中学数学

JIEXIJIHEJIETIYINDAO

解析几何解题引导

湖北人民出版社

解析几何解题引导

刘佛清　张硕才　编
陈森林　审

湖北人民出版社

解析几何解题引导

刘佛清 张硕才 编

陈森林 审

•

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 11.375印张 260,000字

1981年10月第1版 1981年10月第1次印刷

印数：1—30,400

统一书号：7106·1589 定价：0.92元

出 版 说 明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套《中学数学》：《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》（Ⅰ、Ⅱ）。

今后，我们将组织力量继续编写适合中学生课外学习和中学教师教学参考的读物。希望这套书和广大读者见面后，能听到各方面的热情批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八〇年四月

目　录

第一章　直线与圆

§1　曲线与方程

一、概　述

1．直线坐标系与坐标

数是代数研究的对象和元素，点是几何研究的对象和元素，它们本不相属，但，坐标系的引进，却使得它们建立了一一对应．即，有了坐标系，我们说数，就可用点表示；我们说点，也可用数表达．

元素是个体的称谓，集合是总体的称谓．这里所说建立了一一对应，是指实数集与某一直线(视作点集)说的．对有理数集说来则不然，因为它们只具备一个对应．

坐标系又分为一维的；二维的；三维的；甚至在抽象空间还有四维的等．这里的维数是指独立变量的个数．

轴、原点、单位长通称为(构成)坐标系的三要素．轴是指定了正向的直线．

一条线段有两个相反的方向，若以 A 为起点， B 为终点，则向量 $\overline{AB}$ 与向量 $\overline{BA}$ 具有

$$\overline{AB}=-\overline{BA}.$$

若 $\overline{AB}$ 在一轴上，则依向量 $\overline{AB}$ 与轴的指向相同为正，否则为负．而 $\overline{AB}$ 的绝对值则在单位长给定之下，依 $\overline{AB}$ 的长度而定．换句话说，在轴上的向量均可用一实数表示．但，若将向

量的起点固定于原点，则不同的终点对应着不同的实数，反过来不同的实数对应着不同的终点．通常称这实数为这点的坐标．

所谓数轴，就是这样的直线，这直线上的点和数之间是已建立起一一对应关系的．

设 $OA_1=x_1$，$OA_2=x_2$，$OA=x$．

则 A_1A_2 的距离：

$$|A_1A_2|=|x_2-x_1|.$$

又若$\dfrac{A_1A}{AA_2}=\lambda$，则定比点 A 的坐标为：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\qquad \lambda\neq-1.$$

其中 $\lambda=1$ 时为中点；$\lambda>0$ 时为内分点；$\lambda<0$ 时为外分点．

2．平面直角坐标系与坐标

平面上，有公共原点的互相垂直的两条数轴构成平面直角坐标系．通常，第一轴取水平位置，正向自左至右，叫做横轴；第二轴取铅直位置，正向自下至上，叫做纵轴．

依此，平面上任意一点 M 的位置，可用两个有序数来表示．其第一个为点 M 在横轴上的垂足的（横）坐标 x；其第二个为点 M 在纵轴上的垂足的（纵）坐标 y．常记作 $M(x, y)$．

这一来，通过坐标系的建立，于是使平面点集和有序实数对 (x, y) 集一一对应．这样，就有可能把平面内，关于点的几何问题，转化为关于这些点的坐标即数的问题来进行研究．解析几何就是从这一基本思想出发，用代数的方法来研究几何问题的．

已知两点 $P_1(x_1, y_1)$；$P_2(x_2, y_2)$，则这两点间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

设定比点 P 的坐标为 (x, y)，又已知 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ $(\lambda\neq-1)$，

则此定比点的坐标为

$$\left(x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$$

其中 $\lambda=1$ 时，P 为 P_1P_2 的中点；$\lambda>0$ 时，P 为 P_1P_2 的内分点；$\lambda<0$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，P 为 P_1P_2 的外分点.

而直线段 P_1P_2 或过 P_1，P_2 的直线的斜率为

$$K=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ \ (x_2\neq x_1).$$

其中 α 为过 P_1,P_2 两点的直线的倾角. 当 $x_2=x_1$ 时，斜率 K 不存在，$\alpha=\frac{\pi}{2}$.

以 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，$P_3(x_3,\ y_3)$ 为顶点的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值. 特别当 P_3 在原点时，则此面积 Δ 为

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|\ x_1y_2-x_2y_1\ \right|.$$

3. 曲线与方程

在解析几何中，曲线都看做点的几何轨迹. 即，曲线是一些具有某一共同性质的点的集合. 而包含两个变量(x 与 y) 的方程，常看作它的无穷个解(x，y)的集合.

以 x 和 y 表示定曲线上任一点的坐标，借助于 x 与 y 间的方程来表示曲线上一切点的共同性质，这样，便形成了变量坐标 x 与 y 间的方程. 即，定曲线上任何点的坐标都满足这方程，而不在这曲线上的任何点的坐标就不满足它. 于是这方程又称为该曲线的方程. 换句话说，曲线方程反映了平面上的

曲线与包含两个变量的方程之间的对应关系.

所谓两曲线的交点，它既在这曲线上又在另一曲线上. 所谓两个二元联立方程的解，它既满足这方程又满足另一方程. 既然曲线方程是反映了曲线与方程的对应关系，因此两曲线的交点，常用反映这两曲线的方程的交

$$(F_1(x, y)=0)\bigcap(F_2(x, y)=0)$$

或联立方程

$$\begin{cases}F_1(x, y)=0\\F_2(x, y)=0\end{cases}$$

的解表示.

二、例　　题

例 1　设 M 是 A、B、C 三点所在直线上的任意一点，求证：

(1) $MA\cdot BC+MB\cdot CA+MC\cdot AB=0$

(2) $MA^2\cdot BC+MB^2\cdot CA+MC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB=0$

分析　MA，MB，MC，AB，BC，CA 都为有向线段，取 A、B、C 三点所在直线为数轴，M 点为原点，给出 A、B、C 三点的坐标，利用有向线段的数量公式代入即可证明.

证　取 A、B、C 三点所在直线为数轴，M 点为原点，设 A、B、C 三点的坐标分别为 a，b，c

(1) $MA\cdot BC+MB\cdot CA+MC\cdot AB$

$=a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)$

$=ac-ab+ab-bc+bc-ac=0$

(2) $MA^2\cdot BC+MB^2\cdot CA+MC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB$

$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)+(c-b)(a-c)(b-a)=0$

例 2 已知矩形 $ABCD$ 的中心与原点重合，且对角线 BD 与 x 轴重合，A 在第一象限内，$|AB|=\sqrt{6}$ $|BC|=\sqrt{3}$.

(1) 求矩形各顶点的坐标；

(2) 沿 x 轴将下半平面旋转，使其与上半平面垂直，求 A、C 两点间的距离.

解 (1) ∵ $ABCD$ 为矩形，$|AB|=\sqrt{6}$，$|BC|=\sqrt{3}$.

∴ $|BD|=\sqrt{|AB|^2+|CB|^2}=\sqrt{6+3}=3$

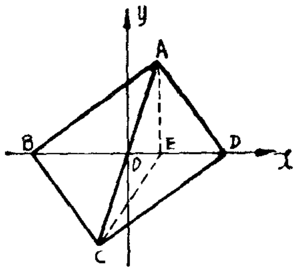

图 1—1

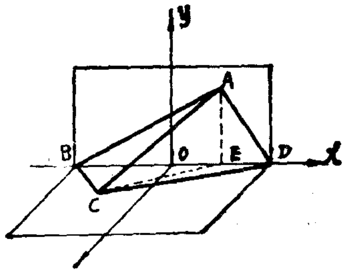

图 1—2

所以 B、D 的坐标分别为 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

设 A 点坐标为 $(x_1,\ y_1)$，引 $AE\perp ox$，E 为垂足，则在 $Rt\Delta OAE$ 和 $Rt\Delta AED$ 中分别有

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=\dfrac{9}{4} \\ \left(x_1-\dfrac{3}{2}\right)^2+y_1^2=3 \end{cases}$$

解之，得 $x_1=\frac{1}{2}$，$y_1=\sqrt{2}$（舍去负值），所以，A 点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)$

因 C 点与 A 点关于原点对称，故 C 点坐标为$\left(-\frac{1}{2},\ -\sqrt{2}\right)$

(2) 在下半平面内连结 CE，因上、下两个半平面互相垂直，AE 垂直于它们的交线 x 轴，故 $CE \perp AE$，因之 ΔAEC 为直角三角形.

$$|CE| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + (0+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore\quad |AC| = \sqrt{(AE)^2 + (CE)^2} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$$

〔附注〕 若不规定 A 点所在象限，本例(1)有两组解.

例 3 已知 ΔABC 各边中点为 $D(3,\ -2)$，$E\ (1,\ 6)$ 和 $F\ (-4,\ 2)$，回答下列问题：

(1) 求 ΔABC 各顶点的坐标；

(2) 证明 ΔDEF 与 ΔABC 有共同的重心；

(3) 证明 ΔABC 的重心与三顶点相连所成的三个三角形的面积相等，都等于原三角形面积的三分之一.

解 (1) 设 A、B、C 三点的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$，由中点坐标公式，有

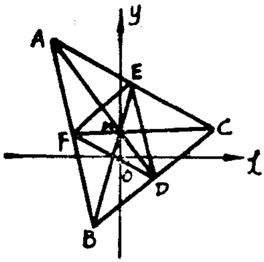

图 1—3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x_3 + x_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -4 \\ y_3 + y_1 = 12 \end{cases}$$

分别解之，得

$$x_1 = -6,\quad x_2 = -2,\quad x_3 = 8.$$

$$y_1 = 10,\quad y_2 = -6,\quad y_3 = 2.$$

故 A、B、C 三点的坐标分别为 $(-6,10)$，$(-2,-6)$，$(8,2)$.

(2) 设 ΔABC 的重心为 $M(x_M, y_M)$，ΔDEF 的重心为 $M'(x_{M'}, y_{M'})$，则有

$$x_M=\frac{(-6)+(-2)+8}{3}=0$$

$$y_M=\frac{10+(-6)+2}{3}=2$$

$$x_{M'}=\frac{3+1-4}{3}=0 \qquad y_{M'}=\frac{-2+6-2}{3}=2$$

点 M 与 M' 的坐标相同，故 ΔDEF 与 ΔABC 有共同的重心.

(3) 由(2)知 ΔABC 的重心为 $M(0,2)$，ΔMAB 的顶点 M，A，B 系按反时针方向排列，故

$$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ -6 & 10 & 1\\ -2 & -6 & 1\end{vmatrix}=32$$

同理可得

$$S_{\Delta MBC}=S_{\Delta MCA}=32$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-6 & 10 & 1\\ 2 & -6 & 1\\ 8 & 2 & 1\end{vmatrix}=96$$

$$\therefore\quad S_{\Delta MAB}=S_{\Delta MBC}=S_{\Delta MCA}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.$$

〔附注〕 在解析几何中，证明两点重合时，如本例(2)的解法，常用证明该两点的坐标相同的方法来解决.

例 4 长度为 $l\geqslant 1$ 的直线段，其两端在抛物线 $y=x^2$ 上移动. 设这一线段的中点为 M，求 M 点到 x 轴距离最短时的坐标.

分析　因线段的两端点在抛物线上移动，设其两端点的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则中点M的纵坐标$\frac{y_1+y_2}{2}$就是M点到x轴的距离d，从而问题归结为求d的极小值，由于y_1，y_2都是变量，所以要考虑利用关系式$y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$，减少变量，化为求一元函数的极植问题.

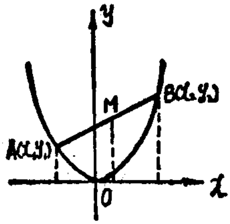

图 1—4

解　设长为$l\geqslant 1$的直线段的两端点A、B在抛物线$y=x^2$上，且其坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)则有

$$y_1=x_1^2, \quad y_2=x_2^2 \qquad ①$$

于是线段AB的中点M到x轴的距离是$d=\frac{y_1+y_2}{2}$　　②

又由题设有

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2 \qquad ③$$

由①②③并令$y_1 \cdot y_2=x_1^2 \cdot x_2^2=z^2$，则有

$$4z^2+2z+l^2-4d^2-2d=0$$

上式看作z的二次方程，因z必为实数，故判别式的值非负，即

$$\Delta=4-16(l^2-4d^2-2d)\geqslant 0$$

解之，得

$$d\geqslant\frac{2l-1}{4} \text{或} d\leqslant\frac{-2l-1}{4}\text{（这时 } d \text{ 为负数，舍去）}$$

因而d的极小值为$\frac{2l-1}{4}$，就是M点到x轴的最短距离，

这时，$z=-\frac{1}{4}$　即$x_1x_2=-\frac{1}{4}$，于是

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$$

$$= y_1 + y_2 + 2z$$

$$= \frac{2l-1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= l - 1$$

所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{l-1}{2}}\ (l \geqslant 1)$

这就是说 M 点的坐标是 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{l-1}}{2},\ \dfrac{2l-1}{4}\right)$

〔**附注**〕 本例的解法中，利用已知曲线的方程进行变量代换，使问题转化为易于求解，这是解析几何解题中一种常用的方法．

本例还有其他解法，如选取 AB 所在直线的倾角 α 为参数来解，请读者考虑．

例 5 等腰$\triangle ABC$ 的底边是 BC，延长一腰 AB 到 D，使 $BD = AB$，则 CD 等于中线 CE 的两倍．

证 以 B 点为原点，以 BC 为 x 轴的正方向，建立直角坐标系如图 1—5.

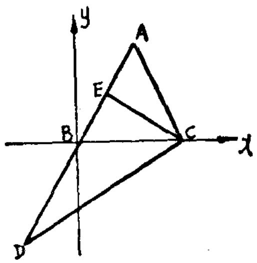

图 1—5

设 C 点坐标为 $(a,\ o)$，A 点坐标为 $\left(\dfrac{a}{2},\ h\right)$，因为 E 是 AB 的中点，所以 E 点坐标为 $\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{h}{2}\right)$，$D$ 点与 A 点关于原点对称，所以 D 点坐标为 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -h\right)$

$$\therefore\quad |CE| = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4} - a\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4h^2 + 9a^2}$$

$$|CD| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2} - a\right)^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 9a^2}$$

$\therefore \quad |CD| = 2|CE|$

例 6 在已知正方形 $ABCD$ 内侧作等边三角形 ABK, BCL, CDM 和 DAN, 试证: KL, LM, MN 和 NK 这四条线段的中点与 AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN 等八条线段的中点是一个正十二边形的 12 个顶点.

证 以正方形的中心 O为原点, 平行于正方形的边的对称轴为坐标轴, 建立坐标系如图 1—6.

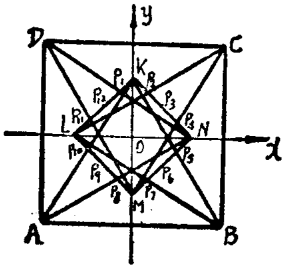

图 1—6

设正方形的边长为 $2a$, 则各顶点的坐标分别为

$A(-a, -a)$、$B(a, -a)$、$C(a, a)$、$D(-a, a)$

因$\triangle ABK$ 为等边三角形, 由所取坐标系知 K 点在 y 轴上, 且 $|KO| = (\sqrt{3}-1)a$ $\therefore$ K 点坐标为 $(0, (\sqrt{3}-1)a)$

同法可得, N 点坐标为$((\sqrt{3}-1)a, 0)$

因 M 点与 K 点关于 x 轴对称, L 点与 N 点关于 y 轴对称, 故 M 点的坐标为$(0, -(\sqrt{3}-1)a)$, L 点的坐标为 $(-(\sqrt{3}-1)a, 0)$

根据中点坐标公式可得

DN 的中点 P_1 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a, \frac{a}{2}\right)$;

CL 的中点 P_2 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right)$;

NK 的中点 P_3 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a, \frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)$

又由两点间距离公式, 有

$$|P_1P_2|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a-\frac{2-\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=(2-\sqrt{3})a$$

$$|P_2P_3|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a-\frac{2-\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a-\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=(2-\sqrt{3})a$$

$$\therefore\quad |P_1P_2|=|P_2P_3|$$

又 $|OP_1|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a,$

$$|OP_2|=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a$$

$$|OP_3|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}a\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a$$

即 $|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|$

由于另外九个点分别是 P_1，P_2，P_3 的对称点，所以这十二个点都在以 O 为圆心，以 $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a$ 为半径的圆上，并且相邻两点的距离相等，所以它们是正十二边形的 12 个顶点．

〔附注〕 例5与例 6 所用的证明方法叫解析法，也叫做坐标法．所谓解析法就是通过建立坐标系，把平面图形性质的问题，化为有关点的坐标的数量关系问题，再用代数方法进行讨论．

用解析法，将一个几何问题化为一个代数问题后，解题思路往往比较明确，所以易于入手．但代数运算是否简单，却有赖于坐标系的选择，坐标系选择得当，可使证明简捷，否则将导致繁琐计算，使问题变得复杂．选取坐标系时，应着眼于具体图形的特征，通常取图形中某一线段的端点，或线段的中点，或对称中心，或两垂线的交点等作为坐标原点，而将图形中过些点的一条直线作为坐标轴，这样，就能使图形中有关点的坐标尽量简单．

从理论上说，凡几何命题都可用解析法证明，但用解析法并不一定都能使证明过程简捷，一般地说，对于讨论两线段相等、两直线的垂直；平行，线段之积、线段之比、点共线、线共点等问题用解析法较易于思考，而有关角的命题，在许多情况下，用解析法证明就不一定比用综合法简便.

例 7 在正△ABC内有一动点P，P到三个顶点的距离分别为$|PA|$，$|PB|$，$|PC|$，且满足关系式$|PA|^2=|PB|^2+|PC|^2$，求P点的轨迹.

分析 因正△ABC已知，选取适当坐标系后，即可确定三个顶点A、B、C的坐标，再设动点P的坐标为(x, y)，由题设所给出的P点应满足的条件，化为点的坐标间的数量关系式，即可求得P点的轨迹.

解 设正△ABC的边长为$2a$，取BC的中点为原点，BC所在的直线为x轴，建立坐标系如图1—7. 则此三角形各顶点坐标为：$A(0, \sqrt{3}a)$，$B(-a, 0)$，$C(a, 0)$

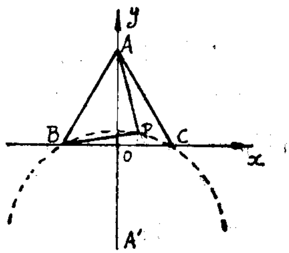

图 1—7

设动点P的坐标为(x, y)

$\because$ $|PA|^2=|PB|^2+|PC|^2$

$$\therefore\ x^2+(y-\sqrt{3}a)^2=(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2$$

即
$$x^2+y^2+2\sqrt{3}ay=(2a)^2$$

故P点的轨迹为以$(0, -\sqrt{3}a)$为圆心，正△ABC的边长$2a$为半径的圆，在此三角形内的一段圆弧$\overset{\frown}{BPC}$（不包括端点B，C）.

例 8 过定点B任作直线交定单位圆于P_1，P_2，在这直线上取不同于B的点P，使