

科學圖書大庫

# 計畫向量代數

譯者 吳英格

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

# 計畫向量代數

譯者

吳英格



徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

# 科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員  
編輯人 林碧鏗 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十二年二月一日初版

## 代數向量畫計

定價 新台幣三十五元 港幣五元

譯者 吳英格 國立台灣大學數學碩士  
私立東海大學數學系講師

改訂為基價 1.80 元

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 臺北郵政信箱53002號 電話783686號  
發行人 財團法人臺北市徐氏基金會出版部 林碧鏗 郵政劃撥帳戶第15795號  
印刷者 燈台光隆印刷紙品有限公司

## 我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤為社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學。旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再遴承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鏗氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期擬定二千冊，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

## II

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠言善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，僑居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘冊，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘冊，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衛星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審慎從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘冊，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尚需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，賡即出書，欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

# 讀法指導

## 1. 最起碼之數學基礎

若欲完全瞭解本書，則讀者需具備之數學基礎如下：

(a) 兩度空間之坐標幾何學：直綫與圓即可。

(b) 三角學： $30^\circ$  及  $45^\circ$  之正弦與餘弦值， $\sin(A+B)$  及  $\cos(A+B)$  之展開式。

(c)  $3 \times 3$  行列式之展開（見附錄 A）

(d) 結合，交換及分配律（見附錄 B）。

## 2. 流綫圖

本書利用許多流綫圖來表達意思。在本指導內我們就開始使用流綫圖，使讀者能熟習其用法。

每一流綫圖的開始都為



它們的末尾都為

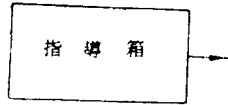


或



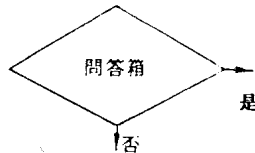
或其他類似圖形。

在其中間，你可能碰到



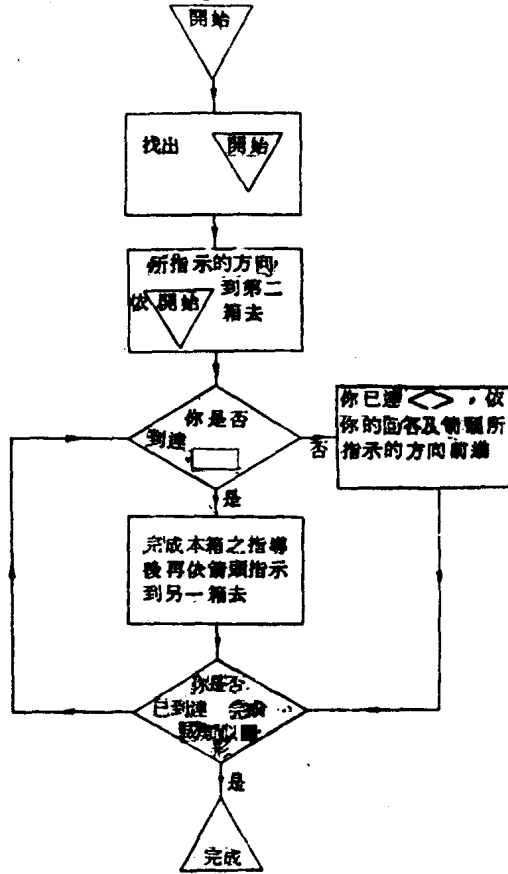
給你必要的指導，並有一箭頭指示你前進的方向。

你也可能碰到



這種問答箱都有一問題需要你回答，然後你再依你的回答及箭頭所指示的方向前進。

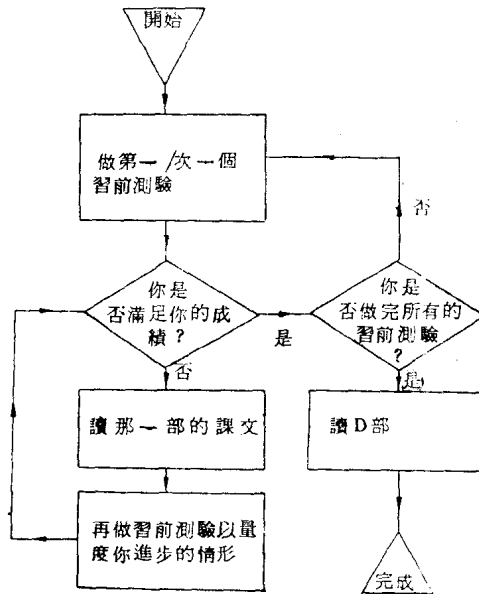
現在我們用流綫圖來表出如何使用流綫圖



如何使用流綫圖的流綫圖

### 3. 習前測驗

本冊前面三部之前都列有習前測驗。它能測驗你進步多少及瞭解多少。讀每部前後，請做習前測驗。如此你就能知道你進步的情形及你瞭解課文的程度。



說明習前測驗使用法之流綫圖

#### 4. 計劃摘要及習題

每一部都分成幾個計劃（D部除外）。大部分的計劃都包括計劃內容、摘要及問題。如有其他內容加入，當會另加說明。

計劃內容是一小段一小段分開，這使讀者容易完全吸收。讀者時常需要回答問題，這也對讀者的吸收大有幫助。但這種寫法也有其缺點。因它太鬆散，故易使讀者“只見樹木不見林”。為了補救此缺點，我們才用摘要及流綫圖，希望讀者好好利用。

在每一計劃後面都有幾個問題，讀者如果能無星號的問題做完，就代表瞭解那一計劃。有星號的問題需要深一點的數學基礎，故讀者如果做不出來不必喪氣，但一定要做做看。

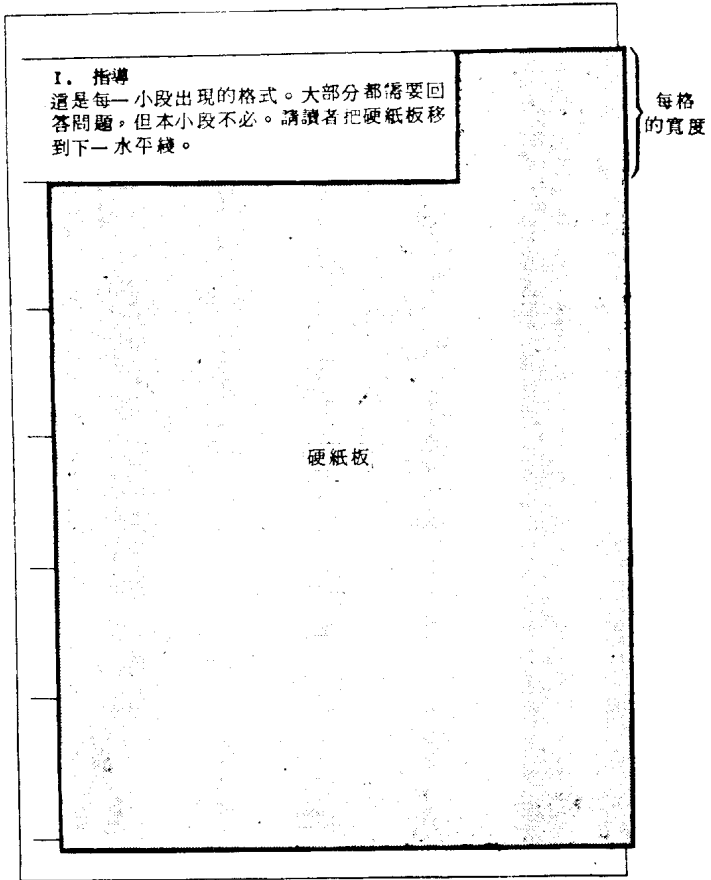
摘要及習題也提供讀者複習的機會。

#### 5. 計劃內容之讀法

每一計劃內容通常分為三十或四十小段。通常每一小段都需要讀者回答問題，而其答案就在右邊一欄內。讀者需要筆及紙寫答案及另外一張如下圖所示的硬紙板遮蓋其他問題及答案。請讀者務必使用硬紙板，否則瞭解程度會降低。



下面是計劃內容之讀法的說明。



造一硬紙板，把它放置在下頁，如上圖所示，並按指示進行。

<p>1. 指導 這是每一小段出現的格式。大部分都需要回答問題，但本小段不必。請讀者把硬紙板移到下一水平線。</p>	
<p>2. 有些小段要你從兩個答案中選一個答案。那兩個答案都用一斜線分開。回答下面問題後再把硬紙板移到下一水平線。 本小段是 /否需要你回答問題。</p>	是
<p>3. 當你移動硬紙板後，你已看到上一格右邊的答案了。檢驗你的答案後回答下之問題。 你是 /否讀了本句。 再把硬紙板移到下一水平線。</p>	是
<p>4. 檢驗你的答案。 有些問題是需要你填充。 故 <math>2 \times 2 = \underline{\quad}</math>。 在下面你要自動將硬紙板移到次一 <math>\underline{\quad}</math>，我們將不再說明。</p>	4 水平線
<p>5. 檢驗你的 <math>\underline{\quad}</math>。 有時要你填的字如果太多的話，我們就用三個星號表示。 在每一小段的末尾，你要自動將硬紙板移到 * * *。</p>	答案 下一水平線
<p>6. 上面兩小段的開始都要你去檢驗你的 <math>\underline{\quad}</math>。 我們也可寫：上面兩小段時開始都要你去 * * *。</p>	答案 檢驗你的答案

#### 6. 錯誤

如果你有前面所寫的數學基礎，你將能正確地回答大部分的問題。但是錯誤總是難免的，如果你知道錯誤的原因，那最好不罰。如果不知道其原因，則最好重讀一遍。如果再不加其中原因（實際上應該沒有人會如此），那就唯有向別人請教了。但是總要把錯誤的原因找出來，這樣你才能進步。

#### 7. 摘要

現在你已知道如何使用流線圖及計劃內容了。請你就從A部開始讀。當然你最先碰到的就是A部的習前測驗。

祝你好運！

# 目 錄

讀法指導	
A 部：基本運算	1
習前測驗	1
計劃一：基本觀念	2
平移	2
位移向量	3
$AB$ 記法	3
相等向量	4
$a$ 記法	5
複習	6
摘要	7
習題	9
計劃二：向量加法	10
複習	10
平移, $[x, y]$ 記法	10
向量之相加	11
向量相加之擴展	14
摘要	17
習題	18
計劃三：向量相減	19
負向量	19
向量相減	20
摘要	24
習題	25
計劃四：亞倍爾 (Abel) 群公設	26
封閉性與唯一性	27
結合性	28
零向量	28
負向量	29
交換性	29
亞倍爾群	29
摘要	30
習題	30
計劃五：向量空間公設	31
純量	31
有理數純量	32

IV

無理數純量	32
負純量	33
第一部分之摘要	33
混合結合律	34
第一分配律	35
第二分配律	35
中性純量	35
摘要	36
習題	37
<b>B部：點、線和面</b>	38
習前測驗	38
計劃六：點和線	39
位置向量	39
$OR = r$ 習慣用法	39
$XY = y - x$	40
經原點之直線方程式	40
不通過原點之直線方程式	42
通過兩點之直線方程式	44
摘要	46
習題	48
計劃七：以所給的比例分一線段	49
複習	49
以所給的比例分一線段	50
摘要	52
習題	56
計劃八：兩純量變數	61
經過原點的平面	61
基底向量	61
綫性相依與綫性獨立	63
方程式之解	64
摘要	68
習題	71
計劃九：向量與笛卡爾坐標	75
單位向量 ( $\hat{a}$ 記法)	75
互相垂直的單位向量 ( $i, j$ 記法)	76
笛卡爾坐標	77
向量與笛卡爾方程式	77
摘要	80
習題	84
計劃十：三純量變數	85
綫性相依與綫性獨立	85
三維空間	85

不經原點的平面	87
經三點的平面	88
平面上之直線	89
兩固定純量	90
摘要	92
習題	95
計劃十一：三維空間之笛卡爾坐標	96
$i, j$ 及 $k$	96
右手系	97
三維空間之坐標	98
兩點間之向量	100
向量終點之坐標	100
摘要	101
習題	103
計劃一至十一之習題解答	104
計劃十二：笛卡爾方程式之形式	106
由向量方程式求直線及平面之笛卡爾方程式	106
檢驗—已知點是否在一已知平面或直線上	106
求—已知平面上之一點	106
求—已知直線上之一點	107
檢驗—已知向量是否在一已知平面或直線上	108
求—已知平面或直線上之一向量	109
摘要	114
習題	114
<b>C部：純量與向量積</b>	115
習前測驗	115
計劃十三：純量積	116
兩向量之夾角	116
純量積	118
以 $i, j$ 及 $k$ 表示之向量的純量積	121
摘要	123
習題	126
計劃十四：長度，角度及方向	129
長度	129
模之符號	129
兩向量之夾角	131
方向餘弦	133
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$	136
摘要	137
習題	139
計劃十五：垂直性	141
垂直性	141

平面之法向	142
平面之方向	143
平面之方程式	143
以笛卡爾方程式表示之平面的方向	148
摘要 151 習題 153	
計劃十六：向量積	155
旋轉	155
向量積	156
群與向量積	160
封閉性與唯一性	160
結合性	160
單位元素及反元素	160
交換律	161
摘要 161 習題 162	
計劃十七：向量積之計算	163
分配律	167
以 $i, j$ 及 $k$ 表示之向量的向量積	167
行列式	169
複習	170
摘要 172 習題 173	
計劃十八：向量積之應用	174
平行四邊形的面積	175
三角形的面積	176
平行六面體的體積	177
純量三重積	179
摘要 181 習題 184	
計劃十九：球	185
球之向量方程式	186
笛卡爾式	187
切面	188
摘要 190 習題 192	
D 部：複習及更進一步的應用	193
計劃二十：複習及更進一步的應用	193
兩直線之夾角	194
兩平面之夾角	196
定點到一平面的垂直距離	198
檢驗一平面是否為球之切面	200
一點 $P$ 到一直線的垂直距離	202
歪斜線之最短距離	204
計劃二十一至二十之習題解答	206
附錄 A 附錄 B	

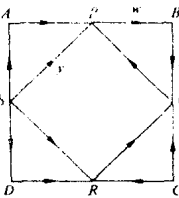
## A 部：基本運算

### 習前測驗

1. 平移是什麼？

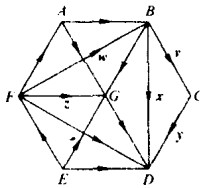
一大車頭沿着一直的軌道平穩地前進，試決定下列各點的移動是否為平移並說明其理由：

- 在輪圈上的一點；
- 軸心；
- 在前面緩衝器上的一點。

2.  (a) 利用如符號  $\vec{AB}$  的記法，寫出圍繞小正方形之各邊的位移向量。  
 (b) 圖中那些位移向量與  $\vec{AP}$  相等？  
 (c) 那些位移向量可記為  $w$ ？  
 (d) 那些位移向量與  $x$  相等？  
 (e) 那些位移向量的長度是  $y$ ？  
 (f) 那些位移向量與  $\vec{RQ}$  相等？

3. 利用像  $[a, b]$  這種記法，如何描述平移？當幾個用這種符號表示的連接向量加起來時，如何找出其和向量？

4. 利用  $\vec{AB}$  和  $a$  兩種向量表示法，表出下面諸和向量：

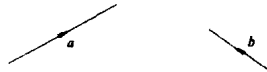



- $\vec{FA} + \vec{ED}$ ;
- $\vec{BC} + \vec{BG}$ ;
- $w - y$ ;
- $z + y$ .

5. 劃出 (a)  $a - b$ ,

(b)  $b - a$ ,

並證明你所用的方法為正確。

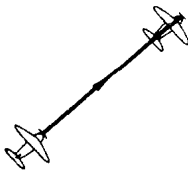

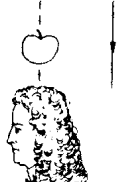


6.  劃出下列諸向量： $3x$ ,  $\frac{1}{2}x$ ,  $-2x$ 。如用  $[a, b]$  這種記法，那些向量如何表示？

$[1, 2]$



# 計劃一 基本觀念

1 平移	假如一物體在一直線上移動且無轉動現象發生，我們就稱此種移動為平移 (translation)。	
2. 	這飛機在一直線上移動。 有 / 沒有轉動現象發生。 這種移動是 / 不是平移。	沒有 是
3. 	圖中所表示的路線是 / 不是直線。 所以此種移動是 / 不是平移。	不是 不是
4.	若一物體在一直線上移動且無轉動，則此種移動稱為_____。	平移
5. 	牛頭上的蘋果所經過的路線是 / 不是平移。	是