科學圖書大庫

高等應用微積分

譯者　方智・唐春琪

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

高等應用微積分

譯者　方智・唐春琪

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鐙

科學圖書大庫

中華民國六十九年六月六日初版

高等應用微積分

基本定價 8.30

譯者　方　智
　　　唐春琪　國立台灣大學工學士

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱 13-306　電話 9221763
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第 15795 號　9446842

承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話 9719739

譯 序

本書譯自 F.B. Hildebrand 教授所著 Advanced Calculus for Applications. 1976 第二版，原書的目的，是在適宜的嚴謹程度下，將一些分析學中最具應用性的論題，給予一整體的處理，內容與一般工程數學教本差異不大，但較爲深入。本書尙有其他的特色，例如，除了前數章中含有較多的常見計算問題外，從第五章起，在各章後的習題中，純粹練習題的數量並不多，大部份皆是計劃作業，使讀者按照所示的步驟，自行導證一些正文中未提的結果。此外，這本書採用許多材料力學，流體力學及一些電學，結構學的例子來說明數學原理的應用。對於將來欲進一步研究上列理論的讀者而言，相信必有所助益。

翻譯本書時，譯者在不違反我國語文習慣的原則下，儘量忠於原著。至於譯文的安排，完全同於原著，專有名詞後一律附以原文，以便讀者參照；對於原文語意有疑問之處，亦另加註說明。

承陳榮常君鼎力協助翻譯，謹此致謝，譯者雖以嚴謹的態度翻譯本書，但寫校之間錯誤難免。希望讀者發現時惠予指正。最後，譯者希望此書對讀者能有所俾益。

方 智 謹誌於台北

中華民國六十八年一月廿三日

目 錄

第五章　邊界值問題與特徵函數展式

第六章　向量分析

第一章　常微分方程式

1-1　引言（ Introduction ）

常微分方程式係指一由某因變數及其導數組成之方程式，最簡單的微分方程式爲

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

上式中$f(x)$爲一自變數x的己知函數。將上式直接積分，可得其解爲

$$y=\int^{x} f(x)dx+C \tag{2}$$

積分之下限可爲一方便之値，C爲任意常數。若一任意不含未知函數的導式或積分式的函數關係，可滿足⁺所予微分方程，我們即定義此函數關係爲微分方程式的解（ solution）。而(2)式中的積分能否以基本函數‡表出並無關緊要。同理，對如下的方程式

$$F(x)\,G(y)\,dx+f(x)\,g(y)\,dy=0 \tag{3}$$

我們可先分離變數，再積分得如下解：

$$\int^{x}\frac{F(x)}{f(x)}dx+\int^{y}\frac{g(y)}{G(y)}dy=C \tag{4}$$

---

* 簡稱常微方

+ 若一關係式代入所予方程式，使方程式兩端恒等，（即能成 0 = 0 之型）則稱此式“滿足”（ satisfy ）方程式

‡ 基本函數一詞意指三角函數，對數函數，指數函數，雙曲線函數，………有理函數，多項函數等等。

通常我們所欲求者爲微分方程式的通解(general solution)，即滿足此微分方程式的所有函數關係，但通常此點很難做到，而幸運的是，對最常用到的微分方程式—線性微分方程(linear differential equations)—而言，此種困難不存在。本章中，我們討論的主題便是線性微分方程式。

一如下的微分方程式:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dn^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y$$
$$=f(x) \tag{5}$$

稱爲n階(ordern)線性微分方程式。此方程式最主要特點爲：它不含有任何因變數(dependent variables)(未知函數)和其導數的乘積或非線性函數+，此外，其最高階導數爲n階。諸係數$a_0(x)$，……$a_n(x)$可爲自變數x的任意給定函數。

現在考慮一次線性方程式

$$a_0(x)\frac{dy}{dx}+a_1(x)\,y=f(x)$$

在1-4節中將論及將上式乘以某一函數(稱爲"積分因子"(integrating factor))而化之如下的方法。

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y]=F(x)$$

其中$p(x)$和$F(x)$可用a_0，a_1和f表出，故上式可直接積分而得解。

雖然，對高階線性微分方程而言，並無如此簡單的一般解法，但有兩種在應用上很重要的線性方程式可直接地解出。見1-5和1-6節。此外，本章將討論一些可求更一般的線性方程式的解法。

+所謂線性函數之定義爲；若一函數$f(x)$對其自變數x滿足$f(c_1x_1+c_2x_2)=c_1f(x_1)+c_2f(x_2)$則稱$f(x)$爲$x$的線性函數，例如$y=x$即爲一例，但如$\sin(c_1x_1+c_2x_2)=\sin c_1x_1\cos c_2x_2+\sin c_2x_2\cos c_1x_1$ $\neq c_1\sin x_1+c_2\sin x_2$故非非線性函數

理学学士

許多線性微分方程式的基本性質，對非線性方程式，如

$$\frac{dy}{dx}=x+y^2\ ,\ \frac{d^2y}{d^2x}+\sin y=0\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=e^x$$

等等均不成立。1-12 節中我們處理若干可解的非線性微分方程式。

本章所討論者爲“常”微分方程式(ordinary differential equation)藉此與偏微分方程(partial differential equation) 區別，後者含有對兩個(或以上)自變數的偏導式(partial derivatives)，我們將於本書隨後的章節中討論之。

在開始研究線性微分方程式以前，我們先簡短介紹一基本概念，稱之爲線性相關(linear dependence)。

1-2　線性相關(linear dependence)

所謂 n 個函數 $u_1(x)$，$u_2(x)$ …… $u_n(x)$ 的線性組合(linear combination)即爲一如下之式：

$$c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_nu_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_ku_k(x) \quad (6)$$

其中 c_k 爲常數，若其中至少有一 c 不爲零，此線性組合即稱爲非明顯式(nontrivial)。若在一給定區域間(如 $a\leq x\leq b$)中沒有一個函數 u 可表爲其他函數 u 的線性組合，也就是說沒有非明顯的線性組合等於零時，我們即稱 u_1，u_2，…，u_n 諸函數在此區間上爲線性無關(linear independent)。否則稱爲線性相關(linear dependent)。

現舉一例，如：$\cos 2x$，$\cos^2 x$ 和 1 等函數在任何區間內均爲線性相關，因下列等式恆成立。

$$\cos 2x-2\cos^2 x+1=0$$

由定義知，兩函數在某區間內爲線性相關的充要條件，是在此區間內二者互爲對方的常數倍，至於爲何要“特定”一區間，可藉考慮 x 和 $|x|$ 兩函數即可了解。因在區間 $x>0$ 內 $x-|x|=0$，而在區間 $x<$

0 內，$x+|x|\equiv 0$。因此，在任何不含零的區間上，上述二者線性相關，而於含 $x=0$ 的任何區間上則否，因在如此的區間上，沒有一個恒等於零的線性組合可存在。

雖然實際上可用觀察法直接判斷一組函數是否線性相關，但下列結果在理論上有其重要性：設在一區間 I 內每一點上，$u_1, u_2, \cdots\cdots u_n$ 等函數均有 n 階有限導數。現若存在一組常數使得對 I 中所有 x 下式均成立：

$$c_1u_1+c_2u_2+\cdots\cdots+c_nu_n=0$$

則這組常數同樣可以滿足下列導式

$$c_1\frac{du_1}{dx}+c_2\frac{du_2}{dx}+\cdots+c_n\frac{du_n}{dx}=0$$

$$c_1\frac{d^2u_1}{dx^2}+c_2\frac{d^2u_2}{dx^2}+\cdots+C_n\frac{d^2u_n}{dx_2}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}}+\cdots+c_n\frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}}=0$$

所以，此 n 個常數必須滿足，n 個齊次方程式。然而，若這組方程式有非明顯解，則其係數行列式必爲零。因此，我可結論如下：若 $u_1, u_2, \cdots u_n$ 等函數在區間 I 爲線性相關，則行列式

$$W(u_1,u_2\cdots,u_n)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_n \\ \dfrac{du_1}{dx} & \dfrac{du_2}{dx} & \cdots\cdots & \dfrac{du_n}{dx} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} & \dfrac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}} & & \dfrac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \tag{7}$$

在 I 中須恒等於零。上式稱爲朗斯基行列式 *(Wronskian) ，在理論探討上常用到。因此我們知道若$u_1, u_2, \cdots, u_n$等函數的朗斯基行列式在 I 中不等於零，此組函數在 I 中必線性無關 +。

舉例說明如下，行列式

$$W(1,x,x^2,\cdots,x^n) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots x^n \\ 0 & 1! & 2x & 3x^2 & \cdots n x^{n-1} \\ 0 & 0 & 2! & 6x & \cdots n(n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 3! & \cdots n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots n! \end{vmatrix}$$

之值爲主對角線各數 1，1!，2!，3! …n!之乘積，故不爲零，因此函數 1 ，x ，x^2，…，x^n 爲線性無關。

前述定理之逆命題並不成立。即朗斯基行列式値爲零時，各函數不一定線性相關。(可參見問題 5)

1.3 線性方程式之全解(Complete Solutions of Linear Equations)

一般的n 階線性微分方均可寫成

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = h(x) \tag{8}$$

上式中，我們假設等號兩邊已除以最高階導式的係數。我們將稱之爲其標準形。並簡寫成

$$L(y) = h(x) \tag{9}$$

* 或譯朗斯基値

+ 此爲同義敍述：$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ — trans.

L表示以下的線性微分運算子（ linear differential operator）。

$$L=\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+a_n(x) \quad (10)$$

所謂解方程式 (8)，就是找出 y 的最一般表示法，使得當將之代入 (8) 式左端，或以算子 (10) 運算時，可得右邊的函數 $h(x)$ 。在一關係 $y=u(x)$ 滿足 (8) 時，習慣上我們即說關係式 $y=u(x)$ 或函數 $u(x)$ 爲此方程式的解。

若 $a_1(x)$,$a_2(x)$, $\cdots a_n(x)$ 均爲零，則可得 (8) 式之解，同時也引入了 n 個積分常數 ； 因此我們預期 (8) 式的通解中亦含有 n 個任意常數。事實上，若各係數在某區間I內均連續時 (8) 式有一含 n 個任意常數的連續通解。並且，除此外在 I 中無其他解*。

上述性質爲線性微分方程式所特有。爲解釋起見，舉一非線性微分方程式爲例

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+4y=4x-1 \quad (11)$$

此爲一階方程式，直接代入即知

$$y=x-(x-c)^2 \quad (12)$$

爲含有一任意常數的解，但它並非通解，因爲 $y=x$ 亦滿足 (11) ，但它並不能以定 c 之值而得，所以稱 $y=x$ 爲異解（ singular solution ）。只有非線性微分方程式才有異解。

在(8)式中將 $h(x)$ 以零代之，得一方程 $Ly=0$ 。因其僅包含 y 或其諸導數之一次冪，故稱爲齊次（ homogeneous ）。如此，由此式之線性可知，各解的任何線性組合亦爲一解。因此滿足齊次方程式

$$L\,y_H=0 \quad (13)$$

的 n 個線性無關解 $u_1(x)$ ，$u_2(x)$ ，$\cdots u_n(x)$ 之線性組合

* 此爲解之唯一性定理的特例—trans.

$$y_H(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \cdots + c_nu_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_ku_k(x) \tag{14}$$

爲(13)式的通解，其中 c_k 爲任意常數。所以適當地定 c 值可得(8)式之所有解。

所謂一方程式在一區間 I 內的解，係指此一函數能在 I 內所有點均滿足此方程式。故考慮下列齊次式：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

其通解爲 $y = c_1 + c_2x$。雖然 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 以外任何區間都是線性，且其二階導數爲零，而且我們無法由通解得此式　。但，因爲它在 $x = 0$ 處的一次導數不存在，當然亦無二次導數，所以在此點不滿足方程式 $y'' = 0$，即在含 $x = 0$ 的區間 $|x|$ 亦不得稱爲解。在不含 $x = 0$ 的任何區間，$y = |x|$ 可寫成 $y = x$ 或 $y = -x$ 而此兩式均可由通解得到。

若已由觀察等方法得到(8)式的一個特解 $y = y_p(x)$，使得

$$Ly_p = h(x) . \tag{15}$$

則(8)式的全解爲

$$y = y_H(x) + y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_ku_k(x) + y_p(x) , \tag{16}$$

此全解含 n 個任意常數，並滿足(8)式

$$Ly = L(y_H + y_p) = Ly_H + Ly_p = h(x) \tag{17}$$

所以解線性常微分方程式的步驟有二：首先找出齊次式的 n 個線性無關解，然後若能得其一特解，即得全解。

我們可以用"$y_H(x)$ 是 $Ly = h$ 的一個齊次解"來簡稱"$y = y_H(x)$