王洁敏　沈瑞芝　编著

中学数学学习的思维方法

中国标准出版社

中学数学学习的思维方法

王洁敏　沈瑞芝 著

中 国 标 准 出 版 社

1989年

内 容 提 要

本书通过大量精彩例题的解题分析，从数学学习的思维方法的高度讲解中学数学的一些基本概念、定理、定律的实质，各部分知识之间的比较和联系，解题的正确思路、常用技巧、科学方法等，以帮助教师改进教学方法，使学生在学习知识和解题时更主动、更深入、更灵活。

中学数学学习的思维方法

王洁敏　沈瑞芝 著

责任编辑　周俞斌

•

中国标准出版社出版
（北京复外三里河）
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

•

开本 787×1092 1/32　印张 $16^3/_8$　插页 1　字数 351 000

1990年6月第一版　1990年6月第一次印刷

•

ISBN 7-5066-0184-2/G·040

印数 1—5000　定价 5.95 元

•

科目 212—52

前　　言

本书是作者根据多年数学教学的经验，不断探索和总结出来的，期求在中学数学教学中，能使教师和学生不仅钻研解题的方法和掌握解题的技巧，更能重视从思维方法上灵活掌握和深刻理解数学概念、定理、定律的本质及各部分知识的内在联系，从而使学生确立科学的学习方法，提高解题的科学性，使数学学习在深度和广度上有更大的开拓。所以本书是献给广大中学师生的，当然更希望对中学数学教师能有所帮助，因为教师有好的教法才能指导学生有好的学法。

无庸讳言，“背结论加做题”这种陈旧的数学学习方法仍然很盛行，既影响着学习者对数学知识的理解与掌握，又桎梏着学习者智能的提高，危害是很深远的。“必须改进教学方法！”这已由专家们的强烈呼吁变成了广大中学生、自学青年、教师和家长的迫切要求。大家越来越清楚地认识到，只有科学的学习过程才能更好地促进知识与能力的共同提高，使学习者从被动接受的重压下解脱出来，在主动进取与探求中成为知识的主人。

本书以思维科学和现代方法论原则为指导，以中学数学本身的特点和中学生心理与认知规律为基础，总结与概括出一整套数学学习的思维活动和思维方法，以帮助学习者从“学会想数学”这一核心入手，逐步形成自我化的科学的数学学习方法。

全书主要内容分为两篇。第一篇从数学学习的任务揭示数学学习的思维过程，以明确通过怎样的思维过程组织知识

体系和掌握数学方法体系，从宏观上确立数学学习的科学过程；第二篇由数学自身的科学思想出发，总结出一系列相应的思维方法和思维策略，把各种形式的数学内容与之联系起来，从微观上把科学的思维方法贯穿到各种具体知识的学习中去。“以数学所凝聚和蕴含的思维规律与思维方法来指导数学学习”，乃是本书的基本立足点。

当然，要建立一套完美的数学学法，绝不是一蹴而就的，我们只是从思维过程和思维方法这个侧面谈些刍荛之见，充其量不过是抛砖引玉而已。

在本书编写过程中，始终得到北京师范大学曹才翰先生的指导和多方面帮助，谨致衷心感谢。本书还吸收了多种书刊文章中的有益观点，在这里对作者同志们深表谢意。

由于我们水平有限，本书仅是一种探索和尝试，恳请教师和学生们批评指正。

作者　　1987年8月

目　录

绪　论

每个人都应当学习好基础数学，没有谁会认为这是危言耸听．这一方面是因为数学知识的广泛应用性，致使几乎所有的行业和部门都离不开它，更不要说那些涉及技术和科学的工作了；另一方面是因为它所体现和使用的一整套思维方法，对于学习者的智能发展，有着特殊的促进作用，这或许正如恩格斯指出的"数学：辩证的辅助工具和表现形式．"[1]因此数学本身就有着颇多的方法论意义．

在数学受到日益重视的情况下，却有越来越多的同学视数学学习为危途，成为他们的心理重负。这种尖锐的对照和不协调突出地说明了，引导同学们掌握数学的科学学习方法是何等的重要！我们坚信，遵照科学的思维方法去学习数学，任何一位同学都是可以学好数学的．为此，我们首先应当确立几个方面的正确观念．

一、怎样才算掌握了数学知识

许多初学数学的同学，把定义和定理抄下来背过了，就以为是掌握了数学知识，这其实是一个很大的误解．我们说对于一个事物较好地掌握了，是指对它的产生和背景，对它的性质和运动规律，对它和其它事物的联系，对它的功能与作用都比较清楚了．所谓掌握了某一部分数学知识，指的也是要达到这种认识程度．现在，我们以初一代数"有理数"

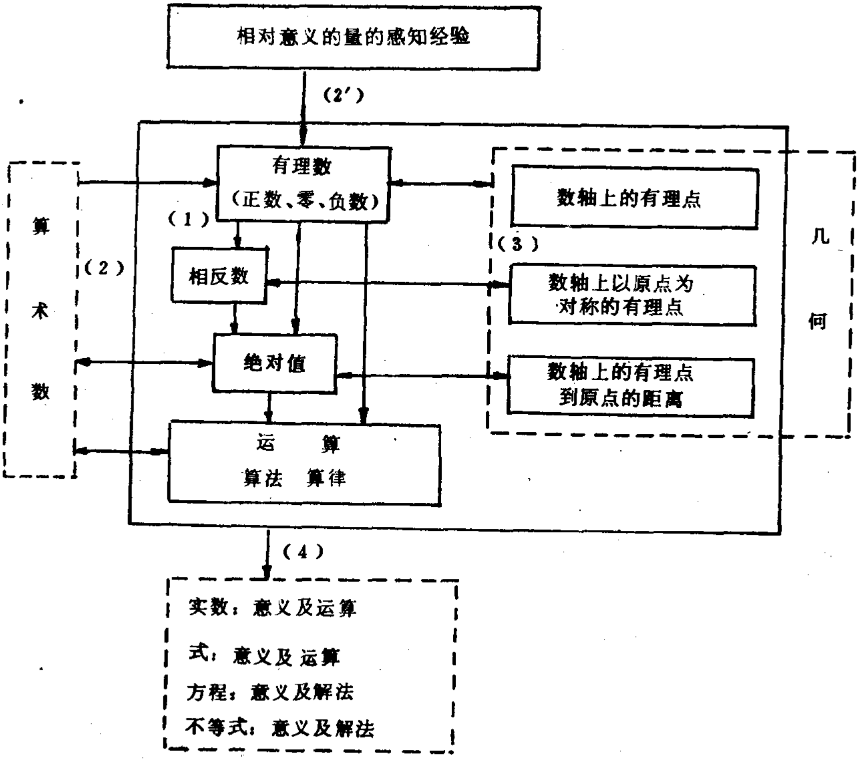
---

〔1〕《马克思恩格斯选集》，第三卷，第521页，人民出版社，1972年．

一章为例，说明怎样才算掌握了这部分知识．

理出这一章的有关内容和所有主要联系，可得表1．

表 1



有理数这一章的完整知识，主要包括这样的几个方面：

（1）本身的内容结构．这一章的内容，包括有理数、

相反数、绝对值这些概念，加、减、乘、除运算的法则和运算律．所谓结构就是指这些部分或要素之间都是怎样联系着的，怎样相互影响、转化与过渡的．比如，有理数大小的比较和运算法则，实际上都是由“绝对值法则”和“符号法则”合成的（见表2）．

表2

有理数被看作其绝对值（算术数）添加原来的符号

（这种关系在有理数的大小比较中）　　（这种关系在有理数的运算中）

两有理数大小的比较	
两正数	绝对值大者，大
两负数	绝对值大者，小
一正一负	正数大于负数
一正一零	正数大于零
一负一零	负数小于零

两有理数的运算	加　法	减　法	乘　法	除法（除数不为零）
同号时	绝对值相加添上原符号	减去一个数等于加上该数的相反数（归为加法）	绝对值相乘添上正号	除一个数等于乘以它的倒数（归为乘法）
异号时	绝对值相减添上绝对值大的数的符号		绝对值相乘添上负号	
有一个为零时	等于另一个数		等于零	

由此看来，搞清楚有理数和其绝对值及其符号的关系是极为重要的．如果说运算是有理数的主要运用形式，那么，有理数和其绝对值的关系就处于本章的枢纽地位．

（2）学好“有理数”这一章内容必须要有一定的认知基础．所谓认知基础，就是指它是在怎样的认识前提下产生的．我们知道，有理数是在掌握了算术数的基础上，为将相反意义的量形式化而产生的．因此，它必须借助于算术数——它的绝对值来刻画，同时，它又是算术数的发展——多了性质符号．于是，每个有理数取绝对值后得到算术数，而有理数就等于一个算术数（它的绝对值）添加上它原来的符号．这一关系，使“有理数”这一新知识和原有的认知基础——算术数——融为一体，在这部分内容中起着统帅作用．

这样一来，“绝对值”概念、“相反数”概念的意义和作用也便更明显了．

（3）“有理数”有关概念的几何意义．有理数所表示的量的相反意义，最容易由数轴上的有理点形象地体现出来．这样，有理数与数轴上的有理点可以建立对应关系；互为相反数的两个有理数与数轴上以原点为对称中心的两点对应；绝对值与数轴上有理点到原点的距离对应．“有理数”获得了一个直观化的模型，并且，这种对应成为沟通代数与几何联系的最初起点．

（4）本章知识和以后的知识的联系．无理数可用有理数来逼近，故常用有理数（作为无理数的近似值）来“代替”无理数；式是由数概括和发展来的，所以式的运算本质上来说是转化为数的运算，如整式的加（减）法“合并同类项”，实际上就是系数的加（减），整式的乘法，即是系数和指数的运算；解方程和不等式也是借助数的运算来实现的．因此，有理数，特别是它的运算，是以后知识的重要基础，也就是

说，有理数在今后所发挥的作用，便集中在运算上．而所谓较好地掌握有理数的运算，就不单纯是指算对结果，更重要是透彻地理解运算过程，逐步地学会将运算过程优化．

例 1 计算$9\frac{18}{19}\times 15$

解法一 $9\frac{18}{19}\times 15=\frac{189}{19}\times 15$

$=\frac{2835}{19}=149\frac{4}{19}$.

解法二 $9\frac{18}{19}\times 15=9\times 15+\frac{18}{19}\times 15$

$=135+\frac{270}{19}$

$=149\frac{4}{19}$.

解法三 $9\frac{18}{19}\times 15=(10-\frac{1}{19})\times 15$

$=150-\frac{15}{19}=149\frac{4}{19}$.

例 2 计算$\frac{2}{5}\div(-2\frac{2}{5})-\frac{8}{21}\cdot(-1\frac{3}{4})-0.25$

解法一 原式$=\frac{2}{5}\times(-\frac{5}{12})-\frac{8}{21}\times(-\frac{7}{4})-\frac{1}{4}$

$=-\frac{2}{12}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

$=\frac{-2+8-3}{12}$

$=\frac{1}{4}$.

解法二 原式$=\frac{2}{5}\times(-\frac{5}{12})-\frac{8}{21}\times(-\frac{7}{4})-\frac{1}{4}$

$$=\left(-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}-1\right)\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

我们看，越是能灵活正确地运用算法特别是算律，越能简化运算过程，结果的得出越直接.遗憾的是，许多同学对算律的重要意义不予重视，运算只求结果对了就万事大吉，不去注重对过程中原理的深究，殊不知，这样做的危害是很大的，因为算律在各种式的运算和变形中，都起着决定性作用.

例3 分解因式x^3+3x^2-2.

解 原式$=x^3+x^2+2x^2-2$ （倒用结合律）

$=x^2(x+1)+2(x+1)(x-1)$（倒用分配律）

$=(x+1)(x^2+2x-2)$. （倒用分配律）

这就是说，因式分解的思想基础是运算律，而运算律正是应该在有理数的运算过程中熟练掌握的.

以上四个方面，体现着“有理数”这章内容的构成系统：（1）是自身结构；（2）是它和原有认知基础的联系；（3）是它和几何的联系；（4）是它和今后知识的联系.（1），（2），（4）构成了它的纵向系列；（1），（3）构成了横向系列.这就是“有理数”这部分内容的“概念体系”.

所谓掌握知识，就是掌握这种以概念与法则相互关联、转化和过渡为线索形成的系统.这样的一些系统又相互联系成为更大的系统.把系统的结构搞清楚，把各种联系搞清楚，这才是较好地学会了知识.

二、怎样才算掌握了数学方法

数学知识的发展和数学方法的发展是一致的．严格地区分数学知识和数学方法是困难的，我们分别来谈它们只是为了便于把问题说得更清楚．

数学方法不限于解题方法，它的含义远比解题方法和技巧要广泛和深刻．数学方法应是一个组织得很好的层次结构，它可以划分为这样的三个层次：

最高层次：一般认识方法；

中间层次：基本数学方法；

最低层次：具体方法和技巧．

这三个层次的健全和协调程度，是一个人数学方法掌握得好坏的根本标志．现实存在的主要问题是，许多初学数学的同学对数学方法的认识只停留在最低层次上．

1．必须重视一般认识规律在数学方法中的决定意义

一说认识规律，一说辩证法，许多人认为这是政治的事，与学习数学无关，这是一种错误认识，必须纠正．

法国伟大的数学家笛卡儿，正是由事物互相联系的辩证思想，促使他将几何问题设法转化为代数问题，从而诞生了一门崭新的学科——《解析几何》．他的这一辉煌成就，不仅使整个古典几何领域获得了新的研究方法，而且也大大加速了微积分的成熟．恩格斯把解析几何称为最重要的数学方法，并且高度评价了笛卡儿的革新思想．

这个例子说明，一种正确的思想观念，在方法论上有着深刻的指导意义．

实际上，辩证的思想和观点，将在各个方面引导我们发现和采用新方法．比如

例1 已知抛物线$y=x^2+x$,过抛物线外一点$P(-1,-1)$作抛物线的两条切线，切点分别在A，B，求过A，B两点的直线方程.

通常的想法是：先求A,B两点的坐标，为此，先写出过点$P(-1,-1)$的切线方程，把它和抛物线方程联立，解出A,B的坐标来，最后写出过A,B两点的直线方程．这样的作法，运算量是比较大的.

如果我们有这样的辩证观点：式中的文字是常量还是变量有着相对的意义．那么，抛物线$y=x^2+x$过(x_0, y_0)的切线方程

$$\frac{y+y_0}{2}=x_0x+\frac{x+x_0}{2}$$

有两种不同的意义。若把x，y看作变量，把x_0，y_0看作常量，这个方程就表示该抛物线在(x_0, y_0)点的切线；但若把x，y看作常量,而把x_0，y_0看作变量，则它表示的是由点(x,y)向抛物线$y=x^2+x$引的两条切线的切点所决定的直线．由这种相对性可有如下的崭新的解法.

解 设切点A,B的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则过A,B两点的切线方程分别为：

$$\frac{y+y_1}{2}=x_1x+\frac{x+x_1}{2};$$

$$\frac{y+y_2}{2}=x_2x+\frac{x+x_2}{2}.$$

即

$$2x_1x+x+x_1-y_1-y=0;$$

$$2x_2x+x+x_2-y_2-y=0.$$

因$P(-1,-1)$同时在这两条切线上，故有

$$-2x_1-1+x_1-y_1+1=0 \text{ 即 } x_1+y_1=0,$$

$$-2x_2-1+x_2-y_2+1=0 \text{ 即 } x_2+y_2=0.$$

这就是说，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 同时在直线 $x+y=0$ 上，所以

$$x+y=0$$

就是所求的直线方程.

无疑，这种解法要简练得多了. 但这种解法不是出自于单纯的技巧，而是生发于"相对"观念.

例2 设 x，y 均为实数，且 $x^2+y^2\leqslant 1$，

求证 $|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$.

统观条件和结论：$x^2+y^2=1$ 和 $x^2+2xy-y^2=\pm\sqrt{2}$，都表示二次曲线. 若作 $\theta=\frac{\pi}{8}$（$\because \operatorname{ctg}2\theta=\frac{A-C}{B}=1$，$\therefore \theta=\pi/8$）的旋转变换，则它们分别为 $x'^2+y'^2=1$ 和 $x'^2-y'^2=\pm 1$（如图 0－1）. 这样，原来的问题就变为：在圆 $x'^2+y'^2=1$ 之上和之内的点，必在双曲线 $x'^2-y'^2=1$ 和 $x'^2-y'^2=-1$ 之上，或在被它们分成的平面部分中原点所在的那部分之内. 这从图中看是极为显然的. 把这个过程写出来就是：

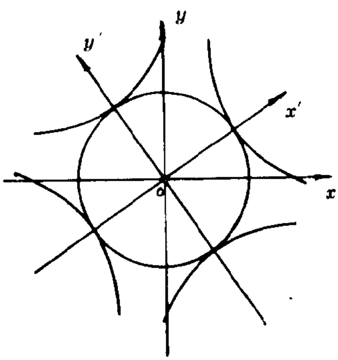


图 0－1

证明　设

$$\begin{cases} x = x'\cos\dfrac{\pi}{8} - y'\sin\dfrac{\pi}{8}, \\ y = x'\sin\dfrac{\pi}{8} + y'\cos\dfrac{\pi}{8}, \end{cases}$$

代入已知式和求证式分别得：

$$x'^2 + y'^2 \leqslant 1,$$

$$|x'^2 + y'^2| \leqslant 1.$$

在$x'^2 + y'^2 \leqslant 1$的情况下，当然有

$$|x'^2 - y'^2| \leqslant |x'^2| + |y'^2| = x'^2 + y'^2 \leqslant 1.$$

∴　原不等式成立.

这个证明方法，可能更接近于出题者的思路，把解析几何里显而易见的结论，作了一个坐标旋转！那么，旋转角度不同，还可以演变出不同的题目形式来．此法的获得，根本之点是对整个题目的结构和意义把握得准确，从而抓住了它和解析几何有关知识的联系，并充分又恰当地运用了这种联系，捕得这种明快的解法．

例 3　已知$80\sin x = x$，问此方程有多少实根？

如果只是局限在方程的范围里考虑，本题很难找到较直接的解法．我们把方程的两端看成是两个函数：

$$y = 80\sin x,$$

$$y = x.$$

作出它们的图象如图 0 － 2 .

原来方程实根个数的问题，可以转化为上述两个函数的交点个数问题．又由于两个函数都是奇函数（图象对于原点对称），且$y = x$的图象只在第Ⅰ和第Ⅲ象限，故可只考虑它们在第Ⅰ象限相交的情况．

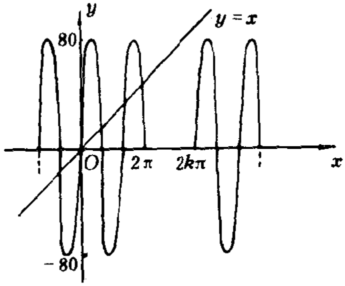


图 0 - 2

$y=80\sin x$的周期为2π，当$x=\frac{\pi}{2}$，$x=2\pi+\frac{\pi}{2}$，…时，由图象可以看出：只要$80\sin\left(2i\pi+\frac{\pi}{2}\right)>2i\pi$（$i$为非负整数），则在$2i\pi$与$(2i+1)\pi$之间，$y=80\sin x$ 与 $y=x$的图象就有两个交点．因为$80\sin\left(2i\pi+\frac{\pi}{2}\right)=80$是有理数，$2i\pi+\frac{\pi}{2}$是无理数，故不存在

$$80\sin\left(2i\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2i\pi+\frac{\pi}{2}$$

的情况．这样，只要确定出非负整数k，使得$2k\pi+\frac{\pi}{2}<80\times\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)<2(k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$，就可以知道$y=80\times\sin x$与$y=x$在第Ⅰ象限有$2(k+1)$个交点．如此有下面的解法：

解 设非负整数k满足

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<80\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)<2(k+1)\pi+\frac{\pi}{2},$$

即 $$2k\pi+\frac{\pi}{2}<80<2(k+1)\pi+\frac{\pi}{2},$$

化为 $$k<\frac{80-\frac{\pi}{2}}{2\pi}<k+1,$$

得 $k=12$．

∴ 函数$y=80\sin x$与$y=x$的图象在第Ⅰ象限有$2\times(12+1)-1=25$个交点（k从零算起，再除去原点）．