一书号：7271·092 定价：3.96元

前　　言

《高等数学复习纲要》是宋权、席庆义主编的《报考研究生复习丛书》之一，曾于一九八二年十月由合肥工业大学学报编辑部编印、内部发行。本书是为帮助报考研究生的广大青年和高等学校在校学生系统地有重点地复习高等数学而编写的。今年出版时在原书的基础上，根据部颁教学大纲和近年来的教学经验，作了较大的修改和增补。力求帮助读者较好地掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解题的能力。

《高等数学复习纲要》上册，共分八章，包括《函数极限连续》、《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《空间解析几何》、《多元函数微分学》、《多元函数积分学》、《微分方程》、《级数》等内容。《高等数学复习纲要》下册，共分五章，包括《线性代数》、《概率论》《场论》《复变函数》、《数学物理方程》，并附有高等数学（自我检查）试题。参加编写的有：顾秉琏、曾华堂、洪鸿炳、张春炎、蒋和理、蔡凤生。本书由万迪生教授审定。

由于我们水平有限，书中难免有缺点甚至错误，欢迎批评指正。

编　者

一九八五年五月

1564/02

目　　录（上册）

第一章　函数、极限、连续

这一章是学习数学分析的基础，包括三个最基本的概念：函数概念、极限概念和函数连续性的概念。

I　内容提要

（一）函　数

1.函数概念　设x，y是两个变量，如果x在某范围X内任意取定一个值，按一定规律y都有确定的值与之对应，就称y是x的函数，记为$y=f(x)$。X称为函数$f(x)$的定义域。对应于$x=x_0$的函数值记为$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$。

2.复合函数　设函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当x在某区间上取值时，对应的u值可使y有定义，则y是x的**复合函数**，记为$y=f[\varphi(x)]$。

并不是任意两个函数都可构成复合函数的，需当x在函数φ的定义域X或其一部份取值时，对应的u使有一y通过f而与之对应，这两个函数才可构成复合函数。此时，$f[\varphi(x)]$的定义域视情况不同或为X或其一部分。

3.反函数　在已给函数$y=f(x)$中，把y看作自变量，x

看作因变量所确定的函数$x=f^{-1}(y)$，称为$y=f(x)$的反函数。

若函数$y=f(x)$在区间上是严格单调的(单增或单减)，则它的反函数$x=f^{-1}(y)$也单值且严格单调(单增或单减)。

4.隐函数 由方程$F(x,y)=0$确定的函数。隐函数未必能以显式$y=f(x)$表示。

5.初等函数

基本初等函数：幂函数($y=x^{\mu}$，μ为任何实数)、指数函数($y=a^x$，$a>0$，$a\neq1$)、对数函数($y=\log_a x$，$a>0$，$a\neq1$，特别$y=\ln x$)，三角函数($y=\sin x, y=\cos x$等)、反三角函数($y=\arcsin x, y=\arccos x$等)。

由常量和基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成能用一个解析式表示的函数称为初等函数。

(二) 极　　限

1.极限概念

(1) 数列的极限　如果对于给定的任意小的$\varepsilon>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon)$，使当$n>N$时，不等式$|x_n-A|<\varepsilon$成立，则称A为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \qquad \text{或} x_n\to A \quad \text{当} n\to\infty$$

这时称数列是收敛的，否则称数列是发散的。

收敛数列只有一个极限且收敛数列一定是有界的（有界数列不一定收敛)。

(2) 函数的极限

a. 如果对于给定的任意小的正数ε，总存在一个$\delta>0$，

使得对一切适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的x，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限。记成 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当$x\to x_0$。

b。如果对于给定的任意小的正数ε，总存在一个正数N使得对适合不等式$|x|>N$的一切x，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记成
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，当$x\to\infty$。

上述极限定义中，ε用以刻划接近程度，预先给定。$\delta=\delta(\varepsilon)$（或$N=N(\varepsilon)$）随$\varepsilon$而定，反映$x\to x_0(x\to\infty)$的一个阶段，从极限的意义来看，只要证明有一个$\delta$(或$N$)存在就行。$x$是以任意方式趋于$x_0$(或$\infty$)。当$x\to x_0$时，函数$f(x)$有无极限与$f(x)$在$x_0$有否定义无关。

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且$A>0$(或$A<0$)，那末就存在点$x_0$的某一邻域，当$x$在该邻域内但$x\neq x_0$时，$f(x)>0$（或$f(x)<0$)。

如果$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，而且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那末$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$)。

如果$f(x)\geqslant g(x)$，而且$\lim f(x)$，$\lim g(x)$存在，那末$\lim f(x)\geqslant\lim g(x)$。

（3）单边极限

a。当$x<x_0$而$x\to x_0$时，若$f(x)$的极限存在，此极限称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时左极限，记以$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$或$f(x_0-0)$。

b。当$x>x_0$而$x\to x_0$时，若$f(x)$的极限存在，此极限称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限，记以$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$或$f(x_0+0)$。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$成立的充要条件是

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$$

2.极限存在的判定准则

（1）数列$\{x_n\}$收敛的充要条件为：对任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，使当$n,m>N$时，恒有$|x_n-x_m|<\varepsilon$。

仿此可得函数极限存在的充要条件。例如，极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充要条件是，对任给$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)>0$，使当任何$x\geqslant N$，$x'\geqslant N$时$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$成立。

（2）单调有界数列必存在极限。

（3）数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，$(n=1,2,3\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则数列$\{x_n\}$的极限存在，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。

此准则可推广到函数极限中去。例如：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$ 且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，

则 $f(x)$ 的极限存在，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

3.极限的运算定理

若 $\lim f_1(x)=A$ $\lim f_2(x)=B$ 则

(1) $\lim(f_1(x)\pm f_2(x))=\lim f_1(x)\pm\lim f_2(x)$

$$=A\pm B;$$

（2）$\lim f_1(x)\cdot f_2(x)=\lim f_1(x)\cdot\lim f_2(x)=A\cdot B$；

（3）$\lim\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$。

以上（1）（2）可以推广到任意有限个函数的情形。

4.两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ （2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

显然，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{x}=e^{k}$

5.无穷小和无穷小的比较

称变量$\alpha(x)$为无穷小量，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ 或

$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$

（1）若$\lim f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha$，α为无穷小；反之，若$f(x)=A+\alpha$，则$\lim f(x)=A$。

（2）设α，β是两个无穷小，若

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ 则说β是比α高阶的无穷小，记成$\beta=o(\alpha)$；

$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$（$k>0$）就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小。

特别，当$k=1$，就说β与α是同阶无穷小。此时，若$c=1$，又称这两个无穷小是等价的，记作$\alpha\sim\beta$。

（3）常用的等价无穷小有：（$x\to 0$）

$x\sim \mathrm{sim}x\sim\mathrm{tg}x$；$x\sim\arcsin x\sim\mathrm{arctg}x$；

$x\sim\ln(1+x)$；　$x\sim e^x-1$；

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；　$\frac{x}{n}\sim\sqrt[n]{1+x}-1$　等等。

（4）等价无穷小代换定理：

设$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，

则　$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta'}{\alpha'}$

（5）与无穷小量相反的另一类变量是无穷大量，其定义和它与无穷小的关系不再叙述。

（三） 连续函数

1.连续概念

设函数$y=f(x)$在x_0的某邻域内（包含x_0）有定义，并且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 则称 $f(x)$在点x_0连续。

用"$\varepsilon-\delta$"语言：对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对满足$|x-x_0|<\delta$的一切x，不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称$f(x)$在x_0连续。

引入增量$\Delta x=x-x_0$，对应的$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，于是又得函数$y=f(x)$在点$x_0$连续的定义的另一等价形式：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

如果函数$y=f(x)$在某区间上的每一点都连续，就说函数在这个区间上连续，并称$f(x)$为该区间上的**连续函数**。

2.间断

如果函数$f(x)$在x_0不连续，则称函数$f(x)$在x_0间断，x_0称为$f(x)$的间断点。

由此可知，当函数$f(x)$ 在x处出现下列情况之一时，x_0为间断点，（1） $f(x)$在x_0无定义；

（2） $f(x)$虽在x_0有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

（3） $f(x)$在x_0有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$亦存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$。

其中，使$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$存在的x_0称为第一类间

断点，不属于第一类间断点的间断点统称为第二类间断点。在第一类间断点中，如果有$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，那末x_0又称为可去间断点。在这样的点上，只要对$f(x)$的定义作适当的补充或修改，就可使它成为连续函数。

3.一致连续

在区间上连续的函数$f(x)$，一般情况下，对任给的$\varepsilon>0$，相应的$\delta>0$不但和ε有关，而且与x_0在区间内的位置也有关。如果有这样的函数$f(x)$，对任给的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，使对区间内任意两点x'，x''，当$|x''-x'|<\delta$时，不等式$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$总成立，就称$f(x)$在此区间上是**一致连续**的。

例如 $f(x)=x^2-1$ 取$0\leqslant x'\leqslant 2$，$0\leqslant x''\leqslant 2$，

由于
$$f(x'')-f(x')=(x''^2-1)-(x'^2-1)$$
$$=x''^2-x'^2=(x''-x')(x''+x')$$

$$|f(x'')-f(x')|=|(x''-x')(x''+x')|\leqslant 4|x''-x'|$$

于是，对任给$\varepsilon>0$，可取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$，只要$|x''-x'|<\dfrac{\varepsilon}{4}$，便有$|f(x'')-f(x')|<4\cdot\dfrac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$，因此，$f(x)$在$[0,2]$上一致连续。

4.闭区间上连续函数的基本性质

(1)（最大最小值定理）在闭区间上连续的函数，在该区间上至少取得最大值最小值各一次。

(2)（介值定理）设$f(x)\in C[a,b]$，且$f(a)=A\neq f(b)=B$，则对任一介于A、B之间的数C，在(a,b)内至少有一点$x=\xi$使$f(\xi)=C$。

(3) 闭区间上的连续函数在该区间上一致连续。

5.初等函数的连续性

(1) 若$f_1(x)$，$f_2(x)$都在同一区间上连续，则$f_1(x)\pm f_2(x)$，$f_1(x)\cdot f_2(x)$ 及 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $(f_2(x)\neq 0)$在此区间上也连续。

(2) 设$z=\phi(x)$在点x_0连续，且$z_0=\phi(x_0)$。又设$y=f(z)$在点z_0连续，则复合函数 $y=f[\phi(x)]$在点x_0也连续。

(3) 若$y=f(x)$在区间$[a,b]$上是严格增加(减少)的连续函数，相应的$f(x)$的值域为$[c,d]$则$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$在$[c,d]$上也是严格增加(减少)的连续函数。

(4) 基本初等函数在其定义域上是连续的。

(5) 初等函数在其定义域上是连续的。

Ⅱ 例 题

例 1 设$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ $g(x)=\dfrac{1}{x}$

求证 $f[f(x)]=f(x)$， $f[g(x)]=g[f(x)]$

证 设$f(z)=\begin{cases}1 & z>0\\ 0 & z=0\\ -1 & z<0\end{cases}$ 又当$x>0$ $z=f(x)=1>0$

当$x=0$ $z=f(x)=0$ 当$x<0$ $z=f(x)=-1<0$

$$\therefore f[f(x)]=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<1\end{cases}$$ 故$f[f(x)]=f(x)$，

设$u=g(x)=\frac{1}{x}$　则 $f[g(x)]=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

由于　$g(u)=\frac{1}{u}$　此时，

当$x>0$　$u=f(x)=1$　$g(u)=\frac{1}{u}=1$，当$x<0$　$u=f(x)=-1$，

$g(u)=\frac{1}{u}=-1$，当$x=0$　$u=f(0)=0$　$g(u)$不存在。

$$\therefore\ g[f(x)]=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}\quad 故g[f(x)]=f[g(x)]$$

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2-n}$

解　$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2-n}=\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{2-n}$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2-n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e^{-1}$$

例 3　求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$　$(a>1)$

解　方法一，先用罗必达法则求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}$的极限，由于$n\to+\infty$是$x\to+\infty$的特例，所得之极限值即整标函数$f(n)=\frac{n^k}{a^n}$的极限。

方法二，利用极限存在准则(3)（夹挤定理）来证

$\because$ $a>1$　可设$a=1+\lambda$　$(\lambda>0)$

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$$

$\therefore\ 0<\dfrac{n}{a^n}<\dfrac{2}{(n-1)\lambda^2}$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$

当$k>1$时， $0<\dfrac{n^k}{a^n}=\left[\dfrac{n}{(a^{1/k})^n}\right]^k<\dfrac{n}{(a^{1/k})^n}$

由此亦得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$

当$k<1$时，$\because$ $\dfrac{n^k}{a^n}=\dfrac{n^{k-1}\cdot n}{a^n}=\dfrac{n}{a^n}\cdot\dfrac{1}{n^{1-k}}$，结论显然成立。

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$

解 $\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}=\dfrac{1}{n^k}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n+1}{2n^{k-1}}$

故 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n^{k-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^{k-2}}+\dfrac{1}{2n^{k-1}}\right)$

$$=\begin{cases}0 & k>2\\ \dfrac{1}{2} & k=2\\ \infty & k<2\end{cases}$$

例 5 设$x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)$，$n=0,1,2\cdots$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

证 由于$x_0>0$，由归纳法可证必有$x_n>0$，

又 $\left(x_n-\dfrac{1}{x_n}\right)^2\geqslant0$

$\therefore\ x_{n+1}^2=\dfrac{1}{4}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left[\left(x_n-\dfrac{1}{x_n}\right)^2+4\right]\geqslant1$，