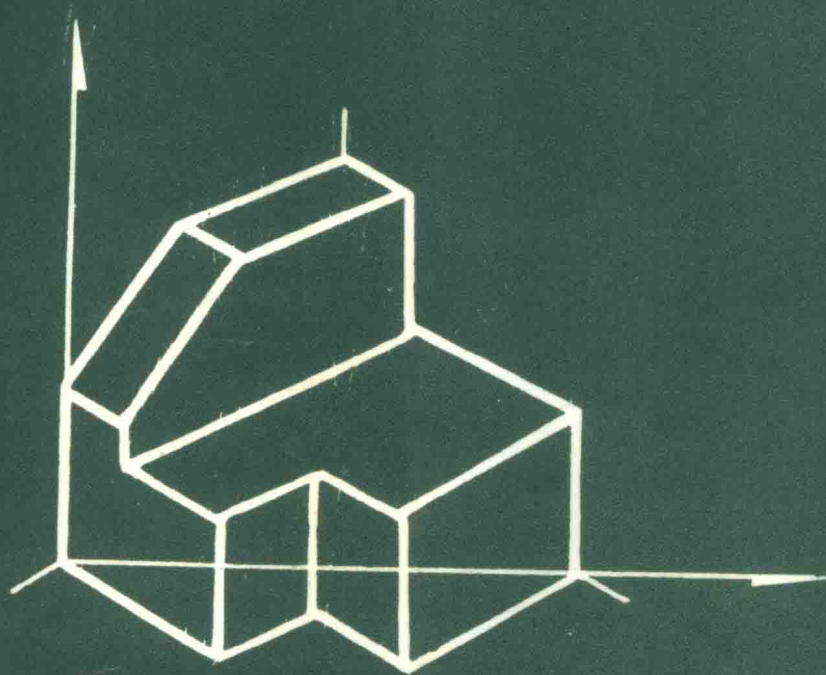


轴测投影

傅钟兰 编著



中国铁道出版社

轴 测 投 影

傅钟兰 编著

江苏工业学院图书馆
藏书章

中 国 铁 道 出 版 社

1988年·北京

内 容 简 介

本书介绍了轴测投影的原理和绘制轴测投影图的方法，共分十章：一至三章介绍了点、线、面、体轴测投影的画法；四、七两章介绍了线、面、体相交，其贯穿点、截交线和相贯线的求法；五、九两章分别介绍了零件轴测图和装配轴测图的画法；六、八两章分别介绍了轴测图的润饰方法，以及轴测图阴影的画法；第十章介绍了用计算机绘制轴测投影图的原理和方法。

本书可供机械设计制造有关科技人员及电大、职大制图专业的师生参考与学习。

轴 测 投 影

傅钟兰 编著

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑 苏国镇 封面设计 张洪信 杨建中

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 1/32 印张：10.5 字数：253 千

1988年10月第1版 第1次印刷

印数：0001—1600册 定价：4.95 元

前 言

近年来随着图学的发展,在画法几何、机械制图以及计算机绘图等方面,对轴测投影画法的研究,越来越得到重视了。因为在表达一个空间物体时,画一张轴测图,其表达效果往往胜过一张照片。因此,在生产中常常利用这种图,辅助说明空间物体的正投影图,以增强识图的效果;在产品说明书中利用这种图来表达部件间的装配关系,有直观性强的优点,以提高宣传效果;在编写教材或教师讲课当中,利用这种图,可以加深同学对问题的理解,从而可提高教学效果。

当前,在计算机日益普及的时代,用计算机绘制轴测投影图的技术也逐渐臻于完善,不但可以用计算机直接绘制轴测投影图,还可以在显示终端的屏幕上,观察其中间结果,以便于修改,最后在绘图机上绘出正确无误的轴测图来。同时可以在图中,加润饰、涂颜色、添阴影。这样不仅增强了图的立体感,而且还减轻了画这种图所带来的繁重工作。

作者根据多年来的教学实践,积累了画轴测投影图的点滴经验,并参考了有关文献,编写成本书。其中既包括画轴测投影图的一般理论和方法,也包括用计算机绘制轴测投影图的原理和方法,供读者参考。编写中力求文字简练,说理详明,以实用为目标,使有画法几何基础知识的读者即可学通读懂。

本书由崔鸿昌同志审校,由张洪信同志担任描图工作、张玉琴同志在描图方面也协助做了不少工作。铁道部第三设计院何翠敏、杨枫春同志在提供计算机绘图设备方面给予大力协助,特在此一并致谢。

由于作者水平所限,错误和不妥之处在所难免,望读者批评指正。

作 者 **傅钟兰**

目 录

第一章 轴测投影的基本原理

一、概述	1
二、正轴测投影的变形系数和轴间角	1
(一) 变形系数	1
(二) 轴间角	2
三、斜轴测投影的变形系数和轴间角	5
四、透视仿射对应及其应用	7
(一) 透视仿射对应原理概述	7
(二) 透视仿射对应条件	8
(三) 透视仿射对应举例	8

第二章 点、线、面的轴测投影

一、点的轴测投影	11
二、直线的轴测投影	12
三、确定平面的条件	13
四、平面在空间的位置	14
五、平面的转化	14
六、在平面上取点、线	15
七、两平面平行, 其截交线也平行	16
八、两平面交线的求法	17
九、直线与平面相交求交点	18

第三章 几何体的轴测投影

一、正多边形的正等测投影的画法	21
(一) 正方形正等测投影的画法	21
(二) 等边三角形正等测投影的画法	22
(三) 正六边形正等测投影的画法	23
(四) 正八边形正等测投影的画法	23
二、正多面体的正等测投影的画法	25
(一) 矩形体正等测投影的画法	25
(二) 正六棱柱正等测投影的画法	25
(三) 正八棱柱正等测投影的画法	25
(四) 正六棱锥正等测投影的画法	26

(五) 组合体正等测投影的画法	27
三、圆的正轴测投影的画法	27
(一) 平行于坐标面圆的正等测投影	27
(二) 平行于三个坐标面的圆的正二测投影	33
四、平行于坐标面圆的斜轴测投影	34
五、垂直于坐标面圆的正轴测投影	36
(一) 垂直于坐标面圆的正等测投影	36
(二) 垂直于坐标面圆的正二测投影	45
六、回转体的正轴测投影画法	49
(一) 正圆柱的正等测投影的画法	49
(二) 组合圆柱体的正二测投影画法	49
(三) 正圆锥的正等测投影画法	50
(四) 球体的正等测投影画法	51

第四章 平面与立体相交、直线与立体相交

一、平面与立体相交，截交线的求法	53
(一) 平面与圆柱相交	53
(二) 平面与圆锥相交	55
(三) 平面与三棱柱相交	58
二、直线与立体相交	59
(一) 直线与圆锥相交	59
(二) 直线与圆柱相交	59
(三) 直线与球体相交	60

第五章 零件轴测图的画法

一、轴测剖视图的画法	64
(一) 第一种画法	64
(二) 第二种画法	65
二、轴测图轴向的选择	67
(一) 各象限的轴向及表达特征	67
(二) 零件用第一象限的正等测投影构图表示法	68
(三) 其它象限的正等测投影表示法	68
(四) 选择不同的轴向画较复杂结构零件的正等测剖视图	69
三、用各种轴测方格纸画轴测图的方法	70
(一) 正等测方格纸的用法	70
(二) 正二测方格纸的用法	71
(三) 斜二测方格纸的用法	72
四、零件轴测草图的徒手画法	72
(一) 基本图形的画法	73
(二) 徒手画圆柱的方法	74

(三) 徒手画圆环的方法	74
(四) 徒手作球体任意截断面的方法	74
(五) 徒手画球体剖视图的方法	75
(六) 徒手画圆的正二测投影三个方向的椭圆	75
(七) 徒手画零件的剖视图	75
(八) 利用轴测方格纸画零件轴测草图	76

第六章 轴测图的润饰方法

一、概 述	77
二、表面润饰的原理及五个光区的形成	77
三、各种不同材料的表面润饰方法	78
四、空心圆柱表面的润饰方法	79
五、圆环的画法和表面润饰方法	80
(一) 圆环的画法	80
(二) 圆环表面的润饰方法	80
六、带有圆环面零件的润饰方法	80
七、球面的润饰方法	81
八、球面零件表面的润饰方法	81
九、润饰方法综合举例	82
十、弹簧的润饰方法	84

第七章 轴测图中两立体表面相交的画法

一、概 述	86
二、曲面立体与曲面立体相交 (或相贯)	86
(一) 圆柱与半圆球相贯	86
(二) 圆锥与半圆柱相贯	87
(三) 圆柱与圆柱相贯	87
(四) 圆柱与圆环相贯	89
三、平面立体与平面立体相交 (或相贯)	90
(一) 六棱柱单穿孔	90
(二) 六棱柱双穿孔	91
四、曲面立体的双穿孔	93
(一) 球体双穿孔	93
(二) 圆柱双穿孔	94
(三) 圆锥双穿孔	95
五、前三节小结	96
六、斜圆锥、柱相贯	96
(一) 斜圆柱与斜圆柱相贯	96
(二) 斜圆锥与斜圆柱相贯	98
(三) 斜圆锥与斜圆锥相贯	98

第八章 轴测图阴影的画法

一、概 述	99
二、画阴影时光源和光线的方向	99
三、在轴测图中画阴影的原理	99
(一) 圆柱的阴影	100
(二) 六棱柱的阴影	100
四、画轴测图的阴影举例	101
五、零件轴测图阴影的画法	106

第九章 装配轴测图的画法

一、概 述	110
二、画装配轴测图的步骤和方法	110
(一) 作图步骤	110
(二) 作图的注意事项	111
三、画装配轴测图举例	111

第十章 用计算机自动绘图机绘制轴测投影图

一、坐标变换与轴测投影的关系	119
二、坐标变换原理	120
(一) 点的坐标变换	120
(二) 正轴测投影的变换矩阵	126
(三) 正轴测投影的旋转角度	129
(四) 矩阵相乘的规则	131
三、画轴测投影的程序设计方法	132
(一) 概 述	132
(二) FORTRAN语言简介	132
四、用计算机绘图机绘制轴测投图影举例	134
五、本章小结	158
参考文献	158

第一章 轴测投影的基本原理

一、概 述

轴测投影也属于平行投影,不过其投影面不是原来那三个坐标面,而是与三个坐标面都相交的某平面,叫做轴测投影面。换句话说,就是一个一般位置平面,在个别情况下为平行面(例如,正面斜轴测投影,其轴测投影面为一正平面)。如图 1—1 中的 A 点,系表示在三个坐标平面中的一个点,该点的轴测投影为 A_1 。 A 点在投影时,连同其三个坐标轴 OX , OY , OZ 一起沿着 D 的方向向轴测投影面 F 进行投影,首先得出三个坐标轴在 F 面上的轴测投影 O_1X_1 , O_1Y_1 , O_1Z_1 , 然后再求出 A 点本身的轴测投影 A_1 来。其投影方式也是按平行投影原理进行投影,如果投影线垂直轴测投影面 F ,则称这种轴测投影为正轴测投影。轴测投影面 F 如与三个坐标平面的交角相等,则称这种正轴测投影为正等测投影。如果轴测投影面 F 与其中两个坐标平面的交角相等,则称为正二测投影。依此类推还有正三测投影。其中最常用的是正等测投影,其次是正二测投影,最不常用的是正三测投影。本书所讨论的主要内容为正等测投影。对正二测投影和其它轴测投影只作重点地介绍。

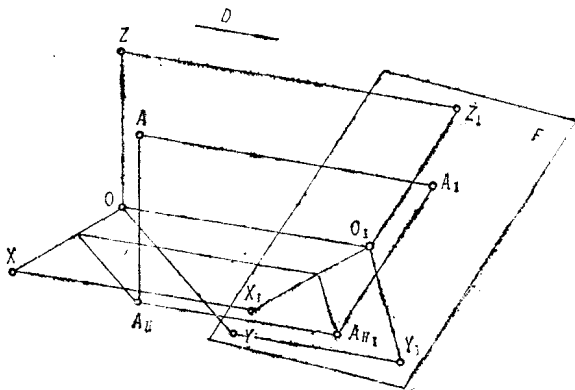


图 1—1 轴测投影的投影方式

如果轴测投影面 F 不是一个一般位置平面,而是一个正平面(当然也可能是水平面或侧面),而投影方向又不垂直于轴测投影面时,则称这种轴测投影为正面斜轴测投影。这是最常用的一种斜轴测投影。本书也适当地介绍了斜轴测投影。

二、正轴测投影的变形系数和轴间角

画轴测投影图时,有两个主要条件:一个是各轴的变形系数;另一个是各轴测投影轴的轴间角。如果知道这两个条件,则画轴测投影图就轻而易举了。现将正轴测投影的变形系数和轴间角介绍如下:

(一) 变形系数

1. 正等测投影的变形系数

将轴测投影面 F 放在三个坐标面当中,如图 1—2 所示。由于 F 面与三个坐标面的夹角相等,所以三个轴测轴与三个坐标轴的夹角 α , β , γ 也相等。

$$\therefore \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$$

$\cos \alpha$, $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 分别定义为 X 、 Y 、 Z 轴在 F 面的变形系数。设这三个轴的变形系数分别为 p 、 q 、 r 。

在正等测投影中, 三个轴的变形系数相等, 即:

$$p = q = r \quad (1-1)$$

按正轴测投影原理: $OO_1 \perp F$, 故根据余弦定理, 向量 OO_1 与三个坐标轴的夹角的余弦的平方和等于 1。

即:

$$\begin{aligned} \cos^2(90^\circ - \alpha) + \cos^2(90^\circ - \beta) \\ + \cos^2(90^\circ - \gamma) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

$$\therefore \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha,$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta,$$

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma,$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$$

即:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2 \quad (1-2)$$

依 (1-1) 式得:

$$3p^2 = 3q^2 = 3r^2 = 2$$

$\therefore$

$$p = q = r = 0.82 \quad (1-3)$$

从上式可以看出, 在正等测投影中, 三个轴的变形系数都为 0.82, 即正等测投影的棱边长度均相等, 且都等于原长的 0.82 倍。如简化为 1, 这时等于把图尺寸放大 $1/0.82 = 1.22$ 倍。

2. 正二测投影的变形系数

在正二测投影中, 设 X 轴与 Z 轴的变形系数相等, Y 轴的变形系数等于它们的 $1/2$, 即:

$$p = r, \quad q = p/2.$$

把 (1-2) 式完全换成 p , 得:

$$p^2 + \frac{p^2}{4} + p^2 = 2, \quad p = \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0.94$$

$\therefore$

$$p = r = 0.94, \quad q = 0.94/2 = 0.47$$

也就是说, 在正二测投影中, X 轴和 Z 轴的变形系数相等, 等于 0.94, Y 轴的变形系数为 0.47。在正二测投影中, 三个轴的变形系数之比为: $X:Y:Z = 0.94:0.47:0.94$ 或 $1:0.5:1$ 。后者等于将图尺寸放大 1.06 倍。

(二) 轴间角

1. 正等测投影的轴间角

正等测投影的轴间角全等, 均为 120° , 现证明如下: 如图 1-2 所示, 三个直角三角形 $\triangle OO_1X_1$, $\triangle OO_1Y_1$, $\triangle OO_1Z_1$ 全等,

则 $OX_1 = OY_1 = OZ_1$, $O_1X_1 = O_1Y_1 = O_1Z_1$ 。

又因三个等腰直角三角形 $\triangle OX_1Y_1$, $\triangle OY_1Z_1$, $\triangle OX_1Z_1$ 互相全等, 所以, $X_1Y_1 =$

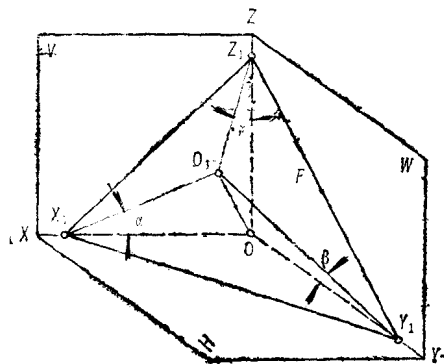


图 1-2 正轴测投影面 F

$Y_1Z_1=Z_1X_1$, 因此可根据三个等腰三角形 $\triangle O_1X_1Y_1$, $\triangle O_1Y_1Z_1$, $\triangle O_1X_1Z_1$ 互相全等的道理证明:

$$\angle X_1O_1Y_1=\angle Y_1O_1Z_1=\angle Z_1O_1X_1=120^\circ \text{ (如图 1-2)}$$

依据如上证明, 可将图 1-2 所示的正等轴测投影面 F 改画成图 1-3 (c) 形式, 使 O_1Z_1 呈竖直方向, O_1X_1 、 O_1Y_1 各与水平成 30° 角, 形成正等轴测投影的坐标系。为适应不同条件下作图的特点和方便, 现指出几种简便轴间角画法, 图 1-3 (b)、(c)、(d) 为正等测投影轴的简便画法。最常用的是图 (b) 的画法, 即先画一水平线, 然后按竖直的方向画出 O_1Z_1 轴, 再利用 30° 三角板与丁字尺, 将 O_1X_1 和 O_1Y_1 两个轴画出。

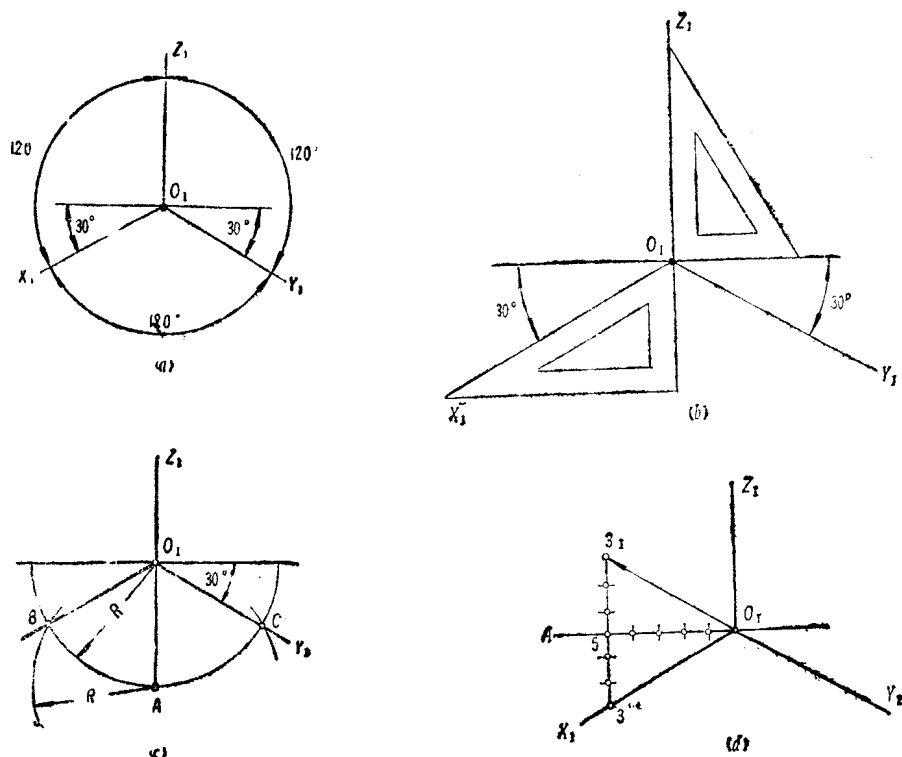


图 1-3 正等测的轴间角及其简便画法

在不借助于 30° 三角板的情况下, 可采用图 (c) 或图 (d) 的画法。画轴测草图时, 也可采用图 (d) 的画法。图 (c) 的画法: 首先作 O_1Z_1 轴, 并以 O_1 点为圆心, 以任意 R 为半径, 画一半圆弧交 O_1Z_1 轴的延长线于 A 点, 再以 A 点为圆心, 以相同半径 R 画弧交第一个弧于 B 点和 C 点, 连 O_1B 即为 O_1X_1 轴, 连 O_1C 即为 O_1Y_1 轴。图 (d) 的画法: 首先作垂线 O_1Z_1 , 然后过 O_1 点作水平线 O_1A , 在 O_1A 上自 O_1 点量 5 个长度单位得点 5, 再在点 5 的上、下两个方向各量 3 个长度单位, 得点 3_1 和点 3, 连 O_13_1 即为 O_1X_1 轴, 3_1O_1 的延长线即为 O_1Y_1 轴。

2. 正二测投影的轴间角

正二测投影的轴间角, 可按下述分析导出: 如图 1-2 和图 1-4 (a) 所示, 取 $p=r$, $q=p/2$ (或 $r/2$)。

所以

$$\cos \alpha = \cos \gamma$$

即

$$\alpha = \gamma$$

因此, 两个直角三角形 $\triangle OO_1Z_1$ 和 $\triangle OO_1X_1$ 是全等的。

所以 $OX_1 = OZ_1$ $O_1X_1 = O_1Z_1$

又因 两个直角三角形 $\triangle OX_1Y_1$ 和 $\triangle OZ_1Y_1$ 全等。

所以 $X_1Y_1 = Y_1Z_1$

而 $\triangle OX_1Z_1$ 和 $\triangle Y_1X_1Z_1$ 是以 X_1Z_1 为公共边的两个等腰三角形，过其两个顶点 O_1 和 Y_1 连线并延长，使之与 X_1Z_1 交于 A 点（参看图 1—4(a)）。

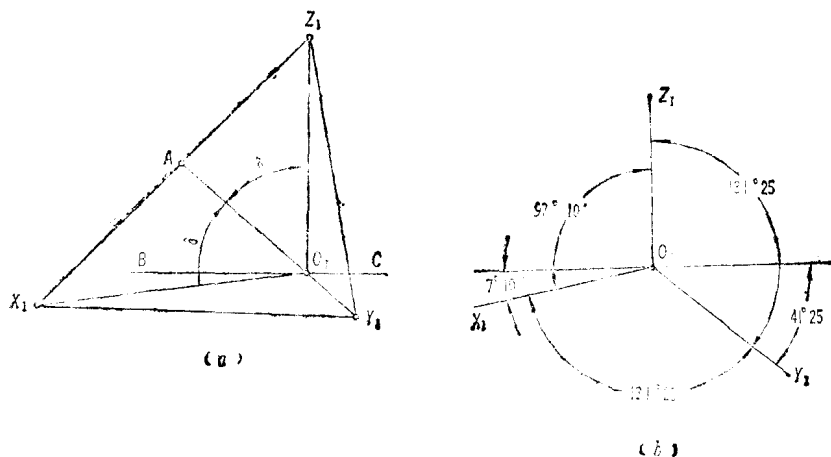


图 1—4 正二测投影轴间角的证明

则有： $O_1A \perp X_1Z_1$ $AX_1 = AZ_1 = \frac{1}{2}X_1Z_1$

如图 1—4 中所示， O_1Z_1 为铅垂线， BC 为水平线。如设正投影轴 $OX_1 = OZ_1 = a$ ，则： $X_1Z_1 = \sqrt{2}a$ ，又因 $p = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ ，所以， $O_1X_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}OX_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}a$ 。

因此 $\sin \delta = \frac{AX_1}{O_1X_1} = \frac{1/2 \cdot \sqrt{2}a}{2/3 \cdot \sqrt{2}a} = \frac{3}{4} = 0.75$

所以 $\delta = 48^\circ 35'$

因此 $\angle X_1O_1Z_1 = 2\delta = 97^\circ 10'$

$\angle BO_1X_1 = 2\delta - 90^\circ = 7^\circ 10'$

$\angle Y_1O_1Z_1 = \angle Y_1O_1X_1 = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 48^\circ 35' = 131^\circ 25'$

$\angle CO_1Y_1 = \angle AO_1B = 90^\circ - \delta = 41^\circ 25'$

综上所述，可知正二测投影的轴间角如图 1—4(b)所示。

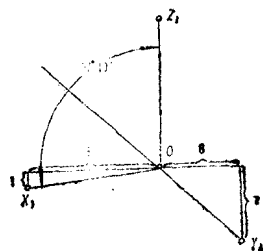
作正二测投影的轴间角时，可以用按比例作图的办法简单地画出。如图 1—5 所示，先画出 O_1Z_1 轴，然后按 $1/8$ 的比例，将 O_1X_1 轴画出（水平为 8 个单位长度，竖直为 1 个单位长度）。再按 $7/8$ 的比例，将 O_1Y_1 轴画出（水平为 8 个单位长度，竖直为 7 个单位长度）。

或者先按 $1/8$ 的比例，画出 O_1X_1 轴后，再将 $\angle X_1O_1Z_1$ 二等分，其分角线的延长线即为 O_1Y_1 轴。

图 1—5 正二测投影轴的画法

下面以等边六面体为例，说明正等测和正二测投影的变形系数和放大的关系（参看图 1—6 和图 1—7）。

如图所示，先画定正等测或正二测投影的坐标系，再分别以各系统的变形系数比 0.82 ：



0.82:0.82或0.94:0.47:0.94, 画出示例等边六面体的相应轴测投影图(如虚线所示), 最后以各系统的放大比1:1:1或1:0.5:1, 画出实用的正等测或正二测投影图(如实线图形)。通过放大后的实用图形制图过程, 可以领会到经放大而简化的方便性。

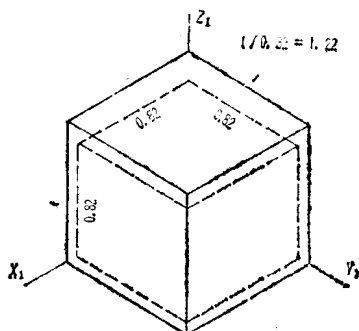


图 1—6 正等测投影的变形系数与放大的关系

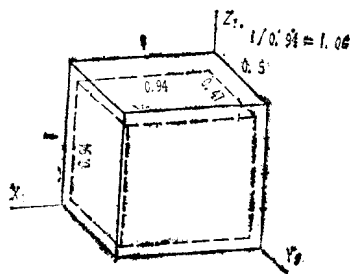


图 1—7 正二测投影的变形系数与放大的关系

三、斜轴测投影的变形系数和轴间角

比较常用的轴测投影, 除了前面介绍的两种正轴测投影外, 还有斜轴测投影, 它又可分为斜等测投影和斜二测投影。斜二测投影是二等测斜轴测投影的简称, 它和正二测投影是相互对应的。但正二测投影的投影线垂直于轴测投影面, 而斜二测投影的投影线, 则不垂直于轴测投影面。现在将斜轴测投影的原理介绍如下:

斜轴测投影的投影面都是平行面, 一般多为正平面(这时叫正面斜轴测)。但有时亦可为水平面(这时叫军用透视——参考图 4—14)。如图 1—8 中的 F 面即为正平面。投影时, 将空间的物体随同三个坐标轴, 沿着 L 方向一齐投影到 F 面上, 这样, 所得到的投影即为斜轴测投影。由于 F 面平行于正平面 XOZ , 故 X 轴和 Z 轴毫无变形地投影到 F 面上。因此, X 轴和 Z 轴的变形系数都等于 1。而 Y 轴的变形系数, 则可根据具体情况, 使其大于 1; 小于 1; 或等于 1。如果大于 1 或小于 1, 则所得的投影叫斜二测投影; 如果等于 1, 则所得的投影叫斜等测投影。下面以圆柱体为例, 说明这种轴测投影的优缺点。

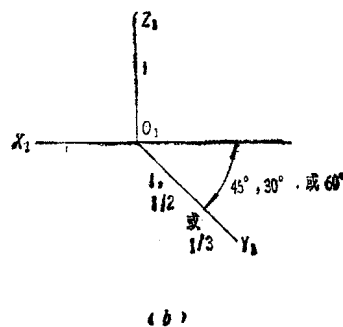
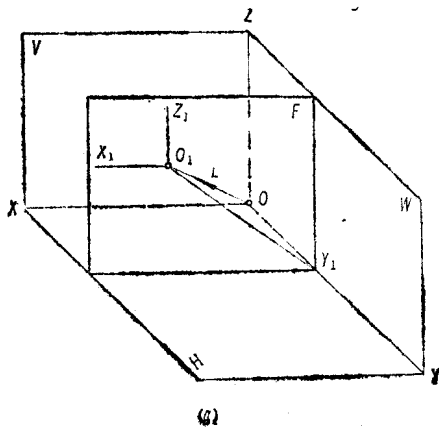


图 1—8 斜二测投影的投影原理

例如, 画一个圆柱体的斜二测投影时, 可以将圆柱体直立放置, 也可以使柱底平行于正

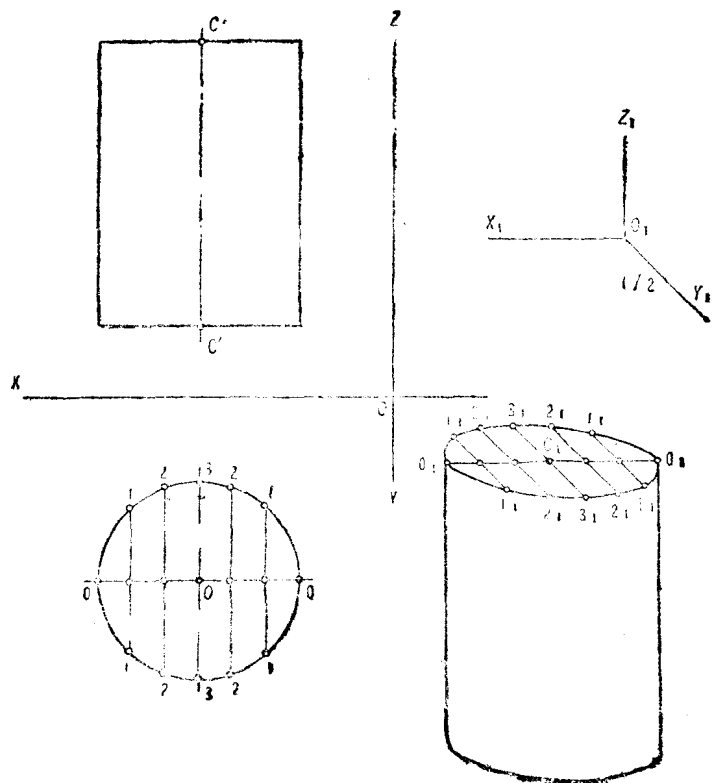


图 1—9 底面平行于H面的圆柱体斜二测投影画法

平面放置，从作图方便的角度来考虑，当然把柱底平行于正平面能使作图简化，因为这样放置可以免去作椭圆的麻烦。如图 1—9 所示，左面是给出的圆柱体正投影（直立放置），右下为其斜二测投影。在这个图中，要用坐标法画其上底和下底的两个椭圆（坐标法请参考图 3—18）。画椭圆时，如用曲线板则比较麻烦。若如图 1—10 所示，使其底与正面平行，则其斜二测投影不必作椭圆，只是把正面投影的圆，原封不动地照画过来就可以了。如图 1—10 右下所示，图中，使 Y 轴的变形系数等于 1，所以这个图即为斜等测投影图。

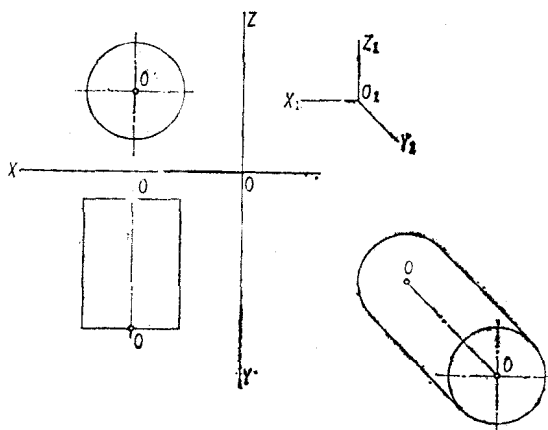


图 1—10 底面平行于V面的圆柱体的斜等测投影的画法

因此，当物体的正面圆多时，采用这种投影较好。这种轴测投影，其变形系数之比，多为 $X:Z:Y = 1:1:1/2$ 。 Y 轴的变形系数一般采用 $1/2$ ，但当物体 Y 方向较长时，为了节省图面，亦可采用 $1/3$ ；有时物体 Y 方向较短，也可采用 1。其轴间角，如图 1—8(b) 所示， X 轴和 Z 轴为 90° ， Y 轴与水平成 45° 或 30° ，个别的可为 60° 。这种轴测投影的应用，在后面章节还要举例介绍。

四、透视仿射对应及其应用

(一) 透视仿射对应原理概述

透视仿射对应又称亲似对应,属于射影几何范畴。把它作为一种作图方法应用于轴测投影中的相贯线、截切线和截断面的求制均有实效,现概要予以介绍。如图1—11所示,相交的两个平面 ω 和 ω_1 交于 R 轴,以 S 点(亦可在无穷远处)射出的射影光线,把平面 ω 上的点、直线或图形射影于 ω_1 平面上,这样 ω 平面上的 $\triangle ABC$ 便被射影成 ω_1 平面上的 $\triangle A_1B_1C_1$ 。由图可见, ω 与 ω_1 平面上的相应点、线形成一一对应关系。 ω 与 ω_1 的交线 R 及其上的点则为自身对应,是对应中的二重直线和二重点的集合,故 R 称为对应轴。两个平面上各对应直线的交点均相交于对应轴上,如图中的 K 点是 AB 和 A_1B_1 延长线的交点, N 点为 CB 和 C_1B_1 延长线的交点, M 点为 CA 和 C_1A_1 延长线的交点。 S 点则称做对应中心。平面 ω 和 ω_1 可看作是点和直线的场。

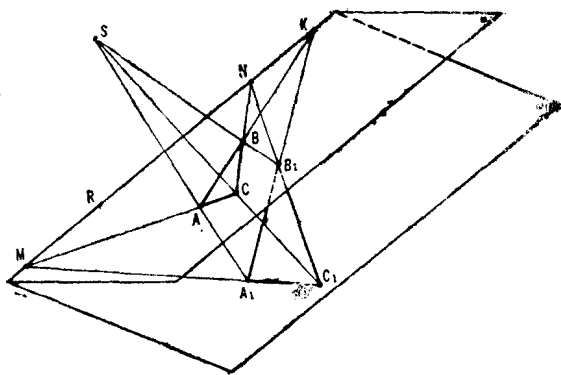


图1—11 透视仿射对应的两个平面

这种从对应中心(可在无穷远)射影的方法建立的空间两平面场的同素(点、线、图形)对应,即叫做透视仿射对应,或亲似对应。

如果把一个平面(例如 ω)绕 R 轴旋转,与另一平面 ω_1 重合成为一个平面,则形成如图1—12所示的形式,这种形式更便于读图和绘图。

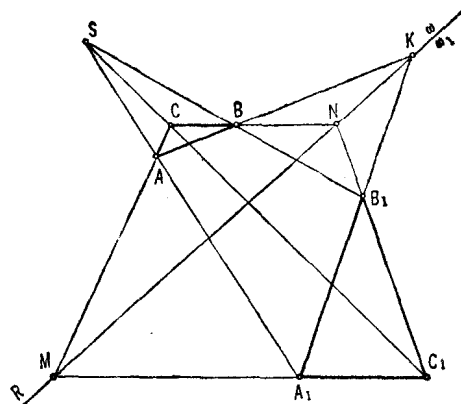


图1—12 透视仿射对应展开图

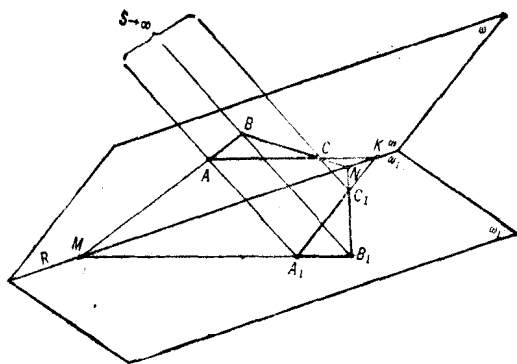


图1—13 S点移至无穷远

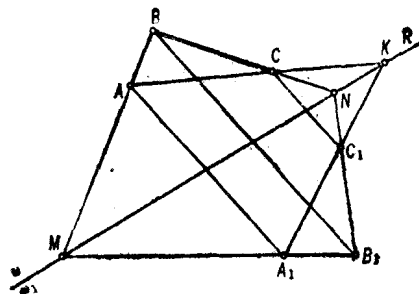


图1—14 图1—13的展开图

如果 S 点移至无穷远,则形成图1—13和图1—14(展开)的情况。后者的 AA_1 、 CC_1 与 BB_1 成平行线段,且对应边的延长线亦相交于仿射对应轴 R 上。

(二) 透视仿射对应条件

建立透视仿射对应的条件有二:第一,必须有仿射对应轴;第二,必须具有一对对应点。

例如在图1—15中,对应轴 R 和一对对应点 A 、 A_1 为已知,则可根据已知的点 B 求点 B_1 。方法是:连 AB ,使 AB 的延长线与对应轴 R 相交于 M 点。再连 A_1M ,过点 B 作线平行于 AA_1 并与 A_1M 相交于点 B_1 。点 B_1 即为所求的与点 B 对应的点。同样,已知点 C 可求出点 C_1 。

在图1—15中,如果 AB 连线平行于对应轴 R 时,则可按图1—16所示的方法,求出点 B_1 :先连 AB ,过点 A_1 作线平行 AB ,再过点 B 作线 BB_1 平行 AA_1 ,两线相交于点 B_1 ,该 B_1 点即为所求的与点 B 对应的点。

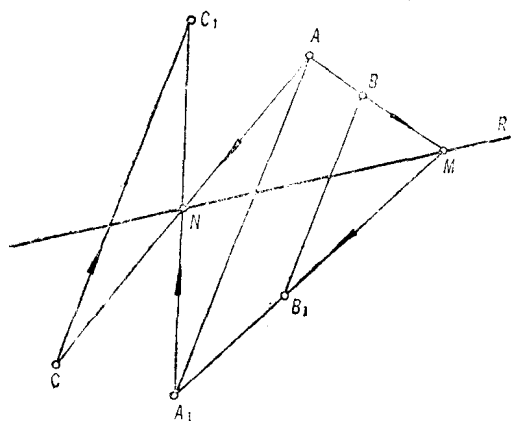


图1—15 已知 B 、 C 两点,求与其对应点 B_1 和 C_1

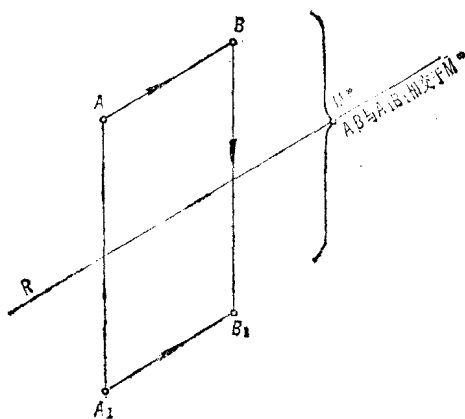


图1—16 已知点 B 求其对应点 B_1

如果对应轴未给出,可根据两已知的对应的图形求出对应轴。如图1—17所示,已知两个对应的三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 。这时,可根据这一对对应的平面图形求出对应轴。方法是:延长 BA 和 B_1A_1 ,其延长线相交于 M 点,再延长 BC 和 B_1C_1 ,其延长线相交于点 N , M 点和 N 点的连线即为对应轴 R 。如果对应图形为一对其它图形,也可按同样的方法求出对应轴。对应轴求出后,再找一对对应点,即可建立透视仿射对应了。

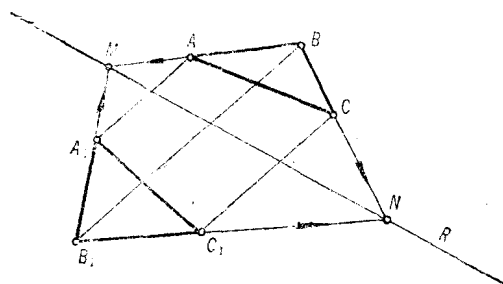


图1—17 已知一对对应图形,求仿射对应轴

(三) 透视仿射对应举例

下面举两个例题,说明透视仿射对应的应用。

【例1】 已知两相交且互相平分的直线 MN 和 ST ,试求以该两直线为共轭径的椭圆

及其长短径。

解：解这个题目，首先应找出与所求椭圆成仿射对应的圆，然后再用仿射对应关系作出所求的椭圆。但是圆心在哪里还不知道，所以第一步要先找出圆心，见图1—18。连 MT ，令 MT 为仿射对应轴 R ，平分 MT 得中点5，过点5作 MT 的垂线 $5C_1$ ，以点5为圆心、 $5M$ 为半径，作半圆 Q 与 $5C_1$ 交于点 C_1 ，点 C_1 即为所找圆心。点 C_1 与点 C 为一对对应点，连 CC_1 即为对应的方向，再以 C_1 为圆心， C_1M （或 C_1T ）为半径，作圆 L ，圆 L 即与所求椭圆成透视仿射对应。作 CC_1 的中垂线 $u6$ ，该中垂线与对应轴相交于点 u ，以点 u 为圆心， uC （或 uC_1 ）为半径，作圆 K ，该圆 K 与对应轴 R 相交于 E 、 F 两点。连 CE 、 CF ，连 C_1E 、 C_1F 。根据平面几何的道理： $CE \perp CF$ ， $C_1E \perp C_1F$ 。 CE 、 CF 和 C_1E 、 C_1F 就是对应的两个场的主方向。有了主方向，就可以求出圆 L 上的两互相垂直的直径 1_1-2_1 和 3_1-4_1 ，然后再分别过 1_1 、 2_1 点画对应方向 CC_1 的平行线，找出与 1_1 、 2_1 对应的 1 、 2 两点， $1-2$ 即为所求椭圆的长径，同理再求出与 3_1 、 4_1 点对应的 3 、 4 两点， $3-4$ 即为所求椭圆的短径。有了长、短径，即可应用长、短径画出所求的椭圆 J 。

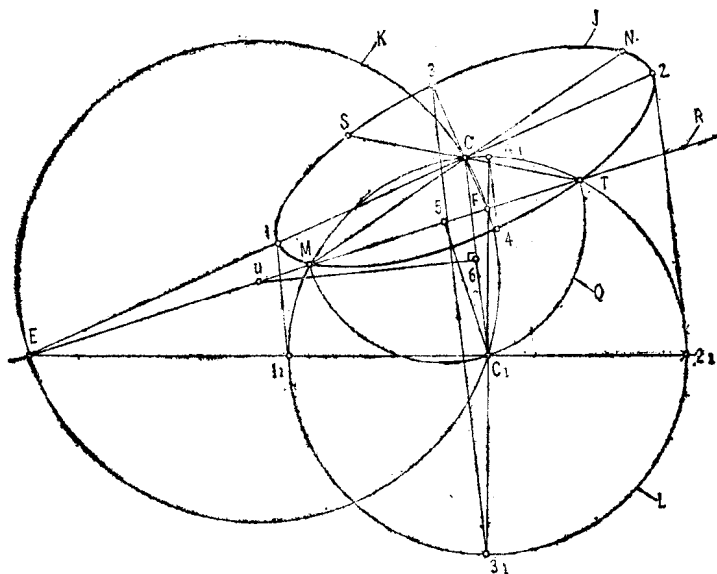


图1—18 求椭圆的长、短径

从上面例题可看出：对于任意相交且互相平分的二直线，都可以用透视仿射对应原理求出以其为共轭径的椭圆的长径和短径。

【例2】已知一六棱锥被 P 平面所截，求截交线。 P 平面由对应轴 P_H 和 M 点所确定。

解： P 平面和 H 平面是两个对应的场， P_H 是对应轴，截交线与六棱锥的底边为两个对应的图形。我们可以利用透视仿射对应的方法，将该题解出，见图1—19。

在传统的方法中，是包括棱线作一系列的辅助平面，分别求出辅助平面与 P 平面的交线，然后再求交线与棱线的交点，将各交点连线，即得截交线。利用透视仿射对应的方法，则只需作一次辅助平面即可，譬如图中的 Q 平面（即迹线为 Q_H ），系包括 S -6棱所作的铅垂面，先求这个平面与 P 平面的交线。为此，我们在 P 平面上作两条线，分别为 MV 和 MT ， Q_H 与这两条线在 H 面上的次投影 mV 和 mT 相交于 7 、 8 两点，由 7 、 8 两点向上作铅垂线，该两铅垂线与 MV 和 MT 分别交于 7_1 、 8_1 两点，连 7_1 、 8_1 即可得 P 平面与 Q 平面的交线，