高等學校教學用書

黎曼幾何與張量解析

下册

П. К. РАШЕВСКИЙ 著
俞 玉 森 譯

高等教育出版社

統一書号 13010·388
定价 ¥1.20

高等学校教学用書

黎曼幾何與張量解析

下　册

П. К. 洛蘇夫斯基著
俞　玉　森　譯
熊　一　奇　校

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的洛薛夫斯基（П. К. Рашевский）著"黎曼幾何與張量解析"（Риманова геометрия и тензорный анализ）1953年第一版譯出。原書可供數學物理系教學參考用。

本書中譯本分上下兩册出版。

下册內容包括：曲線坐標，流形，黎曼空間，仿射聯絡空間，絕對微分法，曲率張量和一般相對論的數學基礎。概念敘述得很清楚，系統很完整。適合數學，力學，物理各專業作爲教材或參考書之用。

黎曼几何与張量解析

下　册

П. К. 洛薛夫斯基著

俞玉森譯

高等教育出版社出版　北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

上海大東集成聯合印刷廠印刷　新华書店总經售

統一書号 13010·388　开本 850×1168 1/32　印張 10 13/16　字數 258,000　印數 1—3,200

1958年2月第1版　1958年2月上海第1次印刷　定价(8) ¥1.20

下 册 目 录

第五章　仿射空間及欧氏空間中的曲綫坐标

在此以前，我們只是采用仿射坐标来研究了 n 度仿射空間及欧氏空間，而仿射坐标是与这些空間的几何性質最自然地联系着的那种坐标。

在这一章中，我們將繼續研究这些空間，不过是用更一般的观点来研究的——采用任意的曲綫坐标。这对于这些空間本身的几何固然也有作用（例如对于空間内曲綫形狀的研究），但是，这一章的主要任务是为过渡到仿射联絡空間（仿射空間的推广）及黎曼空間（欧氏空間的推广）而作准备。

从这一章开始直到本書的末尾，我們將專門研究实的空間，并且在以后所遇見的所有变量以及个别的数，如果沒有相反的声明，都看作实数。

§75. 仿射空間中的曲綫坐标

設在 n 度仿射空間中有一仿射标架 $\mathfrak{R}(O,\ \mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$，每一点 M 的向徑 $\overrightarrow{OM}$ 可按标架向量展开成

$$\overrightarrow{OM}=x^i\mathbf{e}_i, \tag{75.1}$$

我們曾取 x^i 为点 M 的坐标。从一个仿射坐标系变到另一个仿射坐标系时，点坐标受到如下的綫性变換：

$$x^{i'}=A^{i'}_i x^i+A^{i'}, \tag{75.2}$$

其系数可任意地选擇，只要滿足下面一个条件：

$$\mathrm{Det}\,|A^{i'}_i|\neq 0。$$

这时，新的标架向量按旧的标架向量而展开成

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_i, \tag{75.3}$$

式中 $A_{i'}^{i}$ 与 $A_{i}^{i'}$ 是互逆的矩陣，而一个不变向量 $\mathbf{x}$ 的坐标所受到的变换为

$$x^{i'} = A_{i}^{i'}x^{i}。 \tag{75.4}$$

我們把坐标变换(75.2)来推广：將右边 x^i 的綫性函数代以滿足某些条件的“任意”函数，便可导入曲綫坐标。

設在仿射空間的某一个 n 度連通区域 Ω 中，給定了仿射坐标的 n 个連續可微的、單值函数 $f_k(x^1, \cdots, x^n)$ $(k=1, \cdots, n)$，利用方程

$$x^{i'} = f_i(x^1, \cdots, x^n)。 \tag{75.5}$$

我們导入新的变量 $x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}$。再对函数 f_i 加上一个要求使变换(75.5)成为可逆的，更准确地說，使从方程(75.5)倒过来可以把 x^i 單值地表成 $x^{i'}$ 在它們的整个变化区域 Ω' 中的連續可微的函数：

$$x^{i} = g_i(x^{1'}, \cdots, x^{n'})。 \tag{75.6}$$

在这种情形下的变量 $x^{i'}$ 叫做仿射空間区域 Ω 中的曲綫坐标。簡單地說，如果具有变化区域 Ω' 的变量 $x^{i'}$ 与区域 Ω 中的仿射坐标之間，由可逆的、双方單值的、連續可微的变換相联系着，則称 $x^{i'}$ 为区域 Ω 中的曲綫坐标。

因而，特别是区域 Ω' 中的各組值 $x^{1'}, \cdots, x^{n'}$ 就一一对应于区域 Ω 的各个点，这正是給以变量 $x^{i'}$ 坐标称号的理由。有时区域 Ω 也可能与整个空間相合，但是这对于我們并不是重要的，因为以后所研究的大部分是微分几何的性質，即是在一点的無限小鄰域內来研究，而这只需要在包含这点的某一区域 Ω 中有坐标系 $x^{i'}$。

我們順便明确一下在这里及以后所說的 n 度区域 Ω 的意义，它是指仿射空間的这样一个点集：如果点 M 屬于这个点集，則点

M 的某个鄰域也屬于这个点集,而点 M 的一个鄰域是指所有的点 M', 其仿射坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 与点 M 的对应坐标的差是充分小的(更准确地說, 差的模小于充分小的正数 δ)。因此以后我們所指的仅是开区域 Ω。

变量 $x^{1'}, \cdots, x^{n'}$ 的变化区域的概念可完全同样地来定义。仅仅是在这里所說的"点"必須理解为这些变量的数值 $x^{1'}=a^{1'}, \cdots, x^{n'}=a^{n'}$ 的集合。

此外,所謂区域我們总是指連通的区域,卽在这种区域內从一点可以連續地变到任意另一点(就是說,在区域 Ω 中,点是靠仿射坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 的連續变化而变动的;在区域 Ω' 中,点是靠变量 $x^{1'}, \cdots, x^{n'}$ 的連續变化而变动的)。

我們假定了函数 f_i, g_i 是連續可微的,就是說具有一直到某一阶数 N 的連續偏导数。在 §§ 75, 76 中只需要限制 $N=1$,而从 § 77 开始一直到这一章末,我們將假定 $N=2$。稍后需要 $N=3$ 以及更大的数。我們以后并不在每一种情形下特別預先声明这一点,簡單地由写出了的已知阶的导数这一事实就表明假定了这些导数的存在和連續。

必須指出,正和逆兩种变换的耶可比式均不为零:

$$\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right| \neq 0, \quad \operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0, \tag{75.7}$$

并且对应的矩陣是互逆的。这只要把 x^i 看作 $x^1, \cdots, x^n$ 的复合函数[因为根据(75.6) x^i 依賴于 $x^{1'}, \cdots, x^{n'}$, 而由(75.5) $x^{i'}$ 又依賴于 $x^1, \cdots, x^n$]便容易得出。这时 x^i 关于自变量 $x^1, \cdots, x^n$ 中每一个自变量的偏导数可以由下列已知的法則来計算:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \quad (\text{关于 } k' \text{ 作总和})。$$

然而,另一方面,当兩个自变量不同时,一个自变量关于另一自变量的导数为零;而当兩个自变量相同时,一个自变量关于另一自变

量的导数为一：

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j。$$

因而

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}=\delta^i_j, \tag{75.8}$$

就是說，矩陣 $\left\|\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right\|$ 与 $\left\|\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right\|$ 的积是一个單位矩陣。所以，这兩个矩陣是互逆的，因而是非奇异的。

注意，如果我們去掉 (75.6) 的可逆性的要求而代以耶可比式不为零的条件：

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|\neq 0, \tag{75.9}$$

我們的目的还是不能达到的。即使假定条件(75.9)在整个区域 Ω 中能滿足时，也只能保証在域中每一点的某一个鄰域中的單值可逆性，而不能保証在整个区域 Ω 中的單值可逆性。例如，設（三度情形下的）区域 Ω 具有脹大的字母 C 的形狀，并且在区域 Ω' 上的映射是把 Ω 沿垂直方向压挤，使得右边裂口消失，并使得从上面压下的一端进入由下面上升的一端，这样一个从 Ω 到 Ω' 的映射虽然总可以保証条件 (75.9) 及在微小部分的互相單值性，但是就整个对应的区域而言，便不是互相單值的映射了。

在同一区域 Ω 中，从一个曲綫坐标系 $x^{i'}$ 变到另一曲綫坐标系 $x^{i''}$ 所滿足的条件，与从仿射坐标 x^i 变到曲綫坐标 $x^{i'}$ 的条件一样。

实际上，根据我們的要求，$x^{i''}$ 是 x^i 的連續可微函数，而 x^i 又是 $x^{i'}$ 的連續可微函数，所以 $x^{i''}$ 是 $x^{i'}$ 的連續可微函数，反过来也是一样；又 $x^{i'}$ 的变化区域 Ω' 与 $x^{i''}$ 的变化区域 Ω'' 是互相單值对应的。

同样很明显，若（具有变化区域 Ω' 的）曲綫坐标 $x^{i'}$ 变到（具有变化区域 Ω'' 的）新的变量 $x^{i''}$ 是利用可逆的、双方連續可微的变

换，則 $x^{i''}$ 也可作为在同一区域 Ω 中的曲綫坐标。实則，变量 $x^{i''}$ 通过坐标 $x^{i'}$ 用可逆的、双方連續可微的变换而与仿射坐标 x^i 相联系着；这也就是說，$x^{i''}$ 为已知区域中的曲綫坐标。在所有这些叙述中的連續可微性所指的阶数是与曲綫坐标的定义中一样的。

在通常欧氏空間的情形中，曲綫坐标最簡的例子是柱面坐标和極坐标。注意，如果希望保証这种坐标和点的对应的互相單值性，那末应該考察的坐标不是在整个空間內，而是在从空間內除去一个以 Z 軸（卽通常的竪軸）为边的半平面，并且連 Z 軸也一并除去而得的区域 Ω 內。

公式 (75.1) 中的 x^i 用 $x^{i'}$ 来表达，我們便得到点 M 的向徑和曲綫坐标的依从关系：

$$\overrightarrow{OM}=g_1(x^{1'},\cdots,x^{n'})\mathbf{e}_1+\cdots+g_n(x^{1'},\cdots,x^{n'})\mathbf{e}_n。\quad (75.10)$$

簡單地記 $\overrightarrow{OM}$ 为 $\mathbf{x}$，可写为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(x^{1'},\cdots,x^{n'})。\quad (75.11)$$

再根据 §65，由于函数 g_i 的連續可微性，这个向量函数連續可微的次数是和 g_i 一样的。誠然，在 §65 中我們是关于一个自变量来微分向量，并且只微分一次，但是所有的討論对于任何阶的偏导数可以逐字地重复作出来。再指出，所有的偏导数 $\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^{1'}},\cdots,\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^{n'}}$，在每一点都是綫性無关的向量。实則，將(75.10)关于 $x^{i'}$ 微分，得：

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_1+\frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_2+\cdots+\frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\mathbf{e}_n\quad (i'=1',2',\cdots,n')。\quad (75.12)$$

系数的矩陣 $\left\|\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right\|$ 是非奇异的，因而 $\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^{i'}}$ 是綫性無关的。

§ 76. 曲綫坐标中的張量

我們来研究仿射空間区域 Ω，取曲綫坐标 x^i（現在記这些坐

标并不帶撇号)。区域 Ω 中从定点 O 到任意一点 M 的向徑 $\mathbf{x}$，根据(75.11)，以函数

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(x^1, \cdots, x^n) \tag{76.1}$$

来表示，它是足够次数的連續可微的函数(在这一节只需要一次)。在以后我們假定所考慮的一切点都屬于区域 Ω。

要很好的理解已給坐标系的結構，坐标曲綫是十分有用的。坐标曲綫是这样的曲綫：沿曲綫上只有一个坐标 x^i 在变化而其余的坐标保持常数。例如坐标曲綫 x^1，就是 $x^2, \cdots, x^n$ 固定为常数，于是 (76.1) 的向徑 $\mathbf{x}$ 成为一个变量 x^1 的函数；我們得到以 x^1 为参数的曲綫。

通过每一点 M，有一条而且只有一条坐标曲綫 x^1，沿着它，$x^2, \cdots, x^n$ 固定，且取在点 M 的値。偏导数 $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^1}$ 是坐标曲綫 x^1 的切向量(§65)。以上所說的一切对于任何坐标曲綫都能成立；所以通过每一点 M，有 n 条具切向量 $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}$ 的坐标曲綫。这些向量我們簡記作

$$\mathbf{x}_i=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}。 \tag{76.2}$$

我們知道，这 n 个向量总是綫性無关的，因而在每一点 M 可以取这些向量为仿射标架向量 $\{M, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$。这样一来，在区域 Ω 中給定了曲綫坐标就在每一点 M 引出一个完全确定的仿射标架 $\{M, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$，这个仿射标架我們叫做点 M 的局部标架。

当我們取仿射坐标作为曲綫坐标的特殊情形时，则函数(76.1)便具有以前(75.1)的形式

$$\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i, \quad 所以 \quad \mathbf{x}_i=\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}=\mathbf{e}_i, \tag{76.3}$$

因而在每一点 M 的局部标架所具有的向量，与建立已知仿射坐标系的基本标架向量完全相同。

研究局部标架是有深刻的根据的。讓我們回想一下点的仿射坐标所具有的那些簡單的性質：在点 $M(x^i)$ 变到点 $L(y^i)$ 的变动下，坐标的增量即是位移向量 $\overrightarrow{ML}$ 的坐标：

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=(y^i-x^i)\mathbf{e}_i,$$

这是由于 $\overrightarrow{OM}=x^i\mathbf{e}_i$，$\overrightarrow{OL}=y^i\mathbf{e}_i$（說到向量的坐标，总是指它的仿射坐标而言；对于向量并不引用曲綫坐标）。点的仿射坐标的实質，可以說就在这里。曲綫坐标 x^i 就沒有这些簡單的性質。但是，如果我們在已知点 M 的一个無限小鄰域內来研究曲綫坐标，我們仍然可以找到这些性質。

在一点 $M(x^i)$ 移到一个無限接近的点 $L(x^i+\Delta x^i)$ 时，我們得到位移向量 $\overrightarrow{ML}$，它是点 M 的向徑 $\mathbf{x}$ 的增量：

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\mathbf{x}(x^i+\Delta x^i)-\mathbf{x}(x^i)。$$

忽略去高阶無限小，以全微分代替增量，于是得：

$$\overrightarrow{ML}\approx\mathbf{x}_1\Delta x^1+\cdots+\mathbf{x}_n\Delta x^n。\tag{76.4}$$

这就是說，在局部标架 $\{M,\ \mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_n\}$ 中，位移向量 $\overrightarrow{ML}$ 具有的坐标，近似地等于 Δx^i。

因此，对点 M 的無限小位移，曲綫坐标的增量 Δx^i 仍然表示位移向量 $\overrightarrow{ML}$ 的坐标，如果这向量的坐标是在点 M 的局部标架中計算的，并且是略去了高阶無限小的。

这样一来，借助于局部标架，曲綫坐标便又有了仿射坐标的性質，誠然，現在仅仅是限于在已知点的一个無限小鄰域內。

也可以說，在点 M 的無限小鄰域內，曲綫坐标的增量 Δx^i，和关于点 M 的局部标架之仿射坐标，在一阶無限小的精确度內，完全相同。

自然，我們在曲綫坐标中来研究仿射空間的几何，时常会遇見局部标架。

現在来說明，当曲綫坐标受到变換

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \cdots, x^n) \tag{76.5}$$

时，局部标架所發生的变化，假定这个变换是單值可逆的，并且是双方連續可微的(§ 75)。反过来表成

$$x^i = x^i(x^{1'}, \cdots, x^{n'}), \tag{76.6}$$

就可以把方程(76.1)中的向徑 $\mathbf{x}$ 看作 $x^{i'}$ 的复合函数。于是，关于 $x^{i'}$ 的偏導数可以按大家所知道的公式表达如下：

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}。$$

当然，等式右边是关于 i 作总和的。注意，我們并不限制运用通常的微分公式于包含有向量的式子上，因为这些公式的正确性是很明显的：只需要把向量的微分化为它們的坐标的微分(§ 65)。

最后得：

$$\mathbf{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{x}_i。 \tag{76.7}$$

因此，曲綫坐标的变换在每一点 M 引起了局部标架的变换，同时，新局部标架的向量按旧标架的向量展开时的系数为 $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$；$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0$。把(76.7)和以前的仿射标架变换的記法

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i$$

相比較，我們看到，前者是后者的个別情形，这时

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{76.8}$$

而以 $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i'}$ 当作 $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{i'}$。

現在来研究任意一个張量場，例如 $V^i_{jk}(M)$ (§ 38)。点 M 这时是历过整个区域 Ω，或是仅仅历过其中某一曲面，甚至某一曲綫，要依張量場是在何处給定而决定。

張量 V^i_{jk} 的坐标，可以关于任一仿射标架来計算。但是，以后我們总是認为仿射空間(至少，在区域 Ω 的范圍內)取任意的曲綫

坐标 x^i。因而在每一点 M 产生一个局部标架，于是我們就关于这个标架来取張量 $V^i_{jk}(M)$ 的坐标。这些坐标我們簡單地叫做張量 $V^i_{jk}(M)$ 在已知曲綫坐标系 x^i 中的坐标。

以后，我們凡是說到張量場

$$V^i_{jk}(M)=V^i_{jk}(x^1,\cdots,x^n) \tag{76.9}$$

时，总是指上述的意义。

若張量不是在整个区域 Ω 中給定的，而仅是在某一曲面（或曲綫）上給定的，則在方程(76.9)中的 V^i_{jk} 当然必須定作这一曲面（或曲綫）的参数的函数。張量場也可以退化为在單独一点 M 的張量 V^i_{jk}。

随着曲綫坐标的变換，在每一点 M 产生局部标架的变換，因而張量 $V^i_{jk}(M)$ 的坐标变換应按照通常張量的規律：

$$V^{i'}_{j'k'}(M)=A^{i'}_iA^j_{j'}A^k_{k'}V^i_{jk}(M)。 \tag{76.10}$$

同时，我們看到，矩陣 $A^i_{i'}$ 和矩陣 $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ 相同，因而逆矩陣 $A^{i'}_i$ 和矩陣 $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ 相同：

$$A^{i'}_i=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}。 \tag{76.11}$$

于是，变換規律(76.10)具有形式

$$V^{i'}_{j'k'}(M)=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)V^i_{jk}(M)。 \tag{76.12}$$

这样一来，从一曲綫坐标变到另一曲綫坐标的变換引起張量場 $V^i_{jk}(M)$ 的坐标变換(76.12)。这时偏导数 $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ 及 $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ 取在点 M 的值，而点 M 即是取張量坐标的那一个点，这已經在式中标明了。

所有張量的代数运算，也很自然地移于張量場上，正如在 §38 所証明过的一样。誠然，在那里，整个張量場只关系于一个标架

$\{O, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$，而現在則在每一点各自有局部标架$\{M, \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n\}$。但是，这并不会变更我們的推理，因为張量的代数运算是分別在每一点 M 进行的。

可是，在曲綫坐标中，張量場的絕对微分却不是这样簡單的問題。在这一章內我們并不研究它，因为在第七章內我們將得到一些这一方面的更一般形式的結果。

特別指出，在一点 M 給定的任一向量 ξ，总是关系于点 M 的局部标架的，并且它的坐标 ξ^i 总是指关于局部标架的坐标。所以，ξ^i 是由展开式

$$\boldsymbol{\xi}=\xi^i\mathbf{x}_i \tag{76.13}$$

而定义的。我們知道，一个不变向量关于任一仿射标架的坐标構成一逆变張量，特別关于局部标架的坐标也是構成一逆变張量，所以 ξ^i 的变换規律具有形式

$$\xi^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\xi^i。 \tag{76.14}$$

反之，若在点 M 給定了一个以 ξ^i 为坐标的一阶逆变張量，則展开式 (76.13) 确定一个不变的向量 ξ，理由正如一般理論(§ 1)一样。由此，向量場 $\boldsymbol{\xi}(M)$ 的給定就等价于張量場 $\xi^i(M)$ 的給定。

§ 77. 平行移动

从任一点可以作一已知向量是仿射空間的重要性質之一。現在有这样一个問題：当所考察的区域 Ω 是取曲綫坐标 x^i 时，如何从任一点作出一已知向量。設已知向量 ξ_0 在某一点 M_0 的坐标为 ξ_0^i，我們要从另一点 M_1 作出这个向量。当然，假如在点 M_1 作出的向量仍具有坐标 ξ_0^i，便达不到这个目的，因为在 M_0 及 M_1 的局部标架是不同的。我們必須确定：应該如何变更 ξ_0^i，以便在点 M_1 的局部标架中，使它們能定出以前的向量 ξ_0。

然而，如果把向量 ξ_0 从 M_0 一躍而移到 M_1 上，則上面这一問题的解答就不会有什么意义。值得注意的是向量 ξ_0 沿任一曲綫 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 的連續移动，并且要研究其坐标 ξ^i 在路徑的每一無限小段上連續变化的过程。正是这样使問題簡化后，就会导出富有思想性的結果。

設路徑 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ 是由参数方程

$$x^i = x^i(t) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{77.1}$$

給定的，式中 $x^i(t)$ 是連續可微的函数。注意，$\overset{\frown}{M_0M_1}$ 是在 § 65 意义下的曲綫：若以 $x^i(t)$ 代入(76.1)，則向徑 $\mathbf{x}$ 是 t 的函数。在这一路徑上的每一点 $M(t)$ 我們作这一个常向量 ξ_0，由于局部标架随点的位置而变，因而向量 ξ_0 的坐标 ξ^i 也随点的位置而改变。所以，坐标 ξ^i 依賴于 t:

$$\xi^i = \xi^i(t), \tag{77.2}$$

于是我們要弄清楚，这些函数在路徑的一無限小段上按什么規律而改变。

因为函数 $x^i(t)$ 是連續可微分的，我們立刻又得到，局部标架的向量 $\mathbf{x}_i(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 以及 ξ^i 沿此路徑是 t 的連續可微函数(假定 $N=2$; N 的意义参看 § 75)。

按点 $M(t)$ 的局部标架向量展开向量 ξ_0:

$$\xi_0 = \xi^i(t)\mathbf{x}_i(x^1,\ \cdots,\ x^n)。 \tag{77.3}$$

在这里要注意，$x^1,\ \cdots,\ x^n$，是按照路徑的参数方程依賴于 t 的。关于 t 逐項微分，因为 $\xi_0=$ 常向量，我們得:

$$0 = d\xi^i\,\mathbf{x}_i + \xi^i\,d\mathbf{x}_i\,。 \tag{77.4}$$

为了分析这一結果，我們必須把向量 $d\mathbf{x}_i$ 按局部标架向量而展开。

由全微分的公式得:

$$d\mathbf{x}_i(x^1,\ \cdots,\ x^n) = \mathbf{x}_{ij}\,dx^j, \tag{77.5}$$

式中