高級中學課本

立體幾何

高級中學課本 立體幾何　　書號: 2001

編　者: 劉薰宇

北京市書刊出版業營業許可證出字第二號

出版者: 人民教育出版社
北京佟麟閣路十號

重印者: 重慶人民出版社

發行者: 新華書店

印刷者: 重慶新華印刷廠

開本: 787×1092 1/25　　1953年9月第一版
印張: 8⅘　　1954年12月第四版
字數: 176千　　1955年7月第四版第二次印刷
定價: 四角六分　　重慶5,001—12,300册

一　本書是以中央人民政府教育部所定高中立體幾何教學大綱(草案)爲依據試編的，全書一冊.

二　本書取材於蘇聯十年制中學 9—10 年級用的 A. П. Киселёв 所編課本和習題彙編，在編寫的系統上沒有什麼大的變更.

三　蘇聯課本中原只有六十一個練習題，習題彙編中却有六百三十個，爲了教學上的方便，將彙編中的習題大部分分別編到適當的章節裏，並且將若干題作爲例題.

四　在這裏要特別提出的是：習題所用到的許多形體和名詞，常常在正式提出它們的定義以前，這是爲了要求學生從生活中以及實際觀察中，直接理解某些形體各部分的關係並且在教學上密切地和平面幾何聯系。在教學中，最好讓學生用鐵絲或竹籤自己製作模型，對於習題中所提到的還沒有正式提出定義的各形體和名詞，就模型加以指示.

還有一部分習題，是在可以直接用來解它的某些定理以前就提出的，這是要求學生用其他的方法來解決，作爲理解某些定理的準備.

五　本書是試編的，希望教師們和同學們將在教學中所遇到的問題，盡量提出，以便作修改的參考.

人民教育出版社

一九五三年五月

高級中學課本 立體幾何目錄

引　言

1. 立體幾何學　研究幾何形體的性質的科學，叫做幾何學．所研究的圖形中的一切點都在同一個平面上的，這種幾何學叫做平面幾何學．若所研究的圖形中的點不全在同一個平面上的，這種幾何學便叫做立體幾何學又叫做空間幾何學．空間的幾何形象，一般地說，是有長短、寬窄和厚薄的．但我們若用圖來表示，只能畫在一個平面上；這種圖是根據圖形的性質和一定法則畫出來的。觀察這種圖所得的印象和實際觀察形象是近似的。

第一章　直綫和平面

I　平面位置的確定

2. 平面的表示法　在一個面上，任意取兩個點，經過這兩個點引一條直綫，若這條直綫上的任何一點都在這個面上，這樣的面就叫做平面．對於平面我們要設想它是可以向四面無限伸展出去的．

在日常生活中我們所接觸到的許多物體的表面，作爲平面看，很多是類似矩形的幾何平面，如書皮、窗上的玻璃面以及課堂裏所用課桌的桌面等等．當我們在適當的位置觀察這些物體的表面時，就能夠將它們看成類似平行四邊形的圖形．因此，通常我們用平行四邊形來表示一個平面，而用這個平行四邊形對角兩個頂點如右圖的 M、N，或用它上面的三個點如 A、B、C，或用一個字母 P 表示．

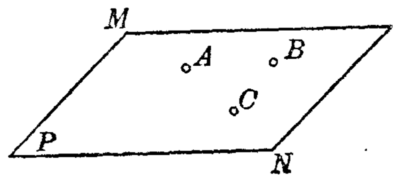


圖 1

3. 平面的基本性質　平面有下列不加証明而採取的幾個基本性質，也就是關於平面的幾條公理．

1. 空間所有的點不全在一個平面內．

2. 兩個平面若有一個公共點，則必定還有別的公共點．也就是，兩個平面若有一個公共點，則它們相交於過這點的一條直綫．

3. 過不在同一直綫上的三個點，必可以作一個平面，也只可以作一個平面．

系 1.　過一條直綫和這條直綫外面的一個點，可以作一個平面，也只可以作一個平面．

因爲過直綫外的一個點，和這條直綫上的任意兩個點所組成的三個

點可以作一個平面，也只可以作一個平面；並且這個平面就包含這條直綫(即這條直綫全在這個平面上).

系2. 過相交的兩條直綫可以作一個平面，也只可以作一個平面.

因爲過這兩條直綫的交點和每一條直綫上的任意一點所組成的三個點，可以作一個平面，也只可以作一個平面；並且這個平面就包含這兩條直綫.

系3. 過兩條互相平行的直綫可以作一個平面，也只可以作一個平面.

由平行綫的定義，兩條互相平行的直綫必在一個平面上；而過這兩條直綫中的一條和另一條上的任意一個點只可以作一個平面.

4. 平面的旋轉 如右圖，設 AB 是一條已知的直綫，在這條直綫外任意取一個點 P，過 AB 和 P 我們就可以作一個平面 ABP. 在這個平面 ABP 外任意取一個點 P_1，過 AB 和 P_1 我們又可以作一個平面 ABP_1. 很明白的，這兩個平面 ABP 和 ABP_1 是不相重合的，因爲 P_1 點並不在平面 ABP 上. 再在平面 ABP 和 ABP_1 外任意取一個點 P_2，過 AB 和 P_2.

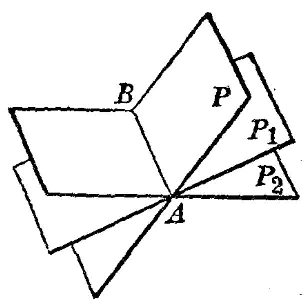


圖 2

我們又可以作一個平面 ABP_2. 並且因爲 P_2 這個點不在平面 ABP 和 ABP_1 上，所以平面 ABP_2 同着 ABP 和 ABP_1 都不相重合. 這樣繼續作下去，在已作過的平面外任意取一個點，過 AB 和這個點都可以作一個平面，並且所作的這個平面同着已經作出的任何平面都不相重合. 所有這些平面我們可看作是由一個平面(ABP)繞着一條直綫(AB)旋轉的不同的位置. 由此我們得到平面的另外一個性質：平面可以繞着它上面的任意一條直綫旋轉. 我們也可以知道：過空間的任意一條直綫可以作無數的平面.

習 題 一

1. 我國的木工常用曲尺的一邊靠緊木板或枋子的面移動來觀察它們是否平滑，這是什麽理由？

2. 三個點的位置怎樣，則經過它們可作的平面不止一個？

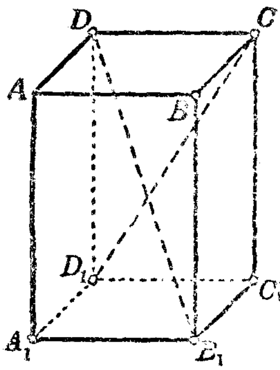
3. 空間有四個點，它們中的任何三點都不在一條直綫上，那末可決定幾個平面？

4. 和兩條平行綫相交的直綫是不是在它們所決定的平面內？

5. 在右圖所表示的長方體中：

(i) 直綫 D_1C 和 DB_1 能不能相交？ BB_1 和 D_1C 呢？

(ii) 過下列各組直綫能不能作一個平面： AD, B_1C_1; DC, DB_1; BC, AA_1?



(習題 5)

6. 一個立方體的邊長為 a，過它相交於一個頂點的三條邊的另一端作一個截面，求這個截面的面積.

7. 習題 5 的圖中，AD, AB, AA_1 的長分別為 $3cm$, $4cm$, $7cm$，過這長方體相交於一個頂點的三邊的另一端作一個截面，求這個截面的面積.

8. 一個直三稜柱，底面為邊長等於 a 的正三角形，高為 b，過它的下底面的一邊和這邊所對上底的頂點作一個截面，求這個截面的面積.

5. 空間作圖 在平面幾何學中所有的作圖，我們都是利用製圖的工具，如直尺，兩脚規等進行的；但要用這些工具在空間作圖却不可能．因為我們不可能在空間畫出圖形來．空間作圖比起平面作圖來，除了點和綫兩個元素還增加了一個元素，面．因而空間作圖，就不像在平面上作圖那樣，只須用點和綫那樣簡單的方法能夠作到。

因了這個緣故，進行空間作圖，首先必須正確地確定出空間作圖的條件，特別須確定作平面的條件．對於空間作圖，我們作下面所舉出的幾項假定.

1. 若已經知道決定平面在空間的條件，則這個平面可以作圖．決定平面在空間位置的條件有三種：

(1) 過不在一直綫上的三個點;

(2) 過一直綫和這直綫外的一個點;

(3) 過相交的兩條直綫;

(4) 過互相平行的兩條直綫.

2. 若已經知道兩個面相交,就知道這兩個面的交綫.

3. 若已經知道空間的一個平面,我們就可以在這個平面上完成平面幾何中的一切作圖.

在空間的一切作圖,都是將有限個基本作圖結合在一起的表現. 應用這些基本作圖,我們就可以解決比較複雜的作圖題.

[例題] 求已知直綫 a 和已知平面 P 的交點.

[解] 在平面 P 上任意取一點 A,過 A 點和直綫 a 作平面 Q, 設這個平面和平面 P 的交綫爲直綫 b (爲什麼 Q 和 P 一定相交?), 則在平面 Q 上直綫 a 和直綫 b 的交點 C, 就是所求的點. 若直綫 a 和平面 P 平行則本題不能作. (關於一條直綫和一個平面平行的規定見第 7 節.)

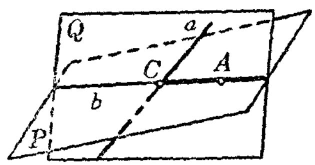


圖 3

II 平行直綫和平行平面

6. 異面直綫 在一個平面上的兩條直綫,它們的相互關係只有兩種,或相交或平行. 在空間中,兩條直綫的相互關係還可能有第三種情況,就是既不相交也不平行. 如左圖中的直綫 DE 在平面 P 上,而直綫 AB 和平面 P 的交點 C 在直綫 DE 外,則過這兩條直綫 AB 和 DE 就不能作一個平面. 因爲,假若可以作出這樣的平面,那就是過直綫 DE 和 DE 外的一點可以作兩個平面,其中的一個是和直綫 AB 只有一個

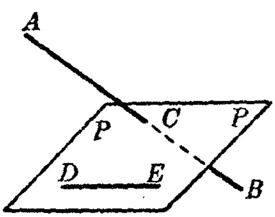


圖 4

交點 C 的平面 P，而另一個是含有直綫 AB 的平面，這是不可能的．這也就是說，AB 和 DE 這兩條直綫，不在同一個平面上，無論怎樣將它們延長，它們也不會相交但也不互相平行，因為它們無論是相交或平行都必在同一個平面上．

不在同一個平面上的兩條直綫叫做**異面直綫**．

7. 定義　若一個平面和不在這平面上的一條直綫，無論怎樣延長也不相交，我們說**這條直綫和這個平面互相平行**．

8. 定理　若一條直綫和一個平面上的一條直綫平行，則這條直綫和這個平面也平行．

設直綫 AB 平行於平面 MN 上的一條直綫 CD．作過 AB 和 CD 兩

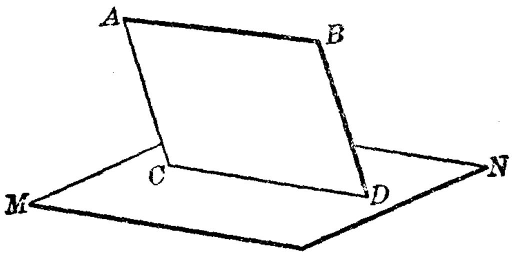


圖　5

條直綫的平面 AD．假定直綫 AB 和平面 MN 不平行，則必有一個交點．這個交點既在平面 AD 上，又在平面 MN 上，因而必在這兩個平面的交綫 CD 上．也就是 AB 和 CD 兩條直綫相交而不平行，這和假設相矛盾．所以直綫 AB 和平面 MN 必相平行．

9. 定理　若一個平面（AD 圖 5）過平行於另一個平面的直綫（AB）並且和這個平面相交，則這兩個平面的交綫（CD）和這條直綫平行．

因為 AB 和 CD 這兩條直綫在同一個平面 AD 上，並且它們不能相交；不然，則直綫 AB 和平面 MN 必相交，這和假設矛盾．

系 1.　若一條直綫（AB）同時平行於相交的兩個平面（P 和 Q），則這條直綫必平行於這兩個平面的交綫（CD）．

過直綫 CD 上的一個點 M 和直綫 AB 作一個平面，則這個平面必經過和平面 P, Q 相交於 M 點並且平行於 AB 的直綫．但過 M 點只能作一條直綫和 AB 平行，也就是所作的平面同着兩個平面 P 和 Q 的交綫必須是同一條直綫，即這條直綫同時在平面 P 和 Q 上，也就和平面 P 和 Q 的交綫重合．所以 $AB \parallel CD$．

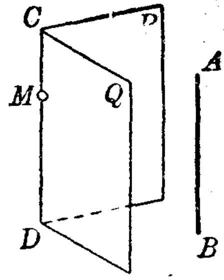


圖 6

系2. 若兩條直綫同時平行於第三條直綫，則這兩條直綫互相平行．

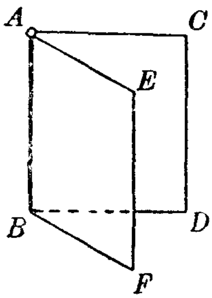


圖 7

設兩條直綫 AB 和 EF 都平行於直綫 CD．過平行綫 AB 和 CD 作平面 AD．因 $EF \parallel CD$，所以平面 AD 也就平行於 EF．

又過直綫 EF 和直綫 AB 上的任意一點 A 作平面 AF．因 $CD \parallel EF$，所以平面 AF 也就平行於 CD．也就是平面 AF 必和平面 AD 相交，而它們的交綫必通過 A 點並且平行於 EF．但在平面 AD 上，過 A 點只能有一條直綫和 CD 平行，這就是直綫 AB．所以 AB 就是平面 AD 和平面 AF 的交綫，而 $AB \parallel EF$．

10. 定義 無論怎樣擴展都不相交的兩個平面，叫做平行平面．

11. 定理 若一個平面上的兩條相交直綫對應平行於另一個平面上的相交兩條直綫，則這兩個平面互相平行．

［假設］ AC, AD 爲平面 MN 上的兩條相交直綫，BE, BF 爲平面

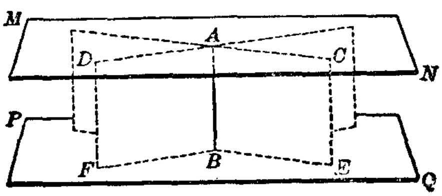


圖 8

PQ 上的兩條相交直綫，並且 $AC \parallel BE$，$AD \parallel BF$.

［終結］ $MN \parallel PQ$.

［証明］ 若平面 MN 和 PQ 不平行，則它們必相交；設它們的交綫爲 HK，而

$$AC \parallel HK \text{ 和 } AD \parallel HK.$$

這就是說，在平面 MN 上過 A 點有兩條直綫 AC，AD 都平行於直綫 HK 這是不可能的，也就是平面 MN 和 PQ 不會相交.

12. 定理 若兩個平行平面和第三個平面相交，則它們的交綫互相平行.

［假設］ MN 和 PQ 爲互相平行的兩個平面，它們和第三個平面 RS 的交綫分別爲 AB 和 CD.

［終結］ $AB \parallel CD$.

［証明］ 因爲 AB 和 CD 同在平面 RS 上，若它們不平行則必相交於一點；而這個點既在 AB 上就必在平面 MN 上.（爲什麼？）同樣的，它也必在平面 PQ 上. 也就是它是兩個平面 MN 和 PQ 的公共點. 但依假設平面 MN 平行於平面 PQ，它們不能有任何公共的點.

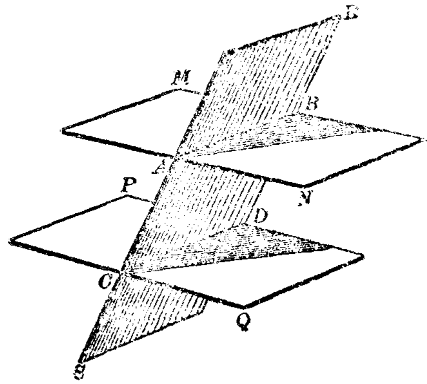


圖 9

$$\therefore \qquad AB \parallel CD.$$

系 兩個平行平面所夾的平行綫段相等.

如圖 9，設 AC 和 BD 爲兩個平行平面 MN 和 PQ 所夾的平行綫段，過 AC 和 BD 作平面 AD，則 AD 同着兩個平面 MN 和 PQ 的兩條交綫 $AB \parallel CD$，因而 $ACDB$ 是一個平行四邊形，所以 $AC = BD$.

13. 定理 若兩條直綫被三個平行平面所截，則它們的對應綫段成比例.

［假設］ 直綫 AB 和 CD 被平行平面 MN、PQ 和 RS 分別截於 A，

E, B 和 C, F, D 各點.

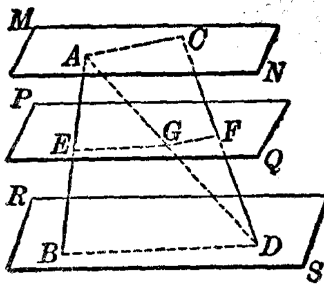


圖 10

［終結］ $AE:EB=CF:FD$.

［証明］ 作直綫 AD 交平面 PQ 於 G. 過 AB 和 AD 作平面分別交平面 RS 和 PQ 於 BD 和 EG, 並且過 AD 和 CD 作平面分別交平面 MN 和 PQ 於 AC 和 GF.

則 $\qquad EG \parallel BD$ 和 $GF \parallel AC$. (爲什麼?)

$\therefore \qquad AE:EB=AG:GD$

和 $\qquad CF:FD=AG:GD$.

$\therefore \qquad AE:EB=CF:FD$.

［討論］ 本定理和平面幾何中的什麼定理相當? 試把它推到更一般些. 在平面幾何中的証明爲什麼不能直接應用到這裏來?

14. 定理 不在同一個平面上的兩個角,若它們的兩邊分別互相平行,並且在它們頂點的連結綫的同傍,則這兩個角相等,而它們所決定的平面互相平行.

［假設］ $\angle CAD$ 和 $\angle C'A'D'$ 分別在平面 MN 和 PQ 上,並且在 AA' 的同傍,而 $AC \parallel A'C'$ 和 $AD \parallel A'D'$.

［終結］ $\angle CAD=\angle C'A'D'$ 和 $MN \parallel PQ$.

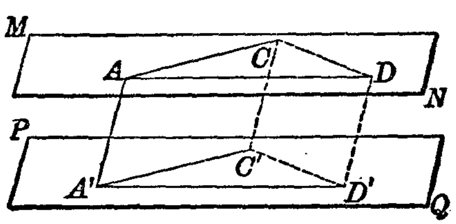


圖 11

［証明］ 取 $AC=A'C'$ 和 $AD=A'D'$, 連結 DD', CC', CD 和 $C'D'$.

$\because \qquad AD \underline{\parallel} A'D'$, $\therefore$ $AA' \underline{\parallel} DD'$. (爲什麼?)

同樣, $\qquad AA' \underline{\parallel} CC'$.

$\therefore \qquad DD' \underline{\parallel} CC'.$

$\therefore \qquad CD = C'D'.$

$\therefore \qquad \triangle CAD \cong \triangle C'A'D'. \qquad (s.s.s.)$

$\therefore \qquad \angle CAD = \angle C'A'D'$

又平面 MN 平行於直綫 $A'C'$ 和 $A'D'$ （爲什麼?）

$\therefore \qquad MN \parallel PQ.$ （爲什麼?）

［討論］ 平面幾何中和本定理相當的定理怎樣? 兩個的証明方法有什麼不同? 爲什麼?

習 題 二

1. 一條直綫平行於已知的一個平面，則經過這條直綫的一切平面和已知平面的交綫都互相平行.

2. 一條直綫平行於已知的一個平面，則過這平面上任何一點平行於這條直綫的直綫都在這個平面上.

3. 平行於同一個平面的兩個平面互相平行.

4. 過一點平行於一個已知平面的一切直綫，在過這點而平行於這個已知平面的平面上.

5. 兩個平面各經過已知兩條互相平行的直綫中的一條，若它們不平行，則它們的交綫平行於已知的兩條直綫.

6. 一條直綫 a 平行於平面 MN 上的一條直綫 b，則經過直綫 a 的一切平面中必有一個平面和平面 MN 的交綫和直綫 b 重合.

7. a 和 b 爲兩條異面直綫，則過 a 平行於 b 的平面同着過 b 平行於 a 的平面，互相平行.

15. 作圖 過空間一條直綫(a)外的一個點(A)，作一條直綫平行於已知直綫(a).

［解］ 過直綫 a 和 A 點作平面 M. 在平面 M 上過 A 點作直綫 b 平行於直綫 a，則直綫 b 就是所求作的直綫.

這個題只有一個解，因爲過直綫 a 和 a 以外的一點 A 只能作一個平面 M，而在平面 M 上過直綫 a 以外的一點 A 也只能作一條直綫和 a 平行.

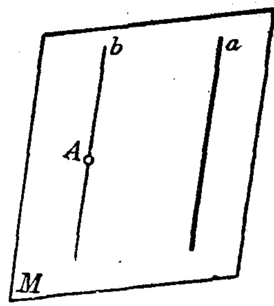


圖 12

16. 作圖 過已知平面外的一點，作一個平面平行於這已知的平面.

[假設] A 爲平面 P 外的一點.

[求作] 過 A 作一個平面平行於 P.

[解析] 設 Q 就是所求作的平面. 在平面 Q 上過 A 任意作兩條直綫 AC_1 和 AD_1. 在平面 P 上任意取一個點 B. 過 AC_1 和 B 作平面 M 交平面 P 於 BC，則 $AC_1 /\!/ BC$. 又過 AD_1 和 B 作平面 N 交平面 P 於 BD，則 $AD_1 /\!/ BD$. 由這些關係得出下面的作法.

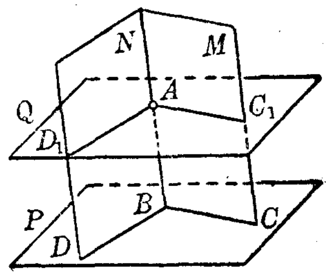


圖 13

[作法]

1. 在平面 P 上任意取一點 B，並且任意作兩條直綫 BC 和 BD.

2. 過直綫 BC 和 A 點以及過直綫 BD 和 A 點分別作平面 M 和 N.

3. 在平面 M 和 N 上分別作直綫 $AC_1 /\!/ BC$ 和 $AD_1 /\!/ BD$.

4. 過直綫 AC_1 和 AD_1 作平面 Q，這就是所求作的平面.

[証明] 讀者試自行補足.

[討論] 本題只有一解，就是過已知平面外一點只能作一個平面和已知平面平行. 爲什麼?

17. 作圖 過已知直綫(a)作一個平面平行於另一條已知直綫(b).

[解] 本題可分兩種情況:

1. 已知的直綫 a 和 b 不平行. 在直綫 a 上任意取一點 A，作直綫 b_1 平行於直綫 b. 過直綫 a 和 b_1 作一個平面，這就是所求作的平面. 在這

種情況下，只有一個解.

2. 已知的直綫 a 和 b 平行．在這種情況下，解是不定的，因為所有經過直綫 a 的平面都平行於直綫 b.

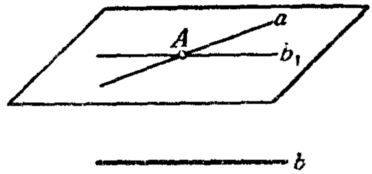


圖 14

18. 較複雜的作圖　已知兩條異面直綫 a 和 b 以及 a 和 b 外的一個點 C，過 C 作一條直綫和這已知的這兩條直綫相交.

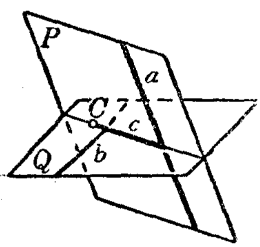


圖 15

［解析］　假定直綫 c 就是所求作的直綫，則 a 和 c 兩條直綫決定一個平面 P，而 b 和 c 兩條直綫決定另一個平面 Q. 但 P 和 Q 這兩個平面有一個公共點 C，所以它們必相交，並且它們的交綫就是直綫 c. 由此得下面的作法.

［作法］

1. 過已知直綫 a 和已知點 C 作一個平面 P.

2. 過已知直綫 b 和已知點 C 作一個平面 Q.

平面 P 和 Q 的交綫 c 就是所求作的直綫.

［証明］　讀者試自行補足.

［討論］　若 $a \parallel c$，則過直綫 b 和 C 點的平面 Q 平行於直綫 a. 所以沒有解. 同理，若 $b \parallel c$ 也沒有解.

習題三

1. 過一個已知點作一個平面平行於已知的兩條直綫.

2. 過一個已知點作一條直綫平行於一個已知的平面，並且和這平面外已知的一條直綫相交.

3. 作一條直綫和已知的兩條直綫相交，而平行於已知的第三條直綫.

4. 作一條直綫和已知的兩條直綫相交，並且平行於已知的一個平面（作圖不定）.

5. 作一條直綫和已知的三條直綫相交（作圖不定）.

6. 已知一個平面和一條直綫平行，過這平面上的一個點在這平面上作一條直綫，和已知的直綫平行。

III　平面的垂綫和斜綫

19. 定義　從平面外的一點所作直綫和這個平面的交點，叫做這條直綫在這個平面上的足。

一條直綫若垂直於一個平面上過它的足的一切直綫，就叫做這個平面的**垂綫**。由下節的定理可以知道這樣的直綫是存在的。垂綫在這平面上的足叫做**垂足**。我們說，這條直綫垂直於這個平面，也可以說，這個平面垂直於這條直綫。

20. 定理　若一直綫和一個平面相交，同時垂直於這平面上過它的足的兩條直綫；則這條直綫垂直於過這個足的一切直綫，也就是垂直於這個平面。

［假設］　直綫 AO 在平面 MN 上的 O 點垂直於直綫 OP 和 OR。

［終結］　AO 垂直於平面 MN 上的任意一條直綫 OQ；AO 也就垂直於平面 MN。

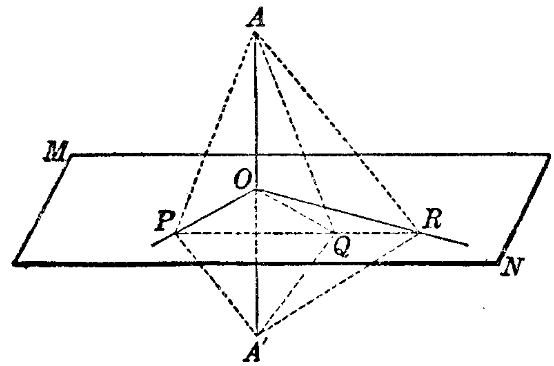


圖 16

［證明］　引長 AO 到 A' 並且使 $A'O=AO$。連結 AP、AQ, AR, $A'P$, $A'Q$ 和 $A'R$。

則 OP 和 OR 都是 AA' 的垂直平分綫。

$\therefore$　　$AP=A'P$ 和 $AR=A'R$。　　（爲什麼？）