高等学校经济管理类及相关学科数学教材

经济数学基础及应用

——一元、多元函数微积分及应用

赵萍 编著

哈尔滨工业大学出版社

高等学校经济管理类及相关学科数学教材

经济数学基础及应用

——一元、多元函数微积分及应用

赵萍　编著

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 提 要

本书共分三部分，第一部分为一元函数微积分，包括变量与函数、极限与连续、导数与微分及其应用、不定积分、定积分及应用；第二部分为多元函数微积分，包括多元函数微分学、多元函数积分学；第三部分为微积分(包括一元、多元)在经济中的应用。每章均配有类型广、难度较大的综合范例，且各章后还配有适量的习题。

本书编写内容精练、重点突出、通俗易懂，既可作为高等学校经济类、管理类本专科及相关学科的基础课教材，又可供经济类、管理类复习考研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础及应用．一元、多元函数微积分及应用/赵萍编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003.1

ISBN 7-5603-1806-1

Ⅰ．经… Ⅱ．赵… Ⅲ．①经济数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 089948 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真 0451-6414749
印　　刷 地矿部黑龙江测绘印制中心印刷厂
开　　本 787×960　1/16　印张 19.5　字数 378 千字
版　　次 2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-1806-1/O·140
印　　数 1～3 000
定　　价 23.80 元

前　言

随着教育改革的不断深入，素质教育已受到教育界的普遍重视。本书是为适应新世纪高等学校经济类、管理类以及相关学科学生基本文化素质教育的需要编写的“经济数学”基础教材。书中融入了作者近几年讲授经济数学课程的体会，并在编写过程中重点考虑了以下几方面的问题：

第一，考虑到经济数学是经济类、管理类专业本科生的一门必修基础课。按照教学大纲的要求，本书比较完整、系统地介绍了一元、多元函数微积分的基础知识。其主要目的是使学生打好基础，培养学生比较熟练的运算能力、抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力。

第二，考虑到“理论是基础，应用是关键”的教学原则，本书在强调理论基础的同时，注重培养学生综合运用所学知识、分析解决实际问题的能力。

第三，考虑到经济类、管理类学生的数学基础相对较弱，本书的内容从理论到应用，始终贯彻循序渐进、深入浅出、通俗易懂的指导思想。

第四，对于难点、重点概念，如极限、复合偏导数的理论，引进了“示意图”等，帮助同学加深理解变量之间的关系。

第五，为建立扎实的理论基础，对每章的计算方法和技巧都进行了归纳总结。为扩展类型，适当拔高，在每章后选入了相当数量的范例，以帮助学生扩展视野。

第六，为理论联系实际，在第九章应用部分选入了较多具有实际应用价值的例题，使学生真正体会到数学在现实生活、工作当中的应用价值，从而激发学生学习数学的兴趣，提高实际应用能力。

在本书编写过程中所参考的文献均列于书后，在此向各参考文献的作者表示衷心的感谢。同时对哈尔滨工业大学人文与社会科学学院、系、教研室领导和同志们给予的支持和帮助表示感谢。

需要特别指出的是，虽然作者编写时注重在体现数学之系统性、规范性的同时，尽力突出其实用性，并力求简洁而清楚，但由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有不足之处，恳请读者提出宝贵意见。

编者

2002 年 10 月

于哈尔滨工业大学

目　　录

第一章　变量与函数

1.1　量的概念

凡是可以度量的对象统称为量，度量的结果就得到数。例如，长度(m，cm)、质量(g，t)、速度(m/h)。量是具体的，数是抽象的。

量分为两大类：

常量 —— 在研究问题的整个过程中，取固定值的量称之为常量。常用 a，b，c，… 表示。

变量 —— 在研究问题的整个过程中，取不同值的量称之为变量。一般用 u，v，w，x，y，… 表示。

【例】　教室人数。

(1) 教室里可容纳的人数：30 人、50 人等，是常量。

(2) 今天教室里的人数：5:00 点 2 人；8:00 点 50 人；14:00 点 10 人，是变量。

常量与变量的区分不是绝对的，如果条件变了，常量可能转化为变量，变量也可能转化为常量。

1.2　实数与数轴

实数是有理数与无理数的统称。

(1) 有理数是正负整数、正负分数及零的统称。

(2) 无理数是无限不循环小数的统称，如$\sqrt{2}$、π 等等。

数轴是规定了原点、正方向及长度单位的直线，如图 1.1 所示。

实数与数轴上的点有一一对应关系，即实数 $\leftrightarrow$ 数轴。有理点在数轴上是处处稠密的，但有理点尚未充满数轴，空隙点称为无理点，如$\sqrt{2}$、π、$\sqrt{2}+1$ 等等。实数充满数轴而且没有空隙，这就是实数的连续性。因此每一个实数必是数轴上某一个点的坐标。反之，数轴上每一点的坐标必是一个实数。这就是一一对应关系。

全体实数所构成的集合称为实数集，记为 **R**。今后我们所研究的数都是实数。

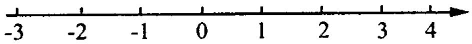

图 1.1

1.3 数集与区间

【定义 1.1】 具有某种属性的事物的全体称为集合。如：

① 现在这个教室的学生；② 这个班的男同学；③ 这屋里的桌子；④ 全体自然数，等等。

"集合"的含义很广，不一定是指数。但集合必须要有明确的准则。如"高个子的人"不能组成集合，提法不明确。而"1.8 m 以上的人"就可以组成集合。

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示集合，而把组成某一集合的那些对象，叫做这个集合的元素，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示。如果集合的元素是数，则这一集合叫做数集。只有一个元素的集合称为单元素集；不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$；由有限个元素构成的集合，称为有限集合；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合。

如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a \in A$，读作 a 属于 A，或 a 在 A 中。

如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \overline{\in} A$，读作 a 不属于 A，或 a 不在 A 中。

例如，如果 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，则 $\frac{3}{5} \in \mathbf{Q}$，$\sqrt{2} \overline{\in} \mathbf{Q}$。

集合的表示法：

(1) 列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号｛ ｝括起来。

【例 1】 由 5、2、3、4 四个数组成的集合 A，可表示为

$$A = \{5,2,3,4\}$$

【例 2】 由 $x^2 + 4x - 21 = 0$ 的根所构成的集合 A，可表示为

$$A = \{3, -7\}$$

(2) 构造式法：设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为 $A = \{a \mid P(a)\}$。

【例 3】 A 为 $x^2 + 4x - 21 = 0$ 的根构成的集合，可表示为

$$A = \{x \mid x^2 + 4x - 21 = 0\}$$

【例 4】 A 是全体奇数的集合，可表示为

$$A = \{x \mid x = 2n - 1\}$$

n 为自然数。

$$
\text{变量的取值范围}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{有理数}\\ \vdots\\ \vdots\\ \text{两个实数之间的一切实数}\end{cases}
$$

变量的取值范围作为数集，它可以是各式各样的，例如，有的变量只取正整数，有的变量只取有理数，有的变量可以取某两个实数之间的一切实数等，这后一种情况是我们今后经常遇见的。下面介绍这种数集（又称为区间）。

区间：设 a、b 为两个常数，且 $a < b$。

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间。记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a < x < b\}$，如图 1.2 所示。

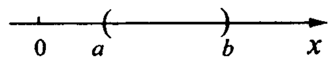

图 1.2

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间。记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，如图 1.3 所示。

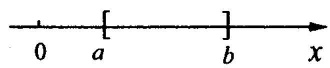

图 1.3

(3) 满足不等式 $a < x \leqslant b$（或 $a \leqslant x < b$）的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的半开区间（或半闭区间），即 $(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 或 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$。

以上三类区间为有限区间，a、b 为区间的端点，$b-a$ 为区间长度。

还有无限区间

$$
\begin{aligned}
(a,+\infty) &= \{x \mid a < x\}\\
[a,+\infty) &= \{x \mid a \leqslant x\}\\
(-\infty,b) &= \{x \mid x < b\}\\
(-\infty,b] &= \{x \mid x \leqslant b\}
\end{aligned}
$$

注意　(1) 这里的 ∞ 并不是一个数，只是一个记号，正负表示方向。

(2) 为不致使开区间 (a,b) 与 xy 平面上点 (a,b) 的坐标记号相混，今后总在记号 (a,b) 前加上"区间"或"点"的字样加以区别。

引入了数集的概念后，对今后研究问题就方便多了。如对一些函数定义域的讨论，假如函数是连续的，定义域可用区间表示。如果是点函数，区间就不适用了。所以有了数集，对于连续的变量和独立的变量都可用数集来表示。

1.4 实数的绝对值与邻域

【定义 1.2】 一个实数的绝对值,记为 $|x|$,定义为

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

【例 1】 $|4| = 4,\ |-4| = -(-4) = 4$

$|x|$ 的几何意义:$|x|$ 表示数轴上的点 x 与原点的距离。

绝对值的运算有下列性质:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$

(2) $|x| \geqslant 0$

(3) $|-x| = |x|$

(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

因为 $x < 0$ 时,$-|x| = x < |x|$

$x > 0$ 时,$-|x| < x = |x|$

$x = 0$ 时,$-|x| = x = |x|$

所以 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(5) 如果 $a > 0$,则下面两个集合相等

$$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$$

如图 1.4 所示。

同理 $|x| > a$ 与不等式 $x > a, x < -a$ 等价,即

$$\{x \mid |x| > a\} = \{x \mid x > a \quad 或 \quad x < -a\}$$

如图 1.5 所示。

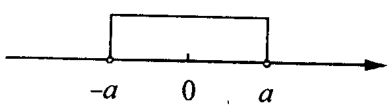

图 1.4

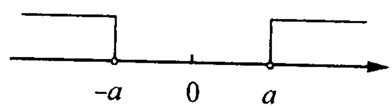

图 1.5

【例 2】 设 $|x - c| < a$,求 x 的变化区间。

由性质(5)可知

$$-a < x - c < a$$

从而有

$$c - a < x < a + c$$

即 x 在开区间 $(c - a, c + a)$ 上变化。

(6) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$

由性质(4)知

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$
$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

两式相加,得

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant (|x|+|y|)$$

再由性质(5)得

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$

还可推广为

$$|x+y+\cdots+z| \leqslant |x|+|y|+\cdots+|z|$$

(7) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$

由于 $$|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y|+|y|$$

所以 $$|x-y| \geqslant |x|-|y|$$

同理 $$|x-y| \geqslant |y|-|x| = -(|x|-|y|)$$

即 $$|x|-|y| \geqslant -|x-y|$$

所以 $$||x|-|y|| \leqslant |x-y|$$

(8) $|x \cdot y| = |x||y|$

推广 $$|x \cdot y \cdots z| = |x||y|\cdots|z|$$

(9) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$

由绝对值的定义可知,(8)、(9)显然成立。

【例3】 求下列各题 x 的变化区间。

(1) $|x-5| < 3$

【解】 $-3 < x-5 < 3, 2 < x < 8, x \in (2,8)$,如图1.6所示。

(2) $|x-5| > 3$

【解】 由性质(5)得

$$x-5 > 3$$

即 x 的变化区间为 $x > 8$ 或 $x \in (8, +\infty)$。

$$x-5 < -3$$

即 x 的变化区间为 $x < 2$ 或 $x \in (-\infty, 2)$,如图1.7所示。

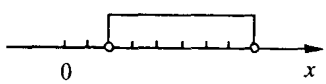

图1.6

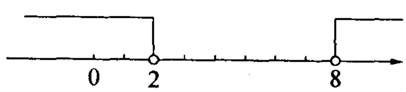

图1.7

(3) $(x-2)^2 \leqslant 4$

【解】 因为 $$(x-2)^2 \leqslant 4$$

即 $$|x-2| \leqslant 2$$

$$-2 \leqslant x-2 \leqslant 2 \quad 得 \quad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

如图 1.8 所示。

(4) $|x| > x$

【解】 因为 $$|x| > x$$

即 $$x > x \quad 或 \quad x < -x$$

前一种情况不可能,后一种情况为

$$-2x > 0$$

即 $x < 0(-\infty,0)$,如图 1.9 所示。

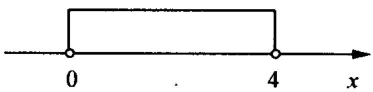

图 1.8

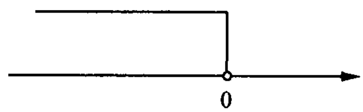

图 1.9

(5) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| > \dfrac{x}{x+1}$

【解】 $$\frac{x}{x+1} > \frac{x}{x+1} \quad 或 \quad \frac{x}{x+1} < -\frac{x}{x+1}$$

前一种情况不可能,后一种情况为

$$2\frac{x}{x+1} < 0$$

即 $$\frac{x}{x+1} < 0$$

有 $$\begin{cases} x < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

由前一组解得

$$-1 < x < 0 \quad 或 \quad x \in (-1,0)$$

后一组无解。

邻域:

以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域(也叫有心邻域)。如图 1.10 所示。

$$\{x \mid |x-x_0| < \delta, \delta > 0\} \Leftrightarrow \{x_0-\delta < x < x_0+\delta\}$$

如 $|x-5| < 3$,即以 5 为中心、长度为 3 的邻域,也就是开区间(2,8)。

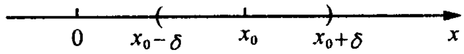

图 1.10

而 $0 < |x - x_0| < \delta$ 称为无心邻域。

$$|x - x_0| > 0$$

由性质得

$$\begin{array}{c} x - x_0 > 0 \\ -x + x_0 > 0 \end{array} \quad 得 \quad \begin{array}{c} x > x_0 \\ x < x_0 \end{array} \quad 即 \quad x \neq x_0$$

是指在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0，其余点组成的集合，即

$$x \in (x_0 - \delta, x_0), (x_0, x_0 + \delta)$$

邻域是特殊的区间，而且必须是开区间，因为我们今后经常要研究在一点附近的变化情况，所以引进了特殊区间 —— 邻域的概念。

1.5　函数的概念

前面已经讨论了变量的概念，并介绍了一些数学用语。下面我们将讨论另一个概念 —— 函数。

由于一切客观事物本来是互相联系和具有内部规律的，所以我们不仅要研究事物的某种特性在数量上的变化，而且更重要的是要研究引起它变化的原因及变化的规律，这种相互依赖关系及内部规律，就是将要讨论的函数关系。首先看两个例子。

【例 1】　计算圆面积的公式为

$$A = \pi r^2 \qquad r \in (0, +\infty)$$

这个公式表示了变量 A 与变量 r 之间的对应关系，对于每一个变量 $r \in (0, +\infty)$，通过公式计算总有一个完全确定的 A 值与之对应。

【例 2】　自由落体的运动规律为

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \qquad t \in [0, T]$$

若以 T 表示物体降落到地面所需的时间，则对于每一个变量 $t \in [0, T]$，通过公式计算总有一个完全确定的 S 值与之对应。

以上两个例子用不同的形式表现了两个变量之间的相互依赖关系，它们的共同点是其中一个变量变化引起另一变量随之变化，且当这个变量的值取定

时，另一变量应取的值也确定了。变量之间的这种关系称为函数关系，于是抽象出数学分析中的一个重要概念如下。

【定义1.3】 给定一数集 X，对任一 $x \in X$，变量 $y \in Y$ 均有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$。且 x 称为自变量，y 称为因变量，X 称为函数的定义域，Y 称为值域。如

$$y = x^2 \qquad x \in (-\infty, +\infty) \qquad y \in (0, +\infty)$$

如果对于自变量 x 所取的每一值，变量 y 均只有惟一确定的值与之对应，则称此函数为单值函数。否则称多值函数。

$$y = x^3 \quad (\text{单值}) \qquad y = \pm\sqrt{x} \quad (\text{双值})$$

下面对函数的定义再作几点说明：

一、关于函数的记号

为什么要引入函数记号，把函数式子写出来不就可以了吗？

因为有些函数的表达式不能写出，而且对函数的一般性质的研究也不必要，所以引进函数记号。但需注意，不同的函数要用不同的记号表示。如

$$S = \pi r^2 = f(r)$$
$$L = 2\pi r = g(r)$$

函数记号 $f(x)$ 并不是"f"乘"x"，而"$f(\ )$"是表示变量 y 对于变量 x 的那个确定的依赖关系。

例如
$$y = f(x) = x^2 - 7$$
表示"自变量的平方减去7"。

而符号 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，则表示函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值。如

$$y|_{x=1} = f(1) = 1^2 - 7 = -6 \qquad y|_{x=a} = a^2 - 7$$

【例3】 若 $f(x) = x^2$，$\varphi(x) = \sin x$，那么

$$f(2) = 2^2 = 4 \qquad \varphi(a) = \sin a$$
$$f[\varphi(x)] = \sin^2 x$$
$$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$
$$\varphi[f(x)] = \sin x^2 \qquad f[f(x)] = (x^2)^2 = x^4$$
$$\varphi[\varphi(x)] = \sin(\sin x)$$

【例4】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 & 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$，求 $f(x-1)$。

【解】
$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)+2 & 0 \leqslant x-1 \leqslant 2 \\ (x-1)^2 & 2 < x-1 \leqslant 4 \end{cases}$$

即 $$f(x-1)=\begin{cases}x+1 & 1\leqslant x\leqslant 3\\(x-1)^2 & 3<x\leqslant 5\end{cases}$$

【例 5】 考察函数 $y=\sin x$ 和 $y=\dfrac{x\sin x}{x}$,试问,这两个函数是否为同一函数?

前者定义域为$(-\infty,+\infty)$,后者为$(-\infty,0),(0,+\infty)$。因此,这两个函数并非恒等。此例告诉我们,如果两个函数的定义域不一样,即使函数关系表达式是相同的,但两个函数也不是同一函数。

【例 6】 $y=x\sqrt{1-x}$ 与 $y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 的定义域均为$(-\infty,1]$,但其对应法则不同。当 $x<0$ 时,$y=x\sqrt{1-x}<0$,但 $y=\sqrt{x^2(1-x)}>0$,所以两函数不是相同的函数。

【例 7】 $y=3x^2+1$ 与 $S=3t^2+1$。

因定义域与对应法则相同,所以是同一函数。

二、关于函数的定义域

如果对于自变量的某一个已知数值,函数具有确定的对应值,那么就说自变量取该值时函数是有意义的。

定义域——使函数有意义的自变量一切数值的全体。

【例 8】 (1) 函数 $y=\sqrt{x^2-x-2}$ 的定义域应满足 $x^2-x-2\geqslant 0$,$(x-2)(x+1)\geqslant 0$,故定义域为$(-\infty,-1],[2,+\infty)$。

(2) $y=\log_a(x+5)$,必有 $x+5>0$,即 $x>-5$,定义域为$(-5,+\infty)$。

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$,必有 $x\neq\pm 1$,定义域为$(-\infty,-1),(-1,+1),(1,+\infty)$。

(4) $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,第一项 $x^2-1\geqslant 0$,即 $|x|\geqslant 1$,$x\geqslant 1$,$x\leqslant -1$;第二项 $x>0$。定义域应取两项的公共部分,所以定义域为$[1,+\infty)$,如图 1.11 所示。

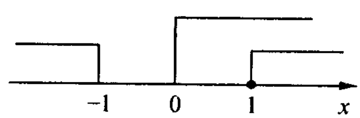

图 1.11

【例 9】 求函数 $f(x)=\ln(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域。

【解】 因为 $x-1>0$,且

$$x^2-1>0$$

由 $x-1>0$ 得

$$x>1$$

由 $x^2-1>0$ 得

$$x>1 \quad 或 \quad x<-1$$

取公共部分，定义域为 $(1,+\infty)$，如图 1.12 所示。

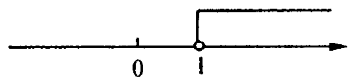

图 1.12

【例 10】 求分段函数的定义域

$$g(x)=\begin{cases} x+3 & 2<|x|\leqslant 4 \\ 2x^2+1 & |x|\leqslant 2 \end{cases}$$

由于分段函数的定义域是各段定义域的和，故 $g(x)$ 的定义域为 $[-4,-2)$，$(2,4]$，$[-2,2]$，即 $[-4,4]$，如图 1.13 所示。

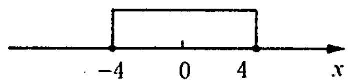

图 1.13

【例 11】 一块正方形铁皮，要做成一个无盖铁盒，将盒的体积函数列出来（边长 48 mm）。

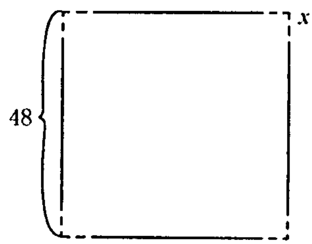

图 1.14

解 设盒的厚度为 x，则得体积函数

$$V=x(48-2x)^2$$

$x\in(-\infty,+\infty)$ 自然定义域

$x\in(0,24)$ 实际定义域

函数的定义域可以是各种各样的，但通过以上例子，可将函数定义域的求法概括为：

(1) 根据实际问题的意义确定实际定义域。

(2) 就变量本身分析确定自然定义域。

求自然定义域的原则：

① 分母不能为零。

② 负数不能开平方。

③ 负数、零不能取对数。

④ 由 n 项组成的函数，则取各项定义域的公共部分。

三、函数的表示法

1.公式法

函数关系是借助于数学算式（解析表达式）给出的，如

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad y=\pi r^2 \qquad f(x)=\sqrt{1+\sin x+x}$$

优点：便于计算和作理论分析，但有些函数并不一定都能用公式表示出来。

注意 用公式表示一个函数时，对于自变量的一切值，不一定非用一个公