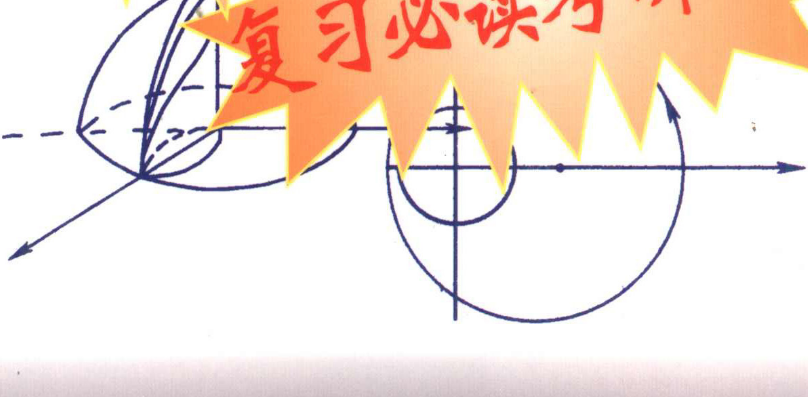
面向21世纪高等理工科重点课程辅导丛书

高等数学学习辅导

黄金坤　杨永愉　杨丰梅　编

针对同济第五版

复习必读考研必备



化学工业出版社
教材出版中心

面向21世纪高等理工科重点课程辅导丛书

高等数学学习辅导

黄金坤 杨永愉 杨丰梅 编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导/黄金坤，杨永愉，杨丰梅编．—北京：化学工业出版社，2002.9
（面向 21 世纪高等理工科重点课程辅导丛书）
ISBN 7-5025-3912-3

Ⅰ．高… Ⅱ．①黄…②杨…③杨… Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 052836 号

面向 21 世纪高等理工科重点课程辅导丛书
高等数学学习辅导
黄金坤　杨永愉　杨丰梅　编
责任编辑：唐旭华
责任校对：郑　捷
封面设计：蒋艳君
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：(010)64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 850×1168 毫米 1/32　印张 11½　字数 313 千字
2002 年 9 月第 1 版　　2002 年 9 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-3912-3/G·1063
定　价：19.00 元

前　言

本书是根据1995年国家教委批准并印发的《高等学校工科本科高等数学课程教学基本要求》并配合现行通用教材《高等数学》第五版（同济大学应用数学系主编）的内容而编写的。

全书共分12章及附录，内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程。每章都按基本要求与重点要求、内容提要、例题分析、习题、习题答案与提示5部分编写。本书叙述简要、清晰，便于自学。全书共收集1000余道习题与例题，其中例题分析思路清楚，习题都有提示与答案。这些题中既有近年硕士研究生入学考试的试题（标有△号者）及我们教学上使用过的例题、习题和试题，也有《高等数学》第五版中较难的习题及应用题，它们具有较强的概念性、典型性与综合性。附录部分给出了8套期中及期末的试题及答案，可供读者自测用。本书是大学生学习高等数学的良好辅导材料，也是准备报考硕士研究生者的良好复习辅导用书。

本书由黄金坤教授负责组织编写与统稿。参加编写的有黄金坤、杨永愉、杨丰梅。其中第八、九、十、十一章及附录由黄金坤编写；第一、二、三、七章由杨永愉编写；第四、五、六、十二章由杨丰梅编写。

由于编写时间仓促，水平有限，缺点与错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002年8月

目　　录

第一章　函数与极限

一、基本要求与重点要求

1. 基本要求

理解函数的概念．了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性．理解复合函数的概念．了解反函数的概念．掌握基本初等函数的性质及其图形．会建立简单实际问题中的函数关系式．理解极限的概念（对极限的 ε-N，ε-δ 定义可在学习过程中逐步加深理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求）．掌握极限四则运算法则．了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限．会用洛必达(L'Hospital)法则求不定式的极限．了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念．会用等价无穷小求极限．理解函数在一点连续的概念．了解间断点的概念，并会判别间断点的类型．了解初等函数的连续性．

2. 重点要求

函数的概念．复合函数的概念．基本初等函数的性质及其图形．极限的概念．极限的四则运算法则．两个重要极限．洛必达法则．函数在一点连续的概念．

二、内 容 提 要

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集．如果对于变量 x 的每一个取值 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$y=g(x)$或 $y=F(x)$等．其中数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．变量 y 的取值全体 $W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$称为函数的值域．

2. 函数的有界性

如果存在正数 M，对于任意的 $x\in Z$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 Z 内有界.

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 I 内的任意两个数 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加 [或单调减少].

4. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于 D 内的任意 x，恒有 $f(-x)=f(x)$ [或 $f(-x)=-f(x)$]，则称 $f(x)$ 为偶函数 [或奇函数].

5. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

6. 数列 $\{x_n\}$ 的极限

设数列 $\{x_n\}$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

7. 函数 $f(x)$ 的极限

设函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，或称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 Z，当 $|x|>Z$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，或称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

8. 极限计算的法则　公式　定理

(1) 无穷小量的性质与运算法则；

(2) 极限的四则运算法则；

(3) 复合函数极限的运算法则；

(4) 极限存在的两个准则；

(5) 两个重要极限；

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e};$$

(6) 无穷小的等价代换定理；

常用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt[n]{1+x^m}-1\sim\frac{x^m}{n}$；

(7) 洛必达法则；

(8) 导数和定积分的定义；

(9) 泰勒公式.

9. 函数在一点处连续的定义

设函数 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

设函数 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

若 $f(x)$在$[a,b]$上处处连续，则称 $f(x)$在$[a,b]$上连续，记作 $f(x)\in C[a,b]$.

10. 函数间断点及其分类

设函数 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义(在 x_0 处可以没有定义)，如果 $f(x)$有下列三种情形之一：①在 x_0 处没有定义；②虽

在 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；③虽在 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则称 $f(x)$在 x_0 处不连续，点 x_0 称为 $f(x)$的间断点.

设 x_0 是函数 $f(x)$的间断点，如果 $f(x)$在 x_0 处的左右极限都存在，则称 x_0 为 $f(x)$的第一类间断点. 其中当左右极限相等时，x_0 称为 $f(x)$的可去间断点；当左右极限不相等时，x_0 称为 $f(x)$的跳跃间断点. 如果 $f(x)$在 x_0 处的左右极限中至少有一个不存在时，则称 x_0 为 $f(x)$的第二类间断点. 其中，根据极限不存在的情况，又分为无穷间断点和振荡间断点.

三、例题分析

1. 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$的表达式及其定义域.

解 由已知条件：$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 可得

$$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x,\quad \varphi^2(x)=\ln(1-x).$$

由于 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，这是函数 $\varphi(x)$的表达式. 下面考虑 $\varphi(x)$的定义域

$$\begin{cases}1-x>0,\\ \ln(1-x)\geqslant 0,\end{cases}\quad \text{由此解出 } x\leqslant 0,$$

所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\quad x\leqslant 0.$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2,\end{cases}$ 求 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式.

分析 由分段函数求反函数，需要逐段讨论函数的单调性和取值范围.

解 当 $x<-1$ 时，$f(x)=1-2x^2$，显然 $f(x)$在 $x<-1$ 的范围内是单调增加的，而且有 $f(x)<-1$.

设 $y=1-2x^2$，可得 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$，

即
$$g(x)=-\sqrt{\frac{1-x}{2}},\quad x<-1.$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^3$，显然 $f(x)$在区间$[-1,2]$上是单调增加的，且 $-1\leqslant f(x)\leqslant 8$.

设　$y=x^3$，由此解出　$x=\sqrt[3]{y}$，

即
$$g(x)=\sqrt[3]{x},\quad -1\leqslant x\leqslant 8.$$

当 $x>2$ 时，$f(x)=12x-16$，显然 $f(x)$在 $x>2$ 的范围内是单调增加的，而且 $f(x)>8$.

设　$y=12x-6$，解出　$x=(x+16)/12$，

即
$$g(x)=\frac{x+16}{12},\quad x>8.$$

综上所述
$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

3. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少？

解　(1) 当 $x\leqslant 100$ 台时每台售价为 90 元. 现计算订购量 x 为多少台时售价降为 75 元/台，
$$90-75=15,\quad 15\div 0.01=1500.$$
所以，当订购量超过 $1500+100=1600$ 台时，每台售价为 75 元. 当订购量在 100～1600 时，每台售价为 $90-(x-100)\times 0.01=91-0.01x$，因而实际售价 p 与订购量 x 之间的函数关系为
$$p=\begin{cases}90, & x\leqslant 100,\\ 91-0.01x, & 100<x<1600,\\ 75, & x\geqslant 1600.\end{cases}$$

（2）每台利润是实际价格 p 与成本之差 $=p-60$，所以总利润 P 为

$$P=(p-60)x.$$

（3）由(1)先计算出 $p=91-0.01\times 1000=81$，再由(2)知

$$P=(81-60)\times 1000=2100 \quad (\text{元}).$$

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 先求数列的一般项 x_n 的表达式.

设
$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$x_n-\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$x_n=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right]=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-0=3.$$

计算无理函数的极限，一般有三种技巧：①分子，分母有理化；②无穷小量等价代换；③洛必达法则．这三种技巧常常相互结合使用．本章仅介绍前两种技巧．关于洛必达法则的使用在第三章介绍．

△**5.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解法一 有理化分子

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.$$

解法二　分子有理化＋无穷小量等价代换

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}\qquad\left(\because\quad \sqrt{1-x^2}-1\sim\frac{-x^2}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}=-\frac{1}{4}.$$

6. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{8x^3+1}}$.

分析　本例是另外一种类型的无理函数的极限，处理的方法也与前两例不同.

解　分子与分母同除 x 的最高次幂，则

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}}=\frac{1}{2}.$$

或者利用复合函数的极限运算法则，则

$$原式=\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{(x^2-3)^3}{(8x^3+1)^2}}=\sqrt[6]{\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3)^3}{(8x^3+1)^2}}=\sqrt[6]{\frac{1}{8^2}}=\frac{1}{2}.$$

求幂指型函数的极限，是极限计算的一种常见题型，常用的方法有两种.①使用两个重要极限之一，其一般形式为 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$. 使用这种方法，必须把幂指型函数的底化成 $(1+\square)$ 或 $\left(1+\frac{1}{\square}\right)$ 形式. ②取对数法，即对幂指型函数取对数，将函数的幂指型结构变为两个函数相乘除的形式. 这种方法一般要使用洛必达法则，将在第三章中介绍.

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\pi/x}$.

解 $$\cos\sqrt{x}=1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2},$$

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\left\{\left[1+\left(-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right]^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}}\right\}^{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\pi}{x}},$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{x}=-\frac{\pi}{2}$,

所以 原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\ (a>0)$.

分析 本例函数的结构中有一部分是幂指型函数，处理方法上需要一些技巧.

解 $$\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=a^x\,\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^x-1}{x^2},$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a},$$

所以 原式 $=1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$.

注 本例也可使用洛必达法则，但运算过程比较繁杂，学了洛必达法则的读者不妨一试，可以体会出无穷小量的等价代换：$\mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}-1\sim x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)$的作用.

已知函数的极限，求解函数表达式中的参数，是极限计算的一种常见题型. 而无穷小量之间的阶的关系是解这类题目的基本理论.

$^\triangle$9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot\ln(1+x)}$.

分析 利用极限四则运算法则，将函数折成两部分之和，分别求极限.

解 分母中 $\ln(1+x)\sim x \quad (x\to 0)$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3\sin x}{x(1+\cos x)}+\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x(1+\cos x)}\right]\quad (\because\quad \sin x\sim x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{1+\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x},$$

因为 $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$， $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{1+\cos x}=\dfrac{3}{2}$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}=0$.

$$原式=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}.$$

△**10.** 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\cdot\ln(1+x^2)=o(x\sin x^n)$，$x\cdot\sin x^n=o(e^{x^2}-1)$，求自然数 n.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot\ln(1+x^2)}{x\cdot\sin x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x^{3-n}=0$，

有 $3-n>0$， 即 $n<3$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0,$$

有 $n-1>0$， 即 $n>1$.

由 $1<n<3$，n 为自然数可得：$n=2$.

11. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+a}{x-2}=b$，$a$ 和 b 为有限常数，求 a 与 b 的值.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，$b$ 为有限常数，

所以 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x^2+a)=8-4+a=0$，

即 $a=-4$.

$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+x+2)=8=b,$$

即　$b=8$.

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{1}{a^n}$，其中 $a>0$，n 为正整数.

分析　这也是一个与参数有关的极限计算问题，与前两例不同之处在于，需要在给定的参数取值范围内，进一步讨论参数取不同值时的极限结果.

解　当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0$，

所以　$$\lim_{n\to\infty}a^n\sin\frac{1}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}}=1.$$

当 $a=1$ 时，　$a^n\sin\dfrac{1}{a^n}=\sin 1$，

所以　原式 $=\sin 1$.

当 $0<a<1$ 时，　$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$，　$\left|\sin\dfrac{1}{a^n}\right|\leqslant 1$，

所以　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{1}{a^n}=0$.

综上所述

$$\lim_{n\to\infty}a^n\sin\frac{1}{a^n}=\begin{cases}1, & a>1,\\ \sin 1, & a=1,\\ 0, & 0<a<1.\end{cases}$$

单调有界原理和夹逼定理是极限存在的两个准则．利用这两个准则证明并求出函数或数列的极限，是一类技巧性较强的极限计算题目．这里所说的技巧性主要表现在以下两点：其一为单调性的证明．证明单调性时，有时需要使用数学归纳法．其二为函数或数列的界的估计．在估计界的时候，需要对函数或数列进行适当的缩放．

△**13.** 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，试证 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

证　$x_1=10$，$x_2=4$，$x_3=\sqrt{10}$，