大学

数学系

自学丛书

高等代数

·下册·

GAO DENG DAISHU

大学数学系自学丛书

高 等 代 数

下 册

东北师范大学

贺昌亭 主编

辽 宁 人 民 出 版 社

一九八三年·沈阳

大学数学系自学丛书

高等代数

（下）

贺昌亭　主编

*

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行

沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32　印张：19½

字数：520,000　印数：1—16,200

1983年7月第1版　1983年7月第1次印刷

统一书号：7090·227　定价：2.50元

责任编辑：于　乙
封面设计：安今生

目　录

练习与习题解答

第七章　集合与映射

通过以上几章的学习，我们可以初步地看到高等代数讨论问题——提出问题、分析问题和解决问题的一些基本特点。

着眼于事物的总体，从事物的总体考虑问题和提出问题。

例如，在初等代数讨论了解二、三元线性方程组的基础上，我们自然地着眼于未知数的个数与方程的个数都不受限制的所有的线性方程组的总体，从线性方程组的总体考虑问题，提出一般线性方程组的求解问题。

对于给定的一个线性方程组来说，我们也是着眼于它的所有的解，从解的总体考虑问题，提出解的结构问题。

再如，在学过一元二次和三次多项式的因式分解问题的基础上，我们自然地着眼于次数不受限制的所有一元多项式的总体，从任意的一元多项式的总体考虑问题，提出一元多项式的整除性问题。

类似地，在学了一元一次和一元二次方程的解法之后，也自然的要考虑一元高次方程的求解问题，提出一元方程的根式解问题。

又如，在第一章关于数的讨论中常常也是这样提出问题的。由于数数的需要，我们认识了个别的自然数，进而着眼于所有自然数的总体，从自然数的总体考虑问题，提出自然数的结构和运算的封闭性等问题。对整数、有理数、实数和复数的讨论也是（或者也可以是）这样提出问题的。

从以上说明中可以看出，着眼于事物的总体，从事物的总体考虑问题和提出问题是高等代数的一个重要特点。

着眼于事物的变化和事物间的相互关联，从事物的变化和相互

关联中寻求分析问题的门径，找出解决问题的线索和方法.

例如，线性方程组的求解问题，我们从线性方程组的变形中得到启发，分析同解变换的规律，从这种“形变解不变”的规律中找出解决问题的线索和方法.

对于线性方程组解的结构问题，我们也是从齐次线性方程组与非齐次线性方程组解的变化和相互关联中得到启发，分析解的变化与相互关联的规律，从这种规律中找出解决问题的线索和方法.

再如，把线性方程组抽象为矩阵，对矩阵的行做初等变换来解线性方程组的问题，我们通过矩阵与行列式之间的联系，从这种由矩阵到行列式的变化和相互关联中得到启发，分析矩阵在初等变换下的规律，从“形变秩不变”的规律中找出解决问题的线索和方法.

又如，一元多项式的整除性问题，我们从由多项式到因式、公因式和最大公因式的变化和相互关联中得到启发，分析因式、公因式和最大公因式的规律，从这种规律中找出解决问题的线索和方法.

类似的，对一元高次方程的根式解问题，我们也是从方程的变形和相互关联中找出解决问题的线索和方法.

从以上说明中可以看出，着眼于事物的变化和事物间的相互关联，从事物的变化和相互关联中寻求分析问题的门径，找出解决问题的线索和方法是高等代数的又一重要特点.

运算是讨论问题的基础又是讨论的基本课题，这也是高等代数的一个显著的特点.

例如数的四则运算既是讨论数的基础也是数的讨论的基本课题；而对于多项式，则是在数的四则运算基础上来研究多项式运算的基本性质的；又如 n 维向量空间就是以数的运算为基础来研究数组的一些运算性质的.

综上所述，我们可以初步地看到，着眼于事物的总体，从事物的总体考虑问题和提出问题；着眼于事物的变化和相互关联，从事

物的变化和相互关联中寻求分析问题的门径，找出解决问题的线索和方法；以运算为讨论的基本课题是高等代数的三个重要特点。

一般地说从事物的总体上和事物的变化以及相互关联中掌握事物是近代数学的普遍特点，而以运算作为讨论的基本课题则是代数学区别于其它数学学科的显著特征。

本章在前几章的基础上，初步介绍抽象代数中一些最普遍和最基本的概念和方法，为以后几章的讨论做好必要的准备。同时，对我们系统掌握和深入理解以前几章的内容和方法也是有启发的。

§1 集　合

在第一章我们曾经提到过集合——任意一些事物的总体——的概念。因此，对于集合这一数学用语我们并不陌生，由于从事物的总体上考虑问题和提出问题是高等代数的一个重要特点，于是，我们把事物的总体这样一个概念明确起来，突出出来是非常必要的。这在数学上就是用集合这一术语来表达的。即任何一些事物做为一个总（整）体就叫做一个集合。在数学上把集合当做最基本、最原始的概念，无须另做其它说明。其实，的确也再没有比这更为简单的解释了。

我们已经知道集合、集合的相等、元素、子集等概念及有关的术语和符号。特别地，空集 ϕ 是有实际意义的，它是客观现象的数学反映。例如，我们用通解这一名称表示一个线性方程组的一切解组成的集合。当所考虑的线性方程组含有 n 个未知数时，它的通解就是一些 n 维向量组成的集合。如果该方程组没有解，这时还用通解来表示它的一切解所组成的集合的话，那么这个解集合里就不含有任何 n 维向量。显然把这样的集合叫做空集是恰当的，也是必要的。并且按子集的定义，我们应当认为空集 ϕ 是任一集合 A 的子集，即 $\phi\subseteq A$。

本节在上述的基础上，介绍并集、交集、差集、补集、积集、

幂集这样一些基本概念。

设A，B为任二集合。

并集 由属于集合A或属于集合B的一切元素组成的集合叫做A与B的并集．记作

$$A\cup B,\ 即 A\cup B=\{x|\ x\in A\ \ 或\ x\in B\}.$$

交集 由属于集合A同时又属于集合B的一切元素组成的集合叫做A与B的交集．记作

$$A\cap B,\ 即 A\cap B=\{x|\ x\in A\ \ 与\ x\in B\}.$$

如果 $A\cap B=\phi$，则称A与B是不相交的。

差集 由属于集A但不属于集B的一切元素组成的集合叫做A与B的差集．记作

$$A-B,\ 即 A-B=\{x|\ x\in A 但 x\overline{\in}B\}\ .$$

补集 当 $B\subseteq A$时，我们把差集$A-B$ 叫做B在A中的补集，记作B'_A，即$B'_A=\{x|\ x\in A$但 $x\overline{\in}B,\ B\subseteq A\}$.

并集、交集可以自然地推广到任意有限个集合的情形。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$是任意n个集合。A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的并集规定为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x|\ x\in 某一个\ \ A_i\};$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$的交集规定为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x|\ x\in 每一个\ \ A_i\}.$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集，交集可以简记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n;$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

下面看几个例子。

例1 令 $A=\{-1,\ 1\}$，$B=\{0,\ 1\}$，

于是

$$A\cup B=\{-1,\ 0,\ 1\},\ \ A\cap B=\{1\},$$

$$A-B=\{-1\},\quad B-A=\{0\}.$$

例 2 考虑 $D^{(2)}=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in D\}$的两个子集：

$$X=\{(x,0)\mid x\in D\},\quad Y=\{(0,y)\mid y\in D\},$$

于是

$$X\cup Y=\{(x,y)\mid xy=0\},\quad X\cap Y=\{(0,0)\},$$

$$X-Y=\{(x,0)\mid x\neq 0\},\quad Y-X=\{(0,y)\mid y\neq 0\},$$

$$X'_{D(2)}=\{(x,y)\mid y\neq 0\},\quad Y'_{D(2)}=\{(x,y)\mid x\neq 0\}.$$

例 3 考虑整数集

$$Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$$

的两个子集：

$$Z_0=\{n\mid 2\backslash n\},$$

$$Z_1=\{n\mid 2\nmid n\}.$$

于是

$$Z_0\cap Z_1=\phi,$$

$$Z_0\cup Z_1=Z.$$

一般地，任意给定一个正整数m，都可以确定整数集 Z 的m个子集如下：

$$Z_0=\{n\mid n=mq\},$$

$$Z_1=\{n\mid n=mq+1\},$$

$$\vdots$$

$$Z_{m-1}=\{n\mid n=mq+(m-1)\}.$$

此处m个子集的组成情况是清楚的：$n\in Z_r$当且仅当以m除 n 所得余数为r. 因此常常把Z_r叫做以m为模的剩余类，$r=0,1,2,\cdots,m-1$. 容易看出：整数集合 Z 的这样得到的m个子集具有以下性质：

1) $Z_i\cap Z_j=\phi$，$i\neq j$；

2) $Z=Z_0\cup Z_1\cup\cdots\cup Z_{m-1}$.

例 4 令$M_n(F)=\{(a_{ij})\mid a_{ij}\in F;\ i,j=1,2,\cdots,n\}$. 此处$F$为任意一个数域. 于是$M_n(F)$就是$F$上的一切 n 阶方阵组成的集合. 考虑$M_n(F)$的如下的一些子集：

$$K_r=\{(a_{ij})\in M_n(F)\mid \operatorname{rank}(a_{ij})=r\};\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n.$$

这样我们得到$M_n(F)$的$n+1$个子集 K_0, K_1, K_2, $\cdots$, Kn. 它们的组成情况是清楚的：$(a_{ij})\in K_r$ 当且仅当(a_{ij})的秩等于r. 容易看出：F上n阶方阵的集合$M_n(F)$ 的这样得到的$n+1$个子集有以下性质：

1) $Ki\cap K_j=\phi$, $i\neq j$;

2) $M_n(F)=K_0\cup K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_n$.

例 5 试证：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证明 按集合相等的定义往证等号两端的集合互为子集即可.

先证 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 设$a\in A\cap(B\cup C)$. 由交集的定义，$a\in A$与$a\in B\cup C$. 再由并集定义，从而,$a\in A$, $a\in B$或 $a\in A$, $a\in C$. 即 $a\in A\cap B$ 或 $a\in A\cap C$ 又按并集定义，则得$a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.所以 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

再证 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$. 设 $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 于是$a\in A\cap B$或$a\in A\cap C$. 亦即$a\in A$, $a\in B$或$a\in A$, $a\in C$. 这等于说：$a\in A$ 同时又有$a\in B$或$a\in C$, 即 $a\in A$ 与$a\in B\cup C$. 故有$a\in A\cap(B\cup C)$. 所以又得$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$. 总之，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

下面介绍积集、幂集的概念.

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为n个非空集合. 其中可以有一些是相同的集合. 任意取定$x_1\in A_1$, $x_2\in A_2$, $\cdots$, $x_n\in A_n$, 把这n个元素组合在一起，记作$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, 称其为由 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 所确定的一个n**元组**（也叫 A_1, A_2, $\cdots$, A_n上的一个n元组）. 两个这样的n元组：

$$\alpha=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\text{与 }\beta=(y_1,\ y_2,\cdots,y_n).$$

叫做是相等的当且仅当 $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $\cdots$, $x_n=y_n$, 记作：$\alpha=\beta$.

积集 由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所确定的一切 n 元组做成的集合叫做$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积集. 记作

$$A_1\times A_2\times\cdots\times An.$$

即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in A_i\}.$$

特别地，当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，我们就把这个积集简记为 $A^{(n)}$，其中的元素就叫做 A 上的 n 元组。

例 6　令 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,\ 0,\ 1\}$.

于是

$$A\times B=\{(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\},$$

$$B\times A=\{(-1,0),(-1,1),(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

特别的

$$A^{(2)}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

例 7　D 为实数域，那么积集

$$D^{(n)}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|\ a_i\in D\}$$

就是熟知的实数域 D 上的 n 数组集合。当然，这个积集也可以看成是 D 上的 $1\times n$ 矩阵做成的集合。

最后我们说一下什么叫幂集。设 A 为任一集合。考虑 A 的一切子集，于是以 A 的一切子集为元素又做成一个集合：

$$P(A)=\{X|\ X\subseteq A\},$$

我们把 $P(A)$ 叫做集 A 的幂集。

例 8　令 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{0\}$

于是集 A 共有八个子集如下：

一个元素的子集　$\{0\},\{1\},\{2\}$；

两个元素的子集　$\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$；

三个元素的子集　$\{0,1,2\}$，即 A 本身。

不含元素的子集　ϕ，即空集。

这样 A 的幂集 $P(A)$ 就是以上述八个子集为元素做成的集合，即

$$P(A)=\{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\},\phi\}.$$

集 $B=\{0\}$ 只含一个元素，它恰有两个子集，即空集 ϕ 和它本身。这样 B 的幂集就是

$$P(B)=\{\phi,\{0\}\}.$$

练　习　一

1．证明

　1) $A \cap B = A$ 当且仅当 $A \subseteq B$；

　2) $A \cup B = B$ 当且仅为 $A \subseteq B$，

2．指出：对集A的任一子集B，存在集C，D使 $B \cup C = A$，$B \cap D = \phi$．这样的C与D是不是唯一的？如果要求$C = D$时又怎样？

3．举例说明，有集合A, B使

　$A \subset B$，$A = B$，$B \subset A$

三者均不成立．

4．设 $A = \{a, b, c\}$．写出 $P(A)$．

§2　映　　射

任何事物，不论是个别的或总体的，都不是孤立的、静止的，它的内部和相互之间无不存在一定的联系．不了解这种联系就不了解事物的规律性．因此，分析事物的相互联系从中找出规律性的东西，是人们认识事物的必由之路，也是分析问题，解决问题的基本方法．如前所述，着眼于事物的变化和相互关联，从事物的变化和相互关联中寻求分析问题的门径，找出解决问题的线索和方法也是高等代数的一个重要特点．这种方法在数学上的体现，就是把所要研究的对象——这里我们把它叫做集合，对它的元素进行比较，从中发现其间的某些联系．通过这些联系来获得一些对于我们所探讨的问题有益的信息．这就是本节所要讨论的课题——集合的映射．

设A, B为任二非空集合．

定义1　**对集合A与B给定的一种规则（方法）φ，使得A中每一元素a按着给定的规则φ能在B中确定唯一的一个元素 a'，记作$a' = \varphi(a)$，这样就说（规则）φ是A到B的一个映射．**

我们用以下符号来表示φ是A到B的一个映射：

$$\varphi: A \rightarrowtail B \text{或} A \overset{\varphi}{\rightarrowtail} B.$$

若 $\varphi: A \rightarrowtail B$，而$a' = \varphi(a)$，我们就说$a'$是$a$（在$\varphi$之下）的象，$a$ 是 a'（在 φ 之下）的一个原象．这时也说φ把a射成a'，记作：$\varphi: a \longmapsto a'$．

按定义，A中每一元素a都有象 $a' \in B$，而且只有这么一个象；反过来，对B中每一元素x'未必都有原象$x \in A$，如果某一元素x'有原象的话，也可能不只一个．

设φ_1, φ_2都是A到B的映射．如果对任一元素$a \in A$都有$\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$，则称$\varphi_1$与$\varphi_2$是相同的，记作$\varphi_1 = \varphi_2$．

定义 2 设φ是A到B的映射．如果对于B中每一元素（在φ之下）都有原象，则称φ是A到B的满映射．记作

$$\varphi: A \longrightarrow B \text{ 或 } A \xrightarrow{\varphi} B.$$

定义 3 设 φ 是A到B的映射．如果对于A中任二不同的元素（在φ之下）的象也不同，则称φ是A到B的单映射，记作

$$\varphi: A \rightarrowtail B \text{ 或 } A \overset{\varphi}{\rightarrowtail} B.$$

如果A到B的映射φ既是单的又是满的，那么就简称φ是A到B的单满映射．记作

$$\varphi: A \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow B \text{ 或 } A \overset{\varphi}{\rightarrowtail\!\!\!\rightarrow} B.$$

这时明显地A与B的元素之间一个对一个的对应起来．

A到B能有单满映射φ是一种很特殊而又相当重要的情形．因为我们可以通过A到B的这个单满映射φ唯一地确定一个B到A的映射ψ，并且ψ也是单满的．

事实上 我们利用φ，如下的规定一个关于B到A的规则

$$\psi: B \rightarrowtail A,$$

使得

$$\psi: x' \longmapsto x, \text{ 如果 } \varphi: x \longmapsto x', \ \forall x' \in B.$$