

科學圖書大庫

高等應用微積分

譯者 方智·唐春琪

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

高等應用微積分

譯者 方智·唐春琪

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫



版權所有



不許翻印

中華民國六十九年六月六日初版

高等應用微積分

基本定價 8.30

譯者 方智 唐春琪 國立台灣大學工學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱 13-306

發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 15795 號

電話 9221763
9446842

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號

電話 9719739

譯 序

本書譯自 F. B. Hildebrand 教授所著 *Advanced Calculus for Applications*. 1976 第二版，原書的目的，是在適宜的嚴謹程度下，將一些分析學中最具應用性的論題，給予一整體的處理，內容與一般工程數學教本差異不大，但較為深入。本書尚有其他的特色，例如，除了前數章中含有較多的常見計算問題外，從第五章起，在各章後的習題中，純粹練習題的數量並不多，大部份皆是計劃作業，使讀者按照所示的步驟，自行導證一些正文中未提的結果。此外，這本書採用許多材料力學，流體力學及一些電學，結構學的例子來說明數學原理的應用。對於將來欲進一步研究上列理論的讀者而言，相信必有所助益。

翻譯本書時，譯者在不違反我國語文習慣的原則下，儘量忠於原著。至於譯文的安排，完全同於原著，專有名詞後一律附以原文，以便讀者參照；對於原文語意有疑問之處，亦另加註說明。

承陳榮常君鼎力協助翻譯，謹此致謝，譯者雖以嚴謹的態度翻譯本書，但寫校之間錯誤難免。希望讀者發現時惠予指正。最後，譯者希望此書對讀者能有所裨益。

方 智 謹誌於台北
中華民國六十八年一月廿三日

目 錄

譯 序

第一章 常微分方程式

1-1	引言	1
1-2	線性相關	3
1-3	線性方程式之全解	5
1-4	一次線性微分方程式	8
1-5	常係數線性微分方程式	10
1-6	等維線性微分方程式	15
1-7	線性算子的性質	19
1-8	聯立線性微分方程式	23
1-9	用參數變動法求特解	29
1-10	降階法	36
1-11	積分常數之決定	39
1-12	可解的非線性微分方程式	40

第二章 拉普拉斯變換

2-1	釋例	73
2-2	拉普拉斯變換的定義與存在性	75
2-3	拉普拉斯變換的性質	79
2-4	逆變換式	84
2-5	結合式	86

2.6	異函數	88
2.7	變換對表的使用	91
2.8	對常係數線性微分方程上的應用	96
2.9	伽瑪函數	102
第三章 常微分方程的數值解法		
3.1	引言	129
3.2	泰勒級數的使用	130
3.3	艾丹斯法	133
3.4	改良艾丹斯法	137
3.5	榮奇—庫塔法	140
3.6	畢卡法	144
3.7	差分外插法	146
第四章 微分方程的級數解與特殊函數		
4.1	冪級數的性質	160
4.2	說明例	167
4.3	二階線性微分方程的異點	172
4.4	佛賓斯法	175
4.5	例外情形的處理	182
4.6	例外情形的實例	186
4.7	一類特殊的方程式	189
4.8	貝塞爾函數	193
4.9	貝塞爾函數的性質	203
4.10	貝塞爾微分方程式	208
4.11	Ber 與 Bei 函數	211
4.12	賴勒槽函數	215
4.13	超幾何函數	223
4.14	在 x 值甚大時成立之級數解	226

第五章 邊界值問題與特徵函數展式

5-1	引言	261
5-2	旋轉弦	263
5-3	旋轉軸	268
5-4	軸向負荷下長柱的折曲分析	273
5-5	斯托多樂與凡艾洛近似解法	277
5-6	特徵函數之正交性	284
5-7	任意函數的正交函數級數展式	289
5-8	含非齊次微分方程的邊界值問題	294
5-9	斯托多樂·凡艾洛法的收斂性	297
5-10	富氏正弦級數及餘弦級數	300
5-11	完全型富氏級數	306
5-12	富氏級數的逐項微分	312
5-13	富利葉·貝塞爾級數	316
5-14	賴動權級數	322
5-15	富利葉積分	329

第六章 向量分析

6-1	向量基本性質	381
6-2	向量的內積	384
6-3	向量的外積	386
6-4	多重向量積	388
6-5	向量的微分	391
6-6	空間曲線幾何學	393
6-7	梯度向量	398
6-8	向量算子 ∇	399
6-9	微分公式	402
6-10	線積分	405
6-11	位勢函數	410

6-12	面積分	414
6-13	散度的解釋；散度定理	418
6-14	格林定理	423
6-15	旋度的解釋；拉普拉斯方程式	425
6-16	斯托克定理	426
6-17	正交曲線座標	431
6-18	特殊座標系	438
6-19	對二維不可壓縮性流體流動的應用	441
6-20	可壓縮理想流體的流動	446

第七章 一些多變數微積分學中的論題

7-1	偏微分與鏈定則	485
7-2	隱函數與雅谷比行列式	490
7-3	函數相關	494
7-4	雅谷比行列式與曲線座標，積分中的變數變換	496
7-5	泰勒級數	499
7-6	極大與極小	501
7-7	拘束條件與拉格倫奇乘子法	503
7-8	變分變介	506
7-9	含參數積分式之導式	512
7-10	牛頓疊代求根法	517

第八章 偏微分方程式

8-1	一些定義及例子	537
8-2	一階半線性偏微分方程式	540
8-3	一些特別求解法，原始條件	546
8-4	二階線性與半線性偏微分方程式	551
8-5	常係數之特殊線性二階偏微分方程	552
8-6	一些其他的線性偏微方程	556
8-7	線性一階偏微分方程式的特徵線	559

8-8	線性二階偏微分方程之特徵線	565
8-9	積分曲面上的異常曲線	572
8-10	有關線性二階偏微分方程原始值問題的提要	575
8-11	一特殊半線性問題的特徵曲線	575

第九章 數學物理中偏微分方程式的解

9-1	引言	603
9-2	熱流	605
9-3	矩形板上的穩定態溫度分佈	608
9-4	圓形環上的穩定態溫度分佈	611
9-5	布阿松積分	615
9-6	實心球內的軸對稱溫度分佈	617
9-7	一矩形六面體內的溫度分佈	619
9-8	流繞球的理想流體流動	623
9-9	波動方程；圓形薄膜的振動	626
9-10	熱流方程式，棒中的熱流	629
9-11	尤漢姆疊加積分	631
9-12	移動波	635
9-13	脈動圓筒	639
9-14	富氏積分之應用例	642
9-15	拉氏變換法	647
9-16	拉氏變換法對長電纜上電報方程式上的應用	651
9-17	非齊次條件及參數變動法	656
9-18	問題之列設	662
9-19	過一障礙物的理想流體之超音速流動	668

第十章 複變函數

10-1	引言	724
10-2	基本複變函數	726
10-3	其他基本函數	730

10-4	單複變數解析函數	737
10-5	複值函數的線積分	742
10-6	柯西積分公式	748
10-7	泰勒級數	749
10-8	勞倫級數	752
10-9	解析函數之異點	757
10-10	在無窮遠的異點	765
10-11	異點之意義	768
10-12	殘數	770
10-13	實變數定積分的計算	775
10-14	有關極限圍線的定理	782
10-15	避點圍線	785
10-16	環繞分支點的積分	788

第十一章 解析函數論之應用

11-1	引言	821
11-2	逆拉氏變換	821
11-3	於分支點的逆拉氏變換及迴路積分	825
11-4	保角變換	828
11-5	於二維勢流上之應用	832
11-6	基本流動型態	836
11-7	保角映射的其他一些應用	841
11-8	史瓦茲-奎斯托弗變換	844
11-9	格林函數與狄西來問題	858
11-10	保角映射的使用	865
11-11	其他的二維格林函數	869

第一章 常微分方程式

1-1 引言 (Introduction)

常微分方程式係指一由某因變數及其導數組成之方程式，最簡單的微分方程式為

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$$

上式中 $f(x)$ 為一自變數 x 的已知函數。將上式直接積分，可得其解為

$$y = \int f(x) dx + C \quad (2)$$

積分之下限可為一方便之值， C 為任意常數。若一任意不含未知函數的導式或積分式的函數關係，可滿足⁺所予微分方程，我們即定義此函數關係為微分方程式的解 (solution)。而 (2) 式中的積分能否以基本函數^{*}表出並無關緊要。同理，對如下的方程式。

$$F(x) G(y) dx + f(x) g(y) dy = 0 \quad (3)$$

我們可先分離變數，再積分得如下解：

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx + \int \frac{g(y)}{G(y)} dy = C \quad (4)$$

* 簡稱常微方

+ 若一關係式代入所予方程式，使方程式兩端恒等，(即能成 $0 = 0$ 之型) 則稱此式“滿足”(satisfy) 方程式

* 基本函數一詞意指三角函數，對數函數，指數函數，雙曲線函數，…… 有理函數，多項函數等等。

通常我們所欲求者為微分方程式的通解 (general solution)，即滿足此微分方程式的所有函數關係，但通常此點很難做到，而幸運的是，對最常用到的微分方程式—線性微分方程 (linear differential equations)—而言，此種困難不存在。本章中，我們討論的主題便是線性微分方程式。

—如下的微分方程式：

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = f(x) \quad (5)$$

稱為 n 階 (order) 線性微分方程式。此方程式最主要特點為：它不含有任何因變數 (dependent variables) (未知函數) 和其導數的乘積或非線性函數⁺，此外，其最高階導數為 n 階。諸係數 $a_0(x), \dots, a_n(x)$ 可為自變數 x 的任意給定函數。

現在考慮一次線性方程式

$$a_0(x) \frac{dy}{dx} + a_1(x) y = f(x)$$

在 1-4 節中將論及將上式乘以某一函數 (稱為 “積分因子” (integrating factor)) 而化之如下的方法。

$$\frac{d}{dx} [p(x) y] = F(x)$$

其中 $p(x)$ 和 $F(x)$ 可用 a_0, a_1 和 f 表出，故上式可直接積分而得解。

雖然，對高階線性微分方程而言，並無如此簡單的一般解法，但有兩種在應用上很重要的線性方程式可直接地解出。見 1-5 和 1-6 節。此外，本章將討論一些可求更一般的線性方程式的解法。

⁺所謂線性函數之定義為：若一函數 $f(x)$ 對其自變數 x 滿足 $f(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ 則稱 $f(x)$ 為 x 的線性函數，例如 $y = x$ 即為一例，但如 $\sin(c_1 x_1 + c_2 x_2) = \sin c_1 x_1 \cos c_2 x_2 + \sin c_2 x_2 \cos c_1 x_1 \neq c_1 \sin x_1 + c_2 \sin x_2$ ，故非非線性函數

許多線性微分方程式的基本性質，對非線性方程式，如

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y = e^x$$

等等均不成立。1-12 節中我們處理若干可解的非線性微分方程式。

本章所討論者為“常”微分方程式 (ordinary differential equation) 藉此與偏微分方程 (partial differential equation) 區別，後者含有對兩個 (或以上) 自變數的偏導式 (partial derivatives)，我們將於本書隨後的章節中討論之。

在開始研究線性微分方程式以前，我們先簡短介紹一基本概念，稱之為線性相關 (linear dependence)。

1-2 線性相關 (linear dependence)

所謂 n 個函數 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 的線性組合 (linear combination) 即為一如下之式：

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) \equiv \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (6)$$

其中 c_i 為常數，若其中至少有一 c 不為零，此線性組合即稱為非明顯式 (nontrivial)。若在一給定區域間 (如 $a \leq x \leq b$) 中沒有一個函數 u 可表為其他函數 u 的線性組合，也就是說沒有非明顯的線性組合等於零時，我們即稱 u_1, u_2, \dots, u_n 諸函數在此區間上為線性無關 (linear independent)。否則稱為線性相關 (linear dependent)。

現舉一例，如： $\cos 2x, \cos^2 x$ 和 1 等函數在任何區間內均為線性相關，因下列等式恒成立。

$$\cos 2x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$$

由定義知，兩函數在某區間內為線性相關的充要條件，是在此區間內二者互為對方的常數倍，至於為何要“特定”一區間，可藉考慮 x 和 $|x|$ 兩函數即可了解。因在區間 $x > 0$ 內 $x = |x| \equiv 0$ ，而在區間 $x <$

0 內， $x + |x| \equiv 0$ 。因此，在任何不含零的區間上，上述二者線性相關，而於含 $x = 0$ 的任何區間上則否，因在如此的區間上，沒有一個恒等於零的線性組合可存在。

雖然實際上可用觀察法直接判斷一組函數是否線性相關，但下列結果在理論上有其重要性：設在一區間 I 內每一點上， u_1, u_2, \dots, u_n 等函數均有 n 階有限導數。現若存在一組常數使得對 I 中所有 x 下式均成立：

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$$

則這組常數同樣可以滿足下列導式

$$c_1 \frac{du_1}{dx} + c_2 \frac{du_2}{dx} + \dots + c_n \frac{du_n}{dx} = 0$$

$$c_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \dots + c_n \frac{d^2 u_n}{dx^2} = 0$$

.....

$$c_1 \frac{d^{n-1} u_1}{dx^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-1} u_2}{dx^{n-1}} + \dots + c_n \frac{d^{n-1} u_n}{dx^{n-1}} = 0$$

所以，此 n 個常數必須滿足， n 個齊次方程式。然而，若這組方程式有非明顯解，則其係數行列式必為零。因此，我可結論如下：若 u_1, u_2, \dots, u_n 等函數在區間 I 為線性相關，則行列式

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \frac{du_1}{dx} & \frac{du_2}{dx} & \dots & \frac{du_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1} u_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1} u_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1} u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \quad (7)$$

在 I 中須恒等於零。上式稱為朗斯基行列式* (Wronskian)，在理論探討上常用到。因此我們知道若 u_1, u_2, \dots, u_n 等函數的朗斯基行列式在 I 中不等於零，此組函數在 I 中必線性無關⁺。

舉例說明如下，行列式

$$W(1, x, x^2, \dots, x^n) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ 0 & 1! & 2x & 3x^2 & \dots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2! & 6x & \dots & n(n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 3! & \dots & n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n! \end{vmatrix}$$

之值為主對角線各數 $1 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \dots n!$ 之乘積，故不為零，因此函數 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 為線性無關。

前述定理之逆命題並不成立。即朗斯基行列式值為零時，各函數不一定線性相關。(可參見問題 5)

1.3 線性方程式之全解 (Complete Solutions of Linear Equations)

一般的 n 階線性微分方均可寫成

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = h(x) \quad (8)$$

上式中，我們假設等號兩邊已除以最高階導式的係數。我們將稱之為其標準形。並簡寫成

$$L(y) = h(x) \quad (9)$$

* 或譯朗斯基值

+ 此為同義敘述： $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim \sim p$ — trans.

L 表示以下的線性微分運算子 (linear differential operator) 。

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x) \quad (10)$$

所謂解方程式 (8)，就是找出 y 的最一般表示法，使得當將之代入 (8) 式左端，或以算子 (10) 運算時，可得右邊的函數 $h(x)$ 。在一關係 $y = u(x)$ 滿足 (8) 時，習慣上我們即說關係式 $y = u(x)$ 或函數 $u(x)$ 為此方程式的解。

若 $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ 均為零，則可得 (8) 式之解，同時也引入了 n 個積分常數；因此我們預期 (8) 式的通解中亦含有 n 個任意常數。事實上，若各係數在某區間 I 內均連續時 (8) 式有一含 n 個任意常數的連續通解。並且，除此外在 I 中無其他解*。

上述性質為線性微分方程式所特有。為解釋起見，舉一非線性微分方程式為例

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 4y = 4x - 1 \quad (11)$$

此為一階方程式，直接代入即知

$$y = x - (x - c)^2 \quad (12)$$

為含有一任意常數的解，但它並非通解，因為 $y = x$ 亦滿足 (11)，但它並不能以定 c 之值而得，所以稱解 $y = x$ 為異解 (singular solution)。只有非線性微分方程式才有異解。

在 (8) 式中將 $h(x)$ 以零代之，得一方程 $Ly = 0$ 。因其僅包含 y 或其諸導數之一次冪，故稱為齊次 (homogeneous)。如此，由此式之線性可知，各解的任何線性組合亦為一解。因此滿足齊次方程式

$$Ly_H = 0 \quad (13)$$

的 n 個線性無關解 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 之線性組合

* 此為解之唯一性定理的特例—trans.

$$\begin{aligned}
 y_H(x) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) \\
 &= \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)
 \end{aligned} \tag{14}$$

爲 (13) 式的通解，其中 c_k 爲任意常數。所以適當地定 c 值可得 (8) 式之所有解。

所謂一方程式在一區間 I 內的解，係指此一函數能在 I 內所有點均滿足此方程式。故考慮下列齊次式：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

其通解爲 $y = c_1 + c_2 x$ 。雖然 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 以外任何區間都是線性，且其二階導數爲零，而且我們無法由通解得此式。但，因爲它在 $x = 0$ 處的一次導數不存在，當然亦無二次導數，所以在此點不滿足方程式 $y'' = 0$ ，即在含 $x = 0$ 的區間 $|x|$ 亦不得稱爲解。在不含 $x = 0$ 的任何區間， $y = |x|$ 可寫成 $y = x$ 或 $y = -x$ 而此兩式均可由通解得到。

若已由觀察等方法得到 (8) 式的一個特解 $y = y_p(x)$ ，使得

$$Ly_p = h(x). \tag{15}$$

則 (8) 式的全解爲

$$y = y_H(x) + y_p(x) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x) + y_p(x), \tag{16}$$

此全解含 n 個任意常數，並滿足 (8) 式

$$Ly = L(y_H + y_p) = Ly_H + Ly_p = h(x) \tag{17}$$

所以解線性常微分方程式的步驟有二：首先找出齊次式的 n 個線性無關解，然後若能得其一特解，即得全解。

我們可以用“ $y_H(x)$ 是 $Ly = h$ 的一個齊次解”來簡稱“ $y = y_H(x)$ ”