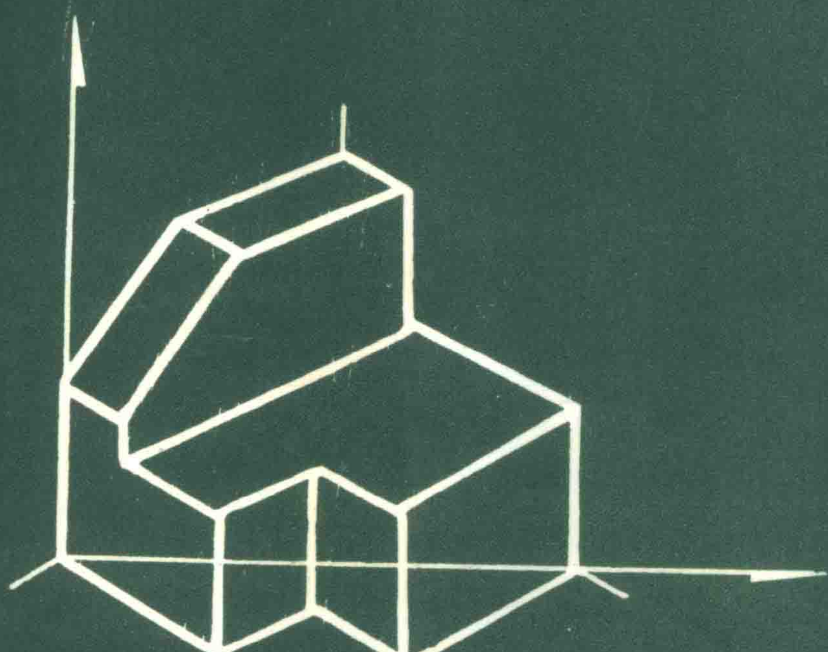
轴测投影

傅钟兰　编著



中国铁道出版社

轴测投影

傅钟兰 编著

中国铁道出版社
1988年·北京

内 容 简 介

本书介绍了轴测投影的原理和绘制轴测投影图的方法，共分十章：一至三章介绍了点、线、面、体轴测投影的画法；四、七两章介绍了线、面、体相交，其贯穿点、截交线和相贯线的求法；五、九两章分别介绍了零件轴测图和装配轴测图的画法；六、八两章分别介绍了轴测图的润饰方法，以及轴测图阴影的画法；第十章介绍了用计算机绘制轴测投影图的原理和方法。

本书可供机械设计制造有关科技人员及电大、职大制图专业的师生参考与学习。

轴 测 投 影

傅钟兰 编著

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑 苏国镇 封面设计 张洪信 杨建中

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 $\frac{1}{16}$ 印张：10.5 字数：253 千

1 9 8 8 年10月 第 1 版 第 1 次印刷

印数：0001—1600册 定价：4.95 元

前　言

近年来随着图学的发展，在画法几何、机械制图以及计算机绘图等方面，对轴测投影画法的研究，越来越得到重视了。因为在表达一个空间物体时，画一张轴测图，其表达效果往往胜过一张照片。因此，在生产中常常利用这种图，辅助说明空间物体的正投影图，以增强识图的效果；在产品说明书中利用这种图来表达部件间的装配关系，有直观性强的优点，以提高宣传效果；在编写教材或教师讲课当中，利用这种图，可以加深同学对问题的理解，从而可提高教学效果。

当前，在计算机日益普及的时代，用计算机绘制轴测投影图的技术也逐渐臻于完善，不但可以用计算机直接绘制轴测投影图，还可以在显示终端的屏幕上，观察其中间结果，以便于修改，最后在绘图机上绘出正确无误的轴测图来。同时可以在图中，加润饰、涂颜色、添阴影。这样不仅增强了图的立体感，而且还减轻了画这种图所带来的繁重工作。

作者根据多年来的教学实践，积累了画轴测投影图的点滴经验，并参考了有关文献，编写成本书。其中既包括画轴测投影图的一般理论和方法，也包括用计算机绘制轴测投影图的原理和方法，供读者参考。编写中力求文字简练，说理详明，以实用为目标，使有画法几何基础知识的读者即可学通读懂。

本书由崔鸿昌同志审校，由张洪信同志担任描图工作、张玉琴同志在描图方面也协助做了不少工作。铁道部第三设计院何翠敏、杨枫春同志在提供计算机绘图设备方面给予大力协助，特在此一并致谢。

由于作者水平所限，错误和不妥之处在所难免，望读者批评指正。

作　者　傅钟兰

目　　录

第四章　平面与立体相交、直线与立体相交

第五章　零件轴测图的画法

第六章　轴测图的润饰方法

第七章　轴测图中两立体表面相交的画法

第一章　轴测投影的基本原理

一、概　　述

轴测投影也属于平行投影，不过其投影面不是原来那三个坐标面，而是与三个坐标面都相交的某平面，叫做轴测投影面。换句话说，就是一个一般位置平面，在个别情况下为平行面（例如，正面斜轴测投影，其轴测投影面为一正平面）。如图1－1中的A点，系表示在三个坐标平面中的一个点，该点的轴测投影为A_1。A点在投影时，连同其三个坐标轴OX，OY，OZ一起沿着D的方向向轴测投影面F进行投影，首先得出三个坐标轴在F面上的轴测投影O_1X_1，O_1Y_1，O_1Z_1，然后再求出A点本身的轴测投影A_1来。其投影方式也是按平行投影原理进行投影，如果投影线垂直轴测投影面F，则称这种轴测投影为正轴测投影。轴测投影面F如与三个坐标平面的交角相等，则称这种正轴测投影为正等测投影。如果轴测投影面F与其中两个坐标平面的交角相等，则称为正二测投影。依此类推还有正三测投影。其中最常用的是正等测投影，其次是正二测投影，最不常用的是正三测投影。本书所讨论的主要内容为正等测投影。对正二测投影和其它轴测投影只作重点地介绍。

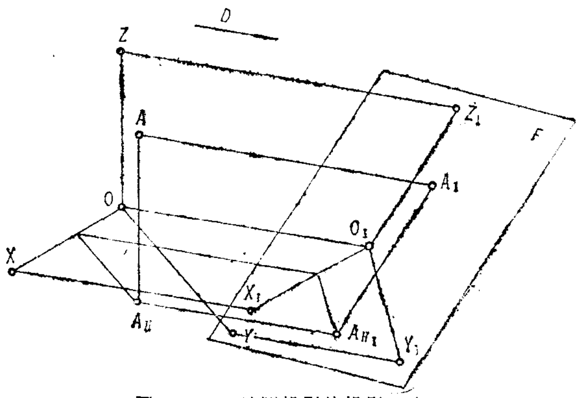


图1－1　轴测投影的投影方式

如果轴测投影面F不是一个一般位置平面，而是一个正平面（当然也可能是水平面或侧平面），而投影方向又不垂直于轴测投影面时，则称这种轴测投影为正面斜轴测投影。这是最常用的一种斜轴测投影。本书也适当地介绍了斜轴测投影。

二、正轴测投影的变形系数和轴间角

画轴测投影图时，有两个主要条件：一个是各轴的变形系数；另一个是各轴测投影轴的轴间角。如果知道这两个条件，则画轴测投影图就轻而易举了。现将正轴测投影的变形系数和轴间角介绍如下：

（一）变形系数

1.　正等测投影的变形系数

将轴测投影面F放在三个坐标面当中，如图1－2所示。由于F面与三个坐标面的夹角相等，所以三个轴测轴与三个坐标轴的夹角α、β、γ也相等。

$$\therefore \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$$

$\cos\alpha$，$\cos\beta$和$\cos\gamma$分别定义为X、Y、Z轴在F面的变形系数。设这三个轴的变形系数分别为p、q、r。

在正等测投影中，三个轴的变形系数相等，即：

$$p=q=r \qquad (1-1)$$

按正轴测投影原理：$OO_1 \perp F$，故根据余弦定理，向量OO_1与三个坐标轴的夹角的余弦的平方和等于1。

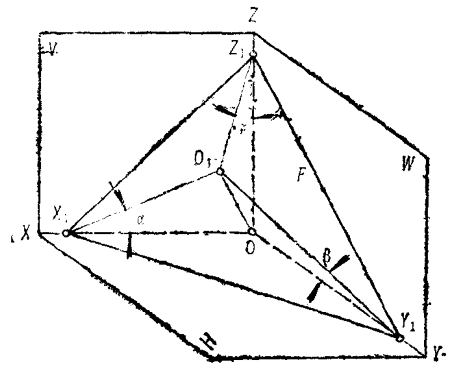


图1—2　正轴测投影面F

即：

$$\cos^2(90°-\alpha)+\cos^2(90°-\beta)+\cos^2(90°-\gamma)=1$$

或　$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$

又∵　$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，

$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$，

$\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma$，

∴　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$

即：　$$p^2+q^2+r^2=2 \qquad (1-2)$$

依（1—1）式得：　$3p^2=3q^2=3r^2=2$

∴　$$p=q=r=0.82 \qquad (1-3)$$

从上式可以看出，在正等测投影中，三个轴的变形系数都为0.82，即正等测投影的棱边长度均相等，且都等于原长的0.82倍。如简化为1，这时等于把图尺寸放大1/0.82=1.22倍。

2.　正二测投影的变形系数

在正二测投影中，设X轴与Z轴的变形系数相等，Y轴的变形系数等于它们的1/2，即：

$$p=r,\quad q=p/2。$$

把（1—2）式完全换成p，得：

$$p^2+\frac{p^2}{4}+p^2=2,\qquad p=\frac{2}{3}\sqrt{2}=0.94$$

∴　$p=r=0.94$，　$q=0.94/2=0.47$

也就是说，在正二测投影中，X轴和Z轴的变形系数相等，等于0.94，Y轴的变形系数为0.47。在正二测投影中，三个轴的变形系数之比为：$X:Y:Z=0.94:0.47:0.94$或$1:0.5:1$。后者等于将图尺寸放大1.06倍。

（二）轴间角

1.　正等测投影的轴间角

正等测投影的轴间角全等，均为120°，现证明如下：如图1—2所示，三个直角三角形$\triangle OO_1X_1$，$\triangle OO_1Y_1$，$\triangle OO_1Z_1$全等，

则　$OX_1=OY_1=OZ_1$；$O_1X_1=O_1Y_1=O_1Z_1$。

又因三个等腰直角三角形$\triangle OX_1Y_1$，$\triangle OY_1Z_1$，$\triangle OX_1Z_1$互相全等，所以，$X_1Y_1=$

$Y_1Z_1=Z_1X_1$，因此可根据三个等腰三角形$\triangle O_1X_1Y_1$，$\triangle O_1Y_1Z_1$，$\triangle O_1X_1Z_1$互相全等的道理证明：

$$\angle X_1O_1Y_1=\angle Y_1O_1Z_1=\angle Z_1O_1X_1=120^\circ \text{（如图 1—2）}$$

依据如上证明，可将图 1—2 所示的正等轴测投影面F改画成图 1—3(a)形式，使O_1Z_1呈竖直方向，O_1X_1、O_1Y_1各与水平成30°角，形成正等轴测投影的坐标系统。为适应不同条件下作图的特点和方便，现指出几种简便轴间角画法，图 1—3(b)、(c)、(d)为正等测投影轴的简便画法。最常用的是图(b)的画法，即先画一水平线，然后按竖直的方向画出O_1Z_1轴，再利用30°三角板与丁字尺，将O_1X_1和O_1Y_1两个轴画出。

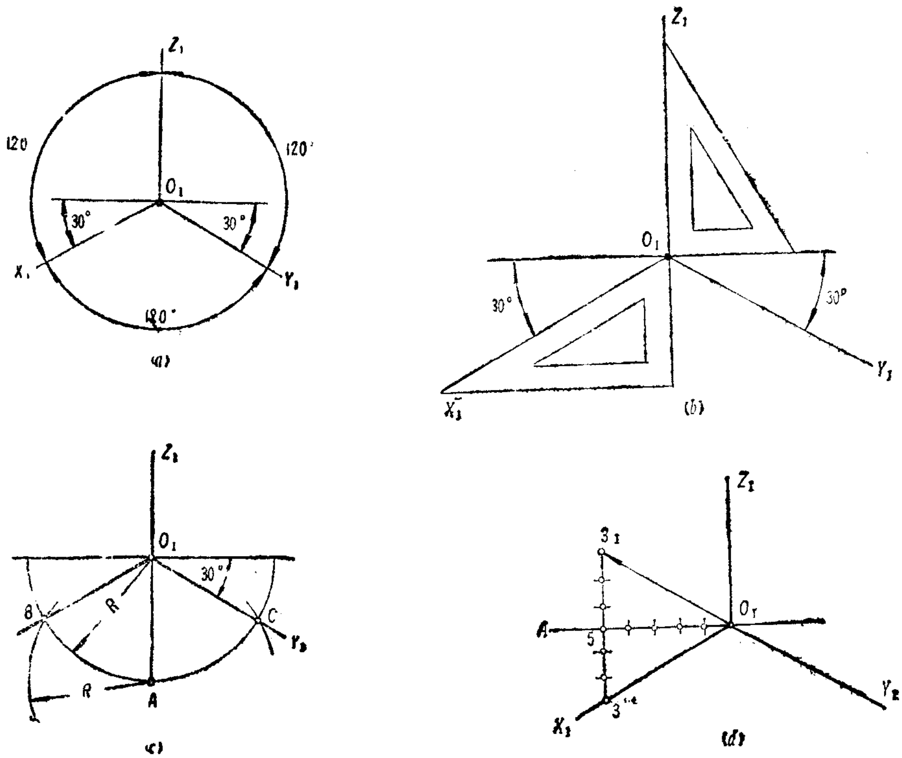


图 1—3　正等测的轴间角及其简便画法

在不借助于30°三角板的情况下，可采用图(c)或图(d)的画法。画轴测草图时，也可采用图(d)的画法。图(c)的画法：首先作O_1Z_1轴，并以O_1点为圆心，以任意R为半径，画一半圆弧交O_1Z_1轴的延长线于A点，再以A点为圆心，以相同半径R画弧交第一个弧于B点和C点，连O_1B即为O_1X_1轴，连O_1C即为O_1Y_1轴。图(d)的画法：首先作垂线O_1Z_1，然后过O_1点作水平线O_1A，在O_1A上自O_1点量 5 个长度单位得点 5，再在点 5 的上、下两个方向各量 3 个长度单位，得点3_1和点 3，连$O_1 3$即为O_1X_1轴，3_1O_1的延长线即为O_1Y_1轴。

2.　正二测投影的轴间角

正二测投影的轴间角，可按下述分析导出：如图 1—2 和图 1—4(a)所示，取$p=r$，$q=p/2$（或$=r/2$）。

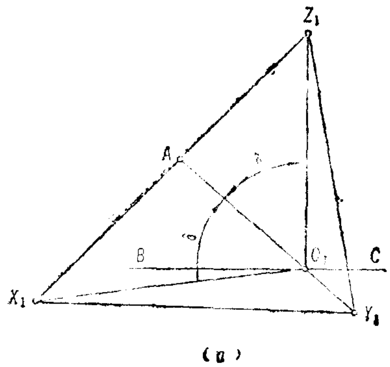
所以
$$\cos\alpha=\cos\gamma$$
即
$$\alpha=\gamma$$
因此，两个直角三角形$\triangle OO_1Z_1$和$\triangle OO_1X_1$是全等的。

所以 $OX_1 = OZ_1 \qquad O_1X_1 = O_1Z_1$

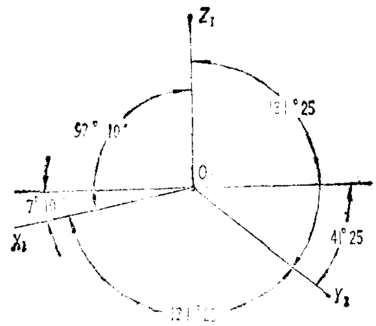
又因 两个直角三角形$\triangle OX_1Y_1$和$\triangle OZ_1Y_1$全等。

所以 $X_1Y_1 = Y_1Z_1$

而$\triangle O_1X_1Z_1$和$\triangle Y_1X_1Z_1$是以X_1Z_1为公共边的两个等腰三角形，过其两个顶点O_1和Y_1连线并延长，使之与X_1Z_1交于A点（参看图1—4（a））。



（a）



（b）

图1—4 正二测投影轴间角的证明

则有： $O_1A \perp X_1Z_1$； $AX_1 = AZ_1 = \frac{1}{2}X_1Z_1$

如图1—4中所示，O_1Z_1为铅垂线，BC为水平线．如设正投影轴$OX_1 = OZ_1 = a$，则：$X_1Z_1 = \sqrt{2}\,a$．又因$p = \frac{2}{3}\sqrt{2}$，所以，$O_1X_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,OX_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,a$。

因此 $\sin\delta = \frac{AX_1}{O_1X_1} = \frac{1/2\cdot\sqrt{2}\,a}{2/3\cdot\sqrt{2}\,a} = \frac{3}{4} = 0.75$

所以 $\delta = 48°35'$

因此 $\angle X_1O_1Z_1 = 2\delta = 97°10'$

$\angle BO_1X_1 = 2\delta - 90° = 7°10'$

$\angle Y_1O_1Z_1 = \angle Y_1O_1X_1 = 180° - \delta = 180° - 48°35' = 131°25'$

$\angle CO_1Y_1 = \angle AO_1B = 90° - \delta = 41°25'$

综上所述，可知正二测投影的轴间角如图1—4(b)所示。

作正二测投影的轴间角时，可以用按比例作图的办法简单地画出。如图1—5所示，先画出O_1Z_1轴，然后按1/8的比例，将O_1X_1轴画出（水平为8个单位长度，竖直为1个单位长度）。再按7/8的比例，将O_1Y_1轴画出（水平为8个单位长度，竖直为7个单位长度）。

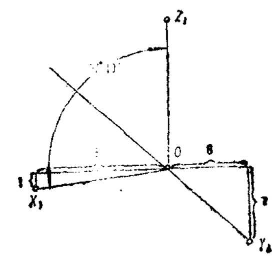


图1—5 正二测投影轴的画法

或者先按1/8的比例，画出O_1X_1轴后，再将$\angle X_1O_1Z_1$二等分，其分角线的延长线即为O_1Y_1轴。

下面以等边六面体为例，说明正等测和正二测投影的变形系数和放大的关系（参看图1—6和图1—7）。

如图所示，先画定正等测或正二测投影的坐标系，再分别以各系统的变形系数比0.82：

0.82:0.82或0.94:0.47:0.94，画出示例等边六面体的相应轴测投影图（如虚线所示），最后以各系统的放大比 1:1:1 或 1:0.5:1，画出实用的正等测或正二测投影图（如实线图形）。通过放大后的实用图形制图过程，可以领会到经放大而简化的方便性。

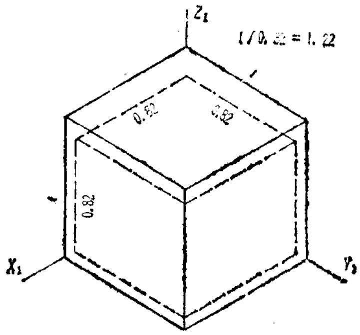


图 1—6　正等测投影的变形系数与放大的关系

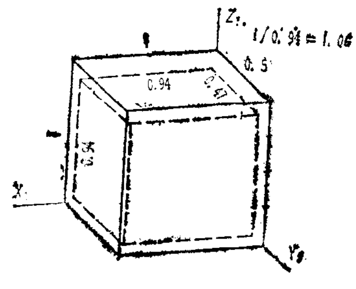
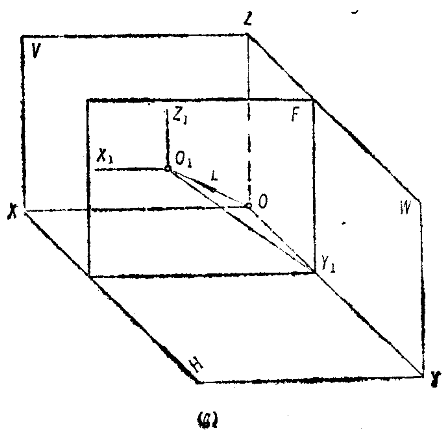


图 1—7　正二测投影的变形系数与放大的关系

三、斜轴测投影的变形系数和轴间角

比较常用的轴测投影，除了前面介绍的两种正轴测投影外，还有斜轴测投影，它又可分为斜等测投影和斜二测投影。斜二测投影是二等测斜轴测投影的简称，它和正二测投影是相互对应的。但正二测投影的投影线垂直于轴测投影画，而斜二测投影的投影线，则不垂直于轴测投影面。现在将斜轴测投影的原理介绍如下：

斜轴测投影的投影面都是平行面，一般多为正平面（这时叫正面斜轴测）。但有时亦可为水平面（这时叫军用透视——参考图 4—14）。如图 1—8 中的F面即为正平面。投影时，将空间的物体随同三个坐标轴，沿着L方向一齐投影到F面上，这样，所得到的投影即为斜轴测投影。由于F面平行于正平面XOZ，故X轴和Z轴毫无变形地投影到F面上。因此，X轴和Z轴的变形系数都等于 1。而Y轴的变形系数，则可根据具体情况，使其大于 1；小于 1；或等于 1。如果大于 1 或小于 1，则所得的投影叫斜二测投影；如果等于 1，则所得的投影叫斜等测投影。下面以圆柱体为例，说明这种轴测投影的优缺点。



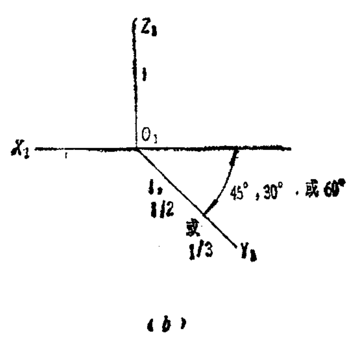


图 1—8　斜二测投影的投影原理

例如，画一个圆柱体的斜二测投影时，可以将圆柱体直立放置，也可以使柱底平行于正

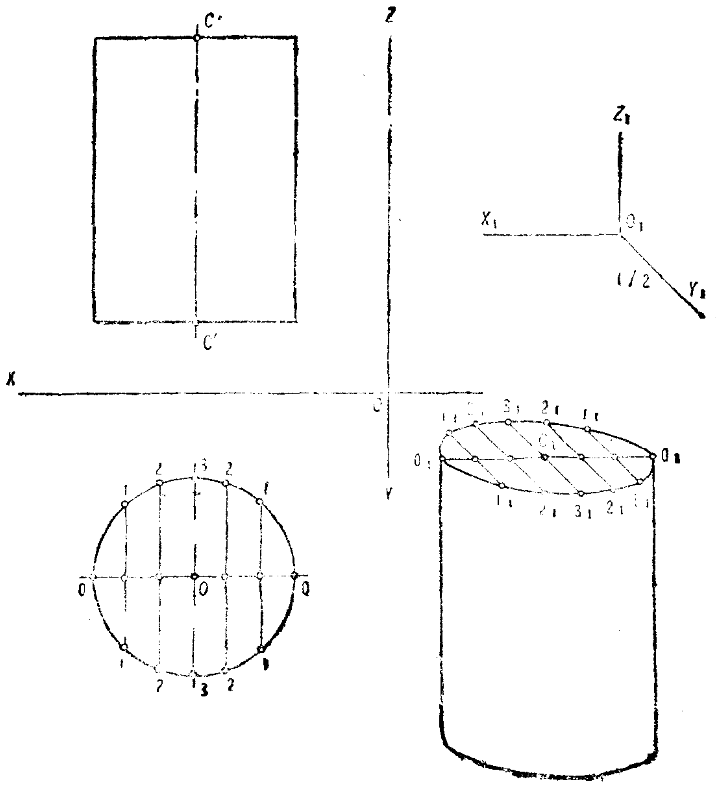


图 1 — 9　底面平行于H面的圆柱体斜二测投影画法

平面放置，从作图方便的角度来考虑，当然把柱底平行于正平面能使作图简化，因为这样放置可以免去作椭圆的麻烦。如图 1 — 9 所示，左面是给出的圆柱体正投影（直立放置），右下为其斜二测投影。在这个图中，要用坐标法画其上底和下底的两个椭圆（坐标法请参考图 3 —18）。画椭圆时，如用曲线板则比较麻烦。若如图 1 —10所示，使其底与正面平行，则其斜二测投影不必作椭圆，只是把正面投影的圆，原封不动地照画过来就可以了。如图 1 —10右下所示，图中，使Y轴的变形系数等于 1，所以这个图即为斜等测投影图。

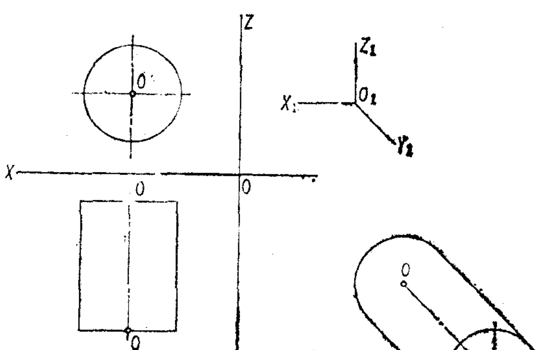


图 1 —10　底面平行于V面的圆柱体的斜等测投影的画法

因此，当物体的正面圆多时，采用这种投影较好。这种轴测投影，其变形系数之比，多为$X:Z:Y=1:1:1/2$。Y轴的变形系数一般采用1/2；但当物体Y方向较长时，为了节省图面，亦可采用1/3；有时物体Y方向较短，也可采用 1 。其轴间角，如图 1 — 8 (b)所示，X轴和Z轴为90°，Y轴与水平成45°或30°，个别的可为60°。这种轴测投影的应用，在后面章节还要举例介绍。

四、透视仿射对应及其应用

（一）透视仿射对应原理概述

透视仿射对应又称亲似对应，属于射影几何范畴。把它作为一种作图方法应用于轴测投影中的相贯线、截切线和截断面的求制均有实效，现概要予以介绍。如图1—11所示，相交的两个平面ω和ω_1交于R轴，以S点（亦可在无穷远处）射出的射影光线，把平面ω上的点、直线或图形射影于ω_1平面上，这样ω平面上的$\triangle ABC$便被射影成ω_1平面上的$\triangle A_1B_1C_1$。由图可见，ω与ω_1平面上的相应点、线形成一一对应关系。ω与ω_1的交线R及其上的点则为自身对应，是对应中的二重直线和二重点的集合，故R称为对应轴。两个平面上各对应直线的交点均相交于对应轴上，如图中的K点是AB和A_1B_1延长线的交点，N点为CB和C_1B_1延长线的交点，M点为CA和C_1A_1延长线的交点。S点则称做对应中心。平面ω和ω_1可看作是点和直线的场。

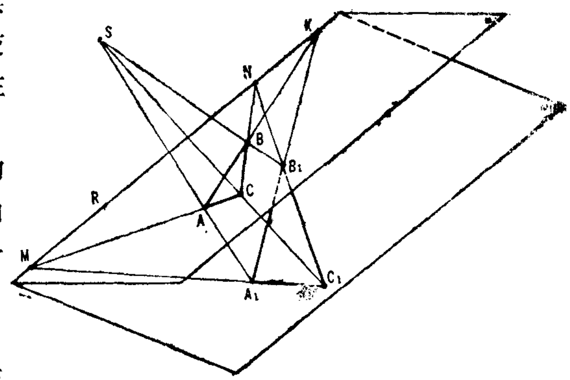


图1—11　透视仿射对应的两个平面

这种从对应中心（可在无穷远）射影的方法建立的空间两平面场的同素（点、线、图形）对应，即叫做透视仿射对应，或亲似对应。

如果把一个平面（例如ω）绕R轴旋转，与另一平面ω_1重合成为一个平面，则形成如图1—12所示的形式，这种形式更便于读图和绘图。

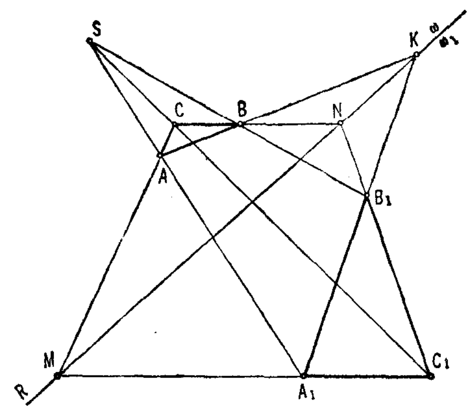


图1—12　透视仿射对应展开图

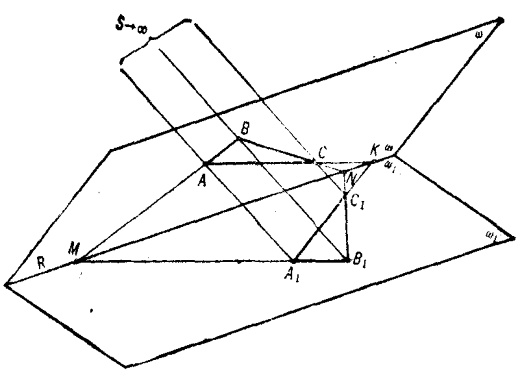


图1—13　S点移至无穷远

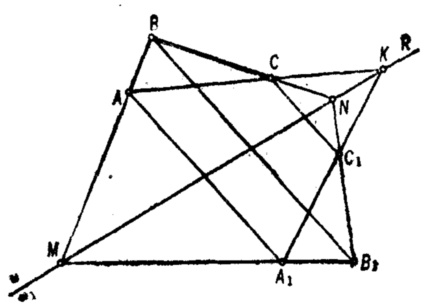


图1—14　图1—13的展开图

如果S点移至无穷远，则形成图 1—13和图 1—14（展开）的情况。后者的AA_1、CC_1与BB_1成平行线段，且对应边的延长线亦相交于仿射对应轴R上 。

（二）透视仿射对应条件

建立透视仿射对应的条件有二：第一，必须有仿射对应轴；第二，必须具有一对对应点。

例如在图 1—15中，对应轴R和一对对应点A、A_1为已知，则可根据已知的点B求点B_1。方法是：连AB，使AB的延长线与对应轴R相交于M点。再连A_1M，过点B作线平行于AA_1并与A_1M相交于点B_1。点B_1即为所求的与点B对应的点。同样，已知点C可求出点C_1。

在图 1—15中，如果AB连线平行于对应轴R时，则可按图 1—16所示的方法，求出点B_1：先连AB，过点A_1作线平行AB，再过点B作线BB_1平行AA_1，两线相交于点B_1，该B_1点即为所求的与点B对应的点。

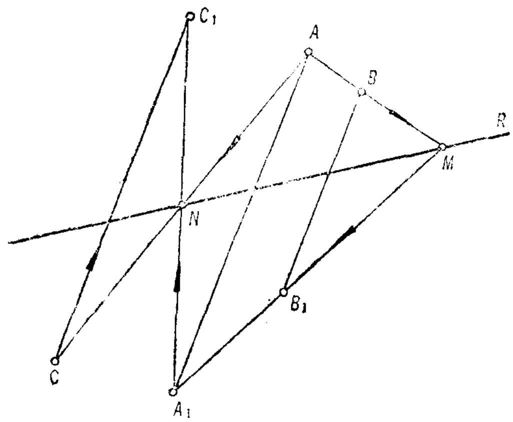


图 1—15　已知B、C两点，求与其对应点B_1和C_1

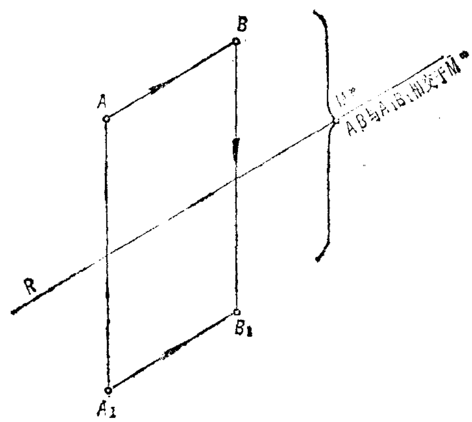


图 1—16　已知点B求其对应点B_1

如果对应轴未给出，可根据两已知的对应的图形求出对应轴。如图 1—17所示，已知两个对应的三角形$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$。这时，可根据这一对对应的平面图形求出对应轴。方法是：延长BA和B_1A_1，其延长线相交于M点，再延长BC和B_1C_1，其延长线相交于点N、M点和N点的连线即为对应轴R。如果对应图形为一对其它图形，也可按同样的方法求出对应轴。对应轴求出后，再找一对对应点，即可建立透视仿射对应了。

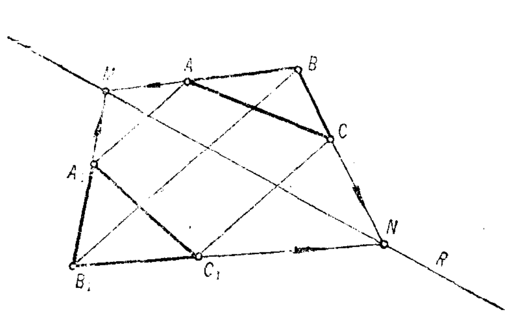


图 1—17　已知一对对应图形，求仿射对应轴

（三）透视仿射对应举例

下面举两个例题，说明透视仿射对应的应用。

【例 1】　已知两相交且互相平分的直线MN和ST，试求以该两直线为共轭径的椭圆

及其长短径。

解： 解这个题目，首先应找出与所求椭圆成仿射对应的圆，然后再用仿射对应关系作出所求的椭圆。但是圆心在哪里还不知道，所以第一步要先找出圆心，见图1—18。连MT，令MT为仿射对应轴R，平分MT得中点5，过点5作MT的垂线$5C_1$，以点5为圆心、5M为半径，作半圆Q与$5C_1$交于点C_1，点C_1即为所找圆心。点C_1与点C为一对对应点，连CC_1即为对应的方向，再以C_1为圆心，C_1M（或C_1T）为半径，作圆L，圆L即与所求椭圆成透视仿射对应。作CC_1的中垂线$u6$，该中垂线与对应轴相交于点u，以点u为圆心，uC（或uC_1）为半径，作圆K，该圆K与对应轴R相交于E、F两点。连CE、CF、连C_1E、C_1F。根据平面几何的道理：$CE \perp CF$，$C_1E \perp C_1F$。CE、CF和C_1E、C_1F就是对应的两个场的主方向。有了主方向，就可以求出圆L上的两互相垂直的直径1_1—2_1和3_1—4_1，然后再分别过1_1、2_1点画对应方向CC_1的平行线，找出与1_1、2_1对应的1、2两点，1—2即为所求椭圆的长径，同理再求出与3_1、4_1点对应的3、4两点，3—4即为所求椭圆的短径。有了长、短径，即可应用长、短径画出所求的椭圆J。

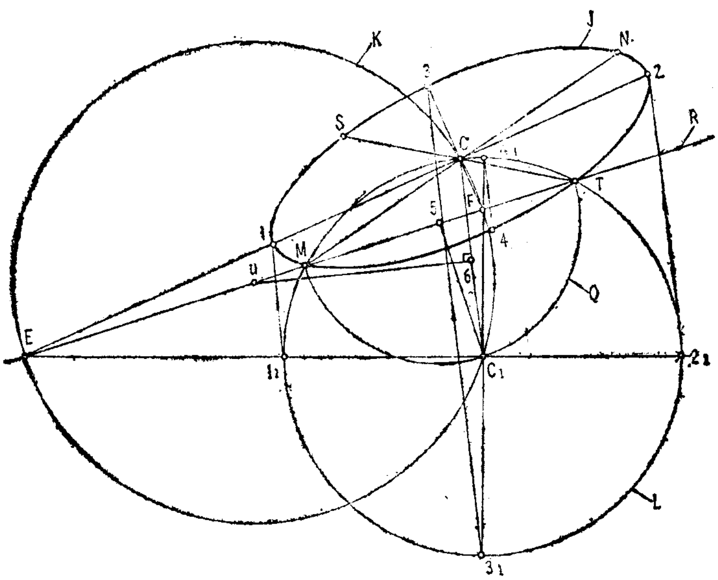


图1—18 求椭圆的长、短径

从上面例题可看出：对于任意相交且互相平分的二直线，都可以用透视仿射对应原理求出以其为共轭径的椭圆的长径和短径。

【例2】已知一六棱锥被P平面所截，求截交线。P平面由对应轴P_H和M点所确定。

解： P平面和H平面是两个对应的场，P_H是对应轴，截交线与六棱锥的底边为两个对应的图形。我们可以利用透视仿射对应的方法，将该题解出，见图1—19。

在传统的方法中，是包括棱线作一系列的辅助平面，分别求出辅助平面与P平面的交线，然后再求交线与棱线的交点，将各交点连线，即得截交线。利用透视仿射对应的方法，则只需作一次辅助平面即可，譬如图中的Q平面（即迹线为Q_H），系包括S-6棱所作的铅垂面，先求这个平面与P平面的交线。为此，我们在P平面上作两条线，分别为MV和MT，Q_H与这两条线在H面上的次投影mV和mT相交于7、8两点，由7、8两点向上作铅垂线，该两铅垂线与MV和MT分别交于7_1、8_1两点，连7_1、8_1即可得P平面与Q平面的交线，