高等学校文科教材

高等数学简明教程

下 册

路见可　主编

武汉大学出版社

内容提要

本书是受国家教育委员会委托编写的高等学校哲学及文科类专业用的高等数学教材。在体系结构、材料取舍、习题选配及课时安排上均考虑了上述各专业的特点和需要。

全书分上、下两册共八章。上册分为四章，内容包括一元微积分和无穷级数；下册分为代数与解析几何、多元微积分、微分方程、初等概率与数理统计初步等四章。全书叙述简明扼要，内容自封，只须具备中学数学知识便可自学。

本书可作为高等学校哲学、经济、管理科学及其他文科类专业的高等数学教材，也可作为管理干部及成人教育同类专业的教材或教学参考书。

高等学校文科教材

高等数学简明教程

下　册

路见可　主编

姚孟臣　高成修　贾兰香　熊先树　编

*

武汉大学出版社出版

（武昌　珞珈山）

新华书店湖北发行所发行　武汉大学印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32　9.75印张 248千字

1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷

印数：1——3700

ISBN7-307-00213-2/O·23

定价：1.90元

目　　录

下　　册

第五章　代数与解析几何

本章我们介绍行列式，矩阵，线性方程组及空间解析几何的基本概念与运算。

*§1　行列式与线性方程组

在中学代数里，我们已经接触过有关二阶和三阶行列式。现在，我们从二阶、三阶行列式入手，来讨论它们的一些重要性质及其与求解线性方程组的关系，从而推广到高阶行列式和多元线性方程组，但不作详细讨论。

1.1　行列式

首先，我们来看两个未知量 x_1, x_2 的二元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

的求解问题，其中 b_1, b_2 是（1）的常数项，$a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 是（1）的系数。用消元法求解（1），消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同样，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

因此，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，（1）有解，其解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

且（2）是（1）的唯一解。为了便于记忆（2）式，我们规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{3}$$

并称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为**二阶行列式**，横排的数叫**行**，竖排的数叫**列**。$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$则称为行列式的元（素）。$a_{12}$就是第1行、第2列上的元，等等。从（3）式可知，二阶行列式是元的代数和；即左上、右下二元乘积$a_{11}a_{22}$与左下、右上的二元乘积$a_{12}a_{21}$的差。**二阶行列式表示一个数，这个数也说是行列式的值。**

根据定义，我们可以把（2）式中的两个分子写成

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=D_1$$

$$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=D_2$$

那么方程组（1）的唯一解（2）式就可以用行列式写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D} \tag{4}$$

这样，用行列式表示方程组（1）的解，就非常方便了.

例1 求解方程组

$$\left.\begin{aligned}3x-5y&=4\\x+2y&=-3\end{aligned}\right\}$$

解 由公式（4）得

$$D=\begin{vmatrix}3 & -5\\1 & 2\end{vmatrix}=11$$

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & -5\\-3 & 2\end{vmatrix}=-7$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & -3\end{vmatrix}=-13$$

于是，所给的方程组的唯一解是

$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{7}{11},\qquad y=\frac{D_2}{D}=-\frac{13}{11}$$

对于三元线性方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

的求解问题，同二元线性方程组一样，也可用消元法。先从前两式消去 x_3，又从后两式消去 x_3，得到只含有 x_1，x_2 的两个二元线性方程，再从这两个方程消去 x_2，就得到

$$Dx_1=D_1$$

其中，$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}$

$-a_{33}a_{21}a_{12}$

$D_1=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}b_1$

$-a_{33}b_2a_{12}$

显然它是把 D 中 a_{11}, a_{21}, a_{31} 分别换成 b_1, b_2, b_3 的结果。当 x_1 的系数 $D\neq 0$ 时，得出 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，同样可以求出

$$x_2=\frac{D_2}{D}\quad,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

这里 D_2, D_3 是把 D 中 a_{12}, a_{22}, a_{32} 及 a_{13}, a_{23}, a_{33} 分别换成 b_1, b_2, b_3 的结果。

同前面一样，为了便于记忆，我们引进三阶行列式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}$$
$$-a_{33}a_{21}a_{12} \qquad (6)$$

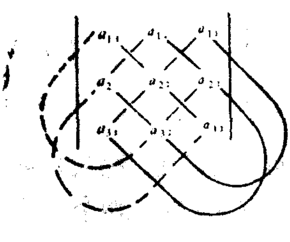

图 5.1

它含有三行三列，是6个项的代数和。这6个项可以这样来记忆：在图5.1中，实线上三元的乘积构成的三项均取正号，虚线上三元的乘积构成的三项均取负号，这六项的代数和就是三阶行列式的值。

这样，我们有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

于是上述三元线性方程组当 $D\neq 0$ 时唯一解用行列式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{7}$$

因此解三元线性方程组就可以转化为计算四个三阶行列式了。

例 2 计算三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 5+1\times 1\times 2+2\times 3\times(-4) -2\times 3\times 2-1\times(-4)\times 5-2\times 3\times 1$$

$$=30+2-24-12+20-6=10$$

例 3 求解三元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=2 \\ 3x+2y+2z&=-2 \\ x-2y+z&=1 \end{aligned}\right\}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4-6-2-2+8+3=5$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4+4-2-2+8-2=10$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4+3+4+2-4-6=-5$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4-12+2-4-8+3=-15$$

所以方程组的唯一解是

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{10}{5}=2\,,\qquad y=\frac{D_2}{D}=\frac{-5}{5}=-1\,,$$

$$z=\frac{D_3}{D}=\frac{-15}{5}=-3$$

有了二阶、三阶行列式就可以把二元和三元线性方程组的解很简单地表示出来，并可推广到用 n 阶行列式来表示 n 元线性方程组的解。

定义 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，把它们排列成 n 行、n 列，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，a_{ij} 叫做第 i 行、第 j 列上的数或元(素)。特别，一个 1 阶行列式就是一个数。

由二阶行列式的计算公式(3)和三阶行列式的计算公式(6)可以得知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{8}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (8')$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (8'')$$

上面(8)，(8′)，(8″)式称为三阶行列式按行展开的计算公式，其中各项中二阶行列式及其符号确定方法是：若二阶行列式前面所乘的元素为 a_{ij}，则符号为$(-1)^{i+j}$；各项中二阶行列式的元为删去第 i 行第 j 列后所剩元组成的行列式。我们把按此规则确定了符号的二阶行列式称为与元 a_{ij} 对应的**代数余子式**，并记为 A_{ij}。例如(8)式中与元 a_{11} 对应的代数余子式为 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，与 a_{12} 对应的代数余子式为 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$等，仿此不难理解 n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式的意义。

三阶行列式可以用二阶行列式来定义，四阶行列式也可用三

阶行列式来定义。更一般，n 阶行列式也可用 $n-1$ 阶行列式来定义。例如四阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

1.2 行列式的性质

上面给出了行列式的定义。根据定义，可以计算行列式之值。但这样计算很麻烦，特别是阶数很大时尤其如此。如果知道了行列式的一些基本性质，可以使行列式的计算大为简化。因此，下面我们讨论行列式的基本性质。为了使叙述简单起见，下面只限于用三阶行列式来表述。事实上这些性质对于任何 n 阶行列式都是成立的。

性质 1 把行列式的行和列互换（但次序不变），行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由于性质1成立，所以行列式的有关行（或列）的性质对于列（或行）也成立。

性质 2 把行列式中任意二行（列）互换，行列式的值只改变符号，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

性质 3 如果行列式的某行（列）中所有各元有公因子 k，则可以把 k 提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

或者说，如果行列式某行（列）中所有各元用同样的数 k 去乘，其结果等于用 k 乘此行列式。

性质 4 如果行列式的某行（列）中各元都是两项的和，则行列式可以如下法构成两个行列式的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 5 如果行列式的任意两行（列）中相应的元成比例（或相等），或者有一行（列）的元都是零，则行列式的值是零，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

性质 6 如果把行列式的某行（列）中各元同乘一常数 k，然后把它们分别加到另行（列）上去，而其它行（列）的元不改变，则行列式的值不变，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

上述性质都可以直接用行列式的展开式（6）来验证。计算行列式时，一般是用上述性质把其中的一行或一列中的元尽可能化零，然后按该行或列展开，这样计算就比较容易了。

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -10 & 5 \end{vmatrix}$ 之值。

解
$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -10 & 5 \end{vmatrix} \overset{1^0}{=} 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -10 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{2^0}{=} 6\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -10 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3^0}{=} 30\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{4^0}{=} 30\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{5^0}{=} -150\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -150(-2+6)$$

$$= -600$$

其中，1^0 提出了第一行的公因子 3；2^0 提出了第二行的公因子 2；3^0 提出了第三行的公因子 5；4^0将第三行加到第二行；5^0按照第二行展开。

所有这些性质均可类似地推广到 n 阶行列式。

1.3 线性方程组

现在我们用行列式来讨论线性方程组的求解问题。

对于二元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

如果其常数 b_1, b_2 不同时为零，则称该方程组是**非齐次的**；如果常数都等于零，则称它是**齐次的**。

1. 非齐次线性方程组的求解问题

前面已说过用消元法可以得到

$$Dx_1 = D_1, \qquad Dx_2 = D_2$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一的非零解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}$$