線性網絡中預給工作遞輸函數由損耗網絡元素實現的理論

閔乃大

科學出版社

線性網絡中預給工作遞輸函數由損耗網絡元素實現的理論

閔 乃 大

科 學 出 版 社

1 9 5 7

內 容 提 要

本文爲一研究成果的報告；目的在求損耗四端網絡來滿足預給的工作遞輸函數.

全文分五章：第一章爲兩端網絡和四端網絡的基本理論；第二和第三章爲工作遞輸函数由損耗四端網絡實現；第四章爲實現損耗四端網絡的他種方法；第五章爲討論和結論.

本文得到下列結果：首先證明損耗四端網絡的工作遞輸函數具有那一類特性. 相反凡具有這類特性的函數，總可由進端導納等於常數的、對稱的、無互感的損耗四端網絡來實現；或乘以一常數，由一般無互感的損耗四端網絡來實現. 在討論必須條件時引入新的概念和新的網絡特性公式（如公式（2.3a）或（2.3b）. 此外，還應用本文前四章的一般理論來討論 *RC* 四端網絡的問題.

本文的標題雖指工作遞輸函數，但其他的遞輸函数，或直接包括在本文之內，或經過一些推算即可得出. 同樣，本文雖在標題中指出由損耗網絡元素來實現，其實由一般網絡元素來實現的問題，也都包括在內.

線性網絡中預給工作遞輸函數
由損耗網絡元素實現的理論

著　者　閔　乃　大

出版者　科　學　出　版　社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

印刷者　上海中科藝文聯合印刷廠

總經售　新　華　書　店

1957年6月第一版　書號：0775　字數：133,000
1957年6月第一次印刷　開本：787×1092　1/16
(滬) 0001—3,251　印張：7 3/4　插頁：2

定價：(11) 道林精裝本 2.50 元
報紙平裝本 1.40 元

序

網絡理論特別是線性網絡理論，可分爲分析和綜合兩部．分析方面最原始的萌芽，應追溯到 1827 年歐姆的一篇論文[I]．一世紀後，部爾發表了另一篇論文[II]，才奠定了近代的線性網絡綜合理論．在部爾的十數年的工作中，將近代線性網絡綜合理論樹立成一個獨立學派．

這門科學正在不斷地發展，它有很大的前途．在很多科學部門中，可以應用這門科學來處理問題；現在已經有很多科學部門，開始了對這門科學的注意．在一個物理性體系上加入一個振盪動力，求其反映出的振盪現象，是大家已很熟知的事實．但是相反地，求出一個具有物理性的體系，使加入的振盪動力和反映的振盪現象間的關係，在某一頻率、某一段頻率帶內或全部頻率內滿足預先給出的要求，對於很多人却還是陌生的．本書便是在這個研究具有線性特性的範圍中，提出一個新成果的報告．

線性網絡理論的發展，雖然是從電信科學部門中出發，但它的應用已不僅限於電信科學部門以內．這一點，從上文中所指出的這門科學研究的對象、已經可以看得出來．例如它在自動控制、電模擬、電聲學、力學和一切線性系統中的抗振盪的問題等等之中，都有應用．由此可見，這門科學已從電信科學範圍中抽象地提鍊出來，成爲一門獨立的基本科學．

這是一個研究成果的報告．在讀本書時，請注意下列各點：第一章的內容，絕大部分是已發表過的工作，限於本文的性質，不必要詳盡地寫出，只在這裏做一概略的介紹．第二章的 §2 到 §5 中，有些地方也寫得很簡略，但是如果能掌握第二章 §1 中的材料，則這些簡略的部分不會使讀者在閱讀時受到影響．第五章的內容，是在本文寫完之後加入的．這一點已在該章裏的脚註中指出．因此，那一章所需用的參考材料，沒有在第一章中扼略地介紹．在看這一章的時候，最好先參閱文獻［29］．

1951 年五月，在郵電部的前無線電總局局長李強同志的支持下，由郵電部和清華大學合辦了一個網絡研究室；這個研究室在 1952 年秋因故結束．雖然研究室的存在時間很短，但是著者在網絡研究方面還能順利地做了一些工作．1952 年底，著者被調到中國科學院來工作，工作方面有了變更．但網絡方面的研究工作，仍在晚間繼續進行．1954 年夏，在黨和中國科學院數學研究所行政的支持下，著者暫擺脫其他工作，從事完成本文中的問題研究．這一研究工作是在 1947 年就開始提出的．幾年以來，經過斷續的摸索，在 1953 年才確定了兩個方向．這篇論文就是已經獲得的成果之一，另一結

果擬在今後再行寫出. 著者現在的研究成果,是和中國科學院黨組織和黨內同志的支持分不開的,著者在此表示衷心的感激. 現在祖國正在大力地進行社會主義建設,希望這一研究成果,能起些微微的作用. 如果能起些作用,那也應歸功於黨,因爲假使沒有黨和黨內同志的支持,這本書就不能寫出和讀者見面.

回溯當年和部爾一同工作的日子裏,他的對於科學的熱愛,處理問題的嚴謹,爲人的謙虛和誨人不倦的精神,都使著者深深地欽佩並且受益不淺;他創立了這一重要而且有很大發展前途的科學部門,並且鼓勵著者在這一工作方向繼續研究. 現在謹將這篇論文作爲紀念著者的良師益友部爾去世的十週年紀念.

此外,著者在這裏謹向中國科學院數學研究所所長華羅庚先生表示感謝. 著者這次網絡方面的研究工作的能够順利進行,是和數學研究所的安靜的並具有研究氣氛的環境有密切關係的. 清華大學電機系程式教授經常對著者的工作的從速發表發生興趣,並提供參考材料,著者在此向他致謝. 著者以前的學生、現在郵電學院的陸志剛先生經常提供參考文獻,並在工作之餘爲著者作了校對、抄寫等工作; 郵電學院郭宗泰先生也爲本文抄寫了一部分,著者在這裏謝謝他們. 最後,著者願向科學出版社致以深切的感謝,不僅由於他們對科學成果的重視,也由於他們儘力按照著者的希望來排印和出版此書.

這篇論文是在匆促的時間內寫完的,深希海內外的讀者,給以指教.

閔乃大

1955, 12, 24

引 言

本文的目的是求損耗四端網絡來滿足預給的工作遞輸函數．所謂損耗四端網絡是由損耗網絡元素所組成．損耗網絡元素和理想網絡元素的區別，在於所有的電感都串聯一個電阻，所有的電容都並聯一個電導．這種損耗在實際情况中確實是不可避免的．本文雖然都限用了網絡範圍内慣用的名詞，其實本文所解答的是一個普遍的問題，凡線性系統中遞輸函數的綜合問題，都可應用．

本文得到下列結果：首先證明損耗四端網絡的工作遞輸函數具有哪一類特性．相反凡具有這類特性的函數，總可由進端導納等於常數的、對稱的、無互感的損耗四端網絡來實現；或乘以一常數，由一般無互感的損耗四端網絡來實現．在討論必須條件時，引入新的概念和新的網絡特性公式（如公式(2.3)）．此外，還應用本文前四章的一般理論來討論 RC 四端網絡的問題．本文所解決的問題，根據著者所看到的文獻中到現在還是沒有得到解答．

本文的標題雖指工作遞輸函數，但其他的遞輸函數，或直接包括在本文以內，或經過一些推演就可以得出．同樣本文雖在標題中指出由損耗網絡元素來實現，其實由一般網絡元素來實現的問題，也包括在內．

全用梯形網絡形狀來實現預給工作遞輸函數的另一結果，將在另一文中發表．用最少的損耗網絡元素來實現預給工作遞輸函數的一個實際計算方法，擬再在另一文中發表．

目　錄

第　一　章

兩端網絡和四端網絡的基礎理論

§1.　特性行列和體系函數的定義

這章裏絕大部分是介紹一下本文需用的兩端網絡和四端網絡的已知的基礎理論，但只限於結果，至於如何推導，可參看有關的文獻．特殊的部分都在適當處註出，凡沒有註出的，可參考文獻 [10]．

任何一個網絡由電阻 R，電導 G，電容 C，電感 L 和互感組成 n 個獨立環路．這裏和一般的討論不同，其中每一電容 C，都並聯一電導，合併成爲一個元素併在某一環路以內．這樣的處理是爲了考慮損耗的目的，也是更和實際情況相符合的．但過去一般情况是不考慮電容一定有一個並聯的電導，因此只能將電容和並聯的電導分成兩個環路來處理．使每一獨立環路中有一有向無內阻的電源複電壓，用 $U_1, U_2, \cdots U_n$ 代表，並有一有向的複電流，用 I_1，I_2，$\cdots I_n$ 代表．電源複電壓、電源的瞬變值和角頻率 $\omega = 2\pi f$（f 爲頻率）之間的關係，可用下列式子表示：

$$u_\nu(t) = \operatorname{Re} U_\nu e^{\lambda t}, \qquad u_\nu(-0) = 0\,;$$

$$i_\nu(t) = \operatorname{Re} I_\nu e^{\lambda t}, \qquad i_\nu(-0) = 0\,;$$

$$\lambda = j\omega \qquad (\omega = \text{實值}).$$

按基爾霍夫（Kirchhoff）第二定律和疊合定律，卽每一環路中所有每兩節點間的部分電勢差[1] $v_\mu(t)$ 之和等於該環路中所有的電動勢 $u_\nu(t)$ 之和，卽 $\sum v_\mu(t) = \sum u_\nu(t)$，可立出一組微分積分方程．電感 L_s 和電阻 R_s 串聯的電勢差的微分方程是

$$L_s \frac{di_\nu(t)}{dt} + R_s i_\nu(t) = v_s(t)\,.$$

電容 C_t 和電導 G_t 並聯的電勢差的積分方程是

$$\frac{1}{C_t}\int [i_\nu(t) - G_t v_t(t)]\, dt = v_t(t)\,.$$

1) 部分電勢差定義成 $i_\nu(t)\cdot W(\lambda)$ $(\nu=1, 2, \cdots n)$，這裏的 $i_\nu(t)$ 是某兩節點 a 和 b 之間流過的環路電流，$W(\lambda)$ 是該兩節點間的電阻抗。例如兩節點 a 和 b 之間只流過環路電流 $i_1(t)$ 和 $-i_2(t)$，並且該兩節點間的電阻抗是 $L\lambda + R$. 那麼節點 a 和 b 之間的部分電勢差是 $i_1(t)$ $(L\lambda + R)$ 和 $-i_2(t)$ $(L\lambda + R)$. 節點 a 和 b 之間的總電勢差是 $[i_1(t) - i_2(t)]$ $(L\lambda + R)$.

這裏的 $i_v(t)$ 是環路中的總瞬變電流，$v_s(t)=\mathrm{Re}\,V_s e^{\lambda t}$ 或 $v_t(t)=\mathrm{Re}\,V_t e^{\lambda t}$ 是兩端的瞬變電勢差，並假定始值等於零，即 $v_s(0)=0$ 和 $v_t(0)=0$． 將瞬變值 $i_v(t)$, $v_s(t)$, $v_t(t)$ 代入上式，按慣知的方法求解，即相當於將 $\frac{d\,i_v(t)}{dt}$ 代以 $\lambda I_v e^{\lambda t}$, $\int i_v(t)\,dt$ 代以 $\frac{I_v e^{\lambda t}}{\lambda}$，並將所有的 $e^{\lambda t}$ 消去，得 $V_s=(L_s\lambda+R_s)\,I_v$ 和 $V_t=\frac{I_v}{G_t+C_t\lambda}$． 將所有的 V_s 和 V_t 代入上指的一組微分積分方程之中，可得一組線性代數方程如下：

$$\sum_{v=1}^{n} A_{st}(\lambda)\,I_t=U_s, \tag{1.1}$$

$$s=1,2,\cdots n.$$

這裏

$$A_{st}(\lambda)=L_{st}\lambda+R_{st}+\sum\frac{1}{G_{st}+C_{st}\lambda}, \tag{1.2a}$$

但過去的一般情況寫成

$$A_{st}(\lambda)=L_{st}\lambda+R_{st}+\frac{1}{C_{st}\lambda}. \tag{1.2b}$$

這裏的

$$L_{st}\geqslant 0,\quad R_{st}\geqslant 0,\quad C_{st}\geqslant 0,\quad G_{st}\geqslant 0, \tag{1.2c}$$

$$A_{st}(\lambda)=A_{ts}(\lambda). \tag{1.2d}$$

設 $A_{st}\not\equiv\infty$ 和 $A_{st}\not\equiv 0$． 不然則環路數目減少，但仍可變成公式 (1.1) 的形式． 當 $s=t$ 時，$A_{st}(\lambda)$ 表徵着環路本身所具有的有理分式函數；當 $s\neq t$ 時，$A_{st}(\lambda)$ 表徵着環路間所具有的有理分式函數． λ 不僅限於 $j\omega$ 即 λ 面的虛軸，而且擴張到複數域內即 λ 的全面．

使公式 (1.1) 中的 $U_2=U_3=\cdots=U_n=0$，求出 $\frac{U_1}{I_1}=W(\lambda)$ 的關係，得一有理複變函數，通常稱它爲阻抗，我們可稱它爲阻抗函數[1]． $W(\lambda)$ 的倒值，即 $1/W(\lambda)=$ $=\frac{I_1}{U_1}$，被稱爲導納或導納函數．

使公式 (1.1) 中 $U_3=U_4=\cdots=U_n=0$，並簡化成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}Z_{11}(\lambda)\,I_1+Z_{12}(\lambda)\,I_2=U_1,\\ Z_{21}(\lambda)\,I_1+Z_{22}(\lambda)\,I_2=U_2.\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

除了特殊的情况外（即 $Z_{11}(\lambda)\,Z_{22}(\lambda)-Z_{12}(\lambda)\,Z_{21}(\lambda)\equiv 0$），可將上式變成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}Y_{11}(\lambda)\,U_1+Y_{12}(\lambda)\,U_2=I_1,\\ Y_{21}(\lambda)\,U_1+Y_{22}(\lambda)\,U_2=I_2.\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

上兩式也可化成下列形式：

1) 本文此後都將通常的稱呼加一函數或改稱爲函數，因爲事實上它們都是函數．

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}(\lambda)\,U_2+\mathfrak{B}(\lambda)\,I_2&=U_1,\\ \mathfrak{C}(\lambda)\,U_2+\mathfrak{D}(\lambda)\,I_2&=I_1. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

上列公式同樣可化成下列形式[1]:

$$\left.\begin{aligned} G_{11}(\lambda)\,U_1+G_{12}(\lambda)\,I_2&=I_1,\\ G_{21}(\lambda)\,U_1+G_{22}(\lambda)\,I_2&=U_2; \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

和

$$\left.\begin{aligned} H_{11}(\lambda)\,I_1+H_{12}(\lambda)\,U_2&=U_1,\\ H_{21}(\lambda)\,I_1+H_{22}(\lambda)\,U_2&=I_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

此後將所有的 $Z_{st}(\lambda)$、$Y_{st}(\lambda)$、$\mathfrak{A}(\lambda)$, $\mathfrak{B}(\lambda)$, $\mathfrak{C}(\lambda)$, $\mathfrak{D}(\lambda)$、$G_{st}(\lambda)$, $H_{st}(\lambda)$ 都簡寫成 Z_{st}, Y_{st}, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, G_{st}、H_{st}. 由於假設 $U_3=U_4=\cdots=U_n=0$, 所以網絡的內部是無源的. 因此, $Z_{12}=Z_{21}$, $Y_{12}=Y_{21}$,

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}-\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}=1, \tag{1.8}$$

$$G_{12}=-G_{21}\ \text{和}\ H_{12}=-H_{21}.$$

我們稱 $Z=\begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{Vmatrix}$ 是網絡阻抗特性行列; $Y=\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{Vmatrix}$ 是網絡導納特性行列; $K=\begin{Vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B}\\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D}\end{Vmatrix}$ 是網絡遞輸特性行列; $G=\begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{Vmatrix}$ 是網絡並串特性行列[2] 和 $H=$ $=\begin{Vmatrix} H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{Vmatrix}$ 是網絡串並特性行列[3].

如果將無內阻電源視爲端電壓, 那麼 $W\left(=\dfrac{U_1}{I_1}\right)$ 代表的兩端網絡可用圖 1a 表示. 公式 (1.3) 到 (1.7) 代表的四端網絡可用圖 1 b 表示. 如果將圖 1 b 的出端接一負荷電阻 R_2, 從進端 $1-1'$ 處所求出的比值 U_1/I_1, 用 W_b 代表, 接法如圖 1c 所示. W_b 被稱爲工作阻抗或工作阻抗函數[4]. W_b^{-1} 被稱爲工作導納或工作導納函

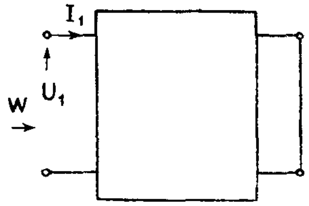


圖 1a. 兩端網絡.

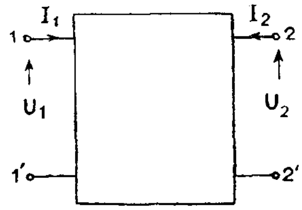


圖 1b. 四端網絡.

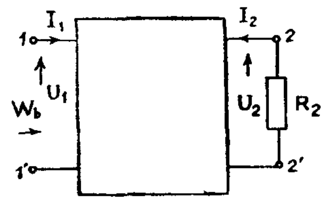


圖 1c. 工作電阻抗.

1) 參看文獻 [22] 第 132—140 頁或文獻 [23].

2) 特性行列 G 和 H 沒有適當的名稱. 這裏利用 G 行列間的相加來表徵網絡的進端並聯而出端串聯; 同樣, 利用 H 行列相加來表徵網絡的進端串聯而出端並聯, 所以用此特性來確定名稱.

3) 各行列元素間的關係, 本文不全引用. 在下文中要用到的關係再指出參考之處, 並且在那裏也可找出全部的關係.

4) 自後所有的電阻抗函數、電導納函數和所有的遞輸函數統稱爲體系函數.

數. 從公式 (1.3), (1.4) 和 (1.5) 可導出下列公式:

$$W_b(\lambda) = \frac{\mathfrak{A} R_2 + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C} R_2 + \mathfrak{D}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + R_2}, \tag{1.9a}$$

$$W_b^{-1}(\lambda) = \frac{\mathfrak{C} R_2 + \mathfrak{D}}{\mathfrak{A} R_2 + \mathfrak{B}} = Y_{11} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{22} + 1/R_2}. \tag{1.9b}$$

反射因數或反射函數被定義爲

$$T(\lambda) = \frac{W_b + R_1}{W_b - R_1} = \frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,\mathfrak{A} + \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}\,\mathfrak{B} + \sqrt{R_1 R_2}\,\mathfrak{C} + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,\mathfrak{D}}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,\mathfrak{A} + \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}\,\mathfrak{B} - \sqrt{R_1 R_2}\,\mathfrak{C} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,\mathfrak{D}} =$$

$$= \frac{k g(\lambda)}{h(\lambda)}; \tag{1.9c}$$

這裏 $g(\lambda)$ 是實羅霍二氏多項式[1], $h(\lambda)$ 是任何不高於 $g(\lambda)$ 次數的多項式. $g(\lambda)$ 和 $h(\lambda)$ 間沒有公因式,並設 $g(\lambda)$ 最高次的係數等於 1.

如果在圖 1c 的進端 $1-1'$ 再接一有內阻 R_1 的電源 U_0, 如圖 1d 所示, 在以上公式 (1.3) 到 (1.7) 中 U_1, U_2, I_1, I_2 的關係, 對圖 1c 和 1d 而言仍然有效.

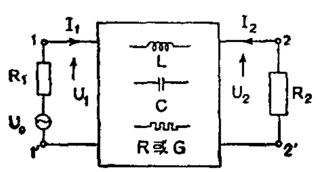


圖 1d. 電壓源四端網絡.

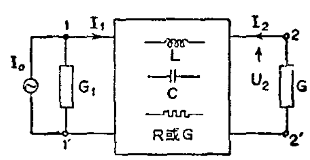


圖 1e. 電流源四端網絡.

從公式 (1.3) 並考慮 $U_2 = -I_2 R_2$ 的關係所導出的有理函數 $\frac{U_1}{U_2} = N(\lambda)$ 被稱爲電壓遞輸函數(或因數). 如果用 $-R_2$ 乘 $\frac{U_1}{U_2}$, 可得

$$\frac{U_1}{-I_2} = Z_t(\lambda).$$

它通常被稱爲遞輸阻抗函數 (或因數). 對接有 R_1 和 R_2 的四端網絡,用工作遞輸函數 (或因數)

$$S(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,\frac{U_0}{U_2} \tag{1.10a}$$

來確定四端網絡的遞輸特性. 同樣也可用工作遞輸阻抗

1) 實羅霍 (Routh-Hurwitz) 二氏多項式,定義爲整有理函數,具有實係數,所有零點的實部都是負實值,並且使最高次的係數是正值,因此全部的係數是正值.

$$Z_b(\lambda)=\frac{U_0}{-I_2}=2\sqrt{R_1R_2}\;S(\lambda)$$

來確定四端網絡的遞輸特性.

電流遞輸函數 $M(\lambda)=I_1/-I_2$ 和遞輸導納函數 $Y_t(\lambda)=\frac{I_1}{U_2}$ 各是 $N(\lambda)$ 和 $Z_t(\lambda)$ 的對偶 (dual). 用電流電源 I_0 代替電壓電源 U_0, 那麼 $S(\lambda)$ 可寫成

$$S(\lambda)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G_2}{G_1}}\;\frac{I_0}{-I_2}\,; \tag{1.10b}$$

其中 G_1 是電流電源的內導, G_2 是負荷電導 [參看圖 (1, e)]. 工作遞輸阻抗的對偶工作遞輸導納是

$$Y_b(\lambda)=\frac{I_0}{U_2}=2\sqrt{G_1G_2}\;S(\lambda).$$

以上的函數 $W(\lambda)$, $W^{-1}(\lambda)$, $T(\lambda)$, $Z_t(\lambda)$, $S(\lambda)$, $Z_b(\lambda)$ 都可縮寫成 W, W^{-1}, T, Z_t, S, Z_b. 網絡遞輸行列元素和 S 有下列關係:

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,\mathfrak{A}+\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\,\mathfrak{B}+\sqrt{R_1R_2}\,\mathfrak{C}+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,\mathfrak{D}\right)=\frac{k\,g(\lambda)}{f(\lambda)}\,; \tag{1.10c}$$

這裏的 $g(\lambda)$ 是實羅霍二氏多項式, $f(\lambda)$ 是任意不高於 $g(\lambda)$ 次數的實多項式. $g(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 間沒有公因式,並假設 $g(\lambda)$ 和 $f(\lambda)$ 最高次的係數都等於 1.

§2. 波戎奈 (Brune) 的正實函數理論[1]

任何電阻抗函數 $\mathfrak{W}(\lambda)$ 或電導納函數 $\mathfrak{W}^{-1}(\lambda)$ 必須滿足下列條件: $\mathfrak{W}(\lambda)$ 或 $\mathfrak{W}^{-1}(\lambda)$ 是有理的並且

a) 當 λ 為實值時是實值;

b) 當 $\operatorname{Re}\lambda>0$ 時是正規的(複值的導數);

c) 當 $\operatorname{Re}\lambda>0$ 時, $\operatorname{Re}\mathfrak{W}(\lambda)$ 或 $\operatorname{Re}\mathfrak{W}^{-1}(\lambda)>0$.

相反地,凡滿足上列條件的函數均可按波戎奈的方法,實現成一個由電阻、電容、電感和互感所組成的兩端網絡. 這種函數被稱為"正實函數",也有其他著者[2]稱之為波戎奈函數,或簡稱為 B 函數.

波戎奈的實現方法如下: 假設 $\operatorname{Re}\mathfrak{W}(\lambda)$ 的絕對最低值1) 是 $\operatorname{Re}\mathfrak{W}(j\omega_0)=R\geqslant 0$ 而 $0<\omega_0<\infty$, 那麼 B 函數 $\mathfrak{W}(\lambda)$ 可分出一部分四端網絡如圖 2a 中 $11'-33'$ 所示,因此將 $\mathfrak{W}(\lambda)$ 化簡成較 $\mathfrak{W}(\lambda)$ 低二次的 B 函數 $\mathfrak{W}^*(\lambda)$. 如果圖 2a 中的元素 L_1, L_2 和 L_3 滿足條件 $L_1L_2+L_2L_3+L_3L_1=0$, 那麼可將部分四端網絡變成等效

1) 絕對最低值是最低值中的最低值.

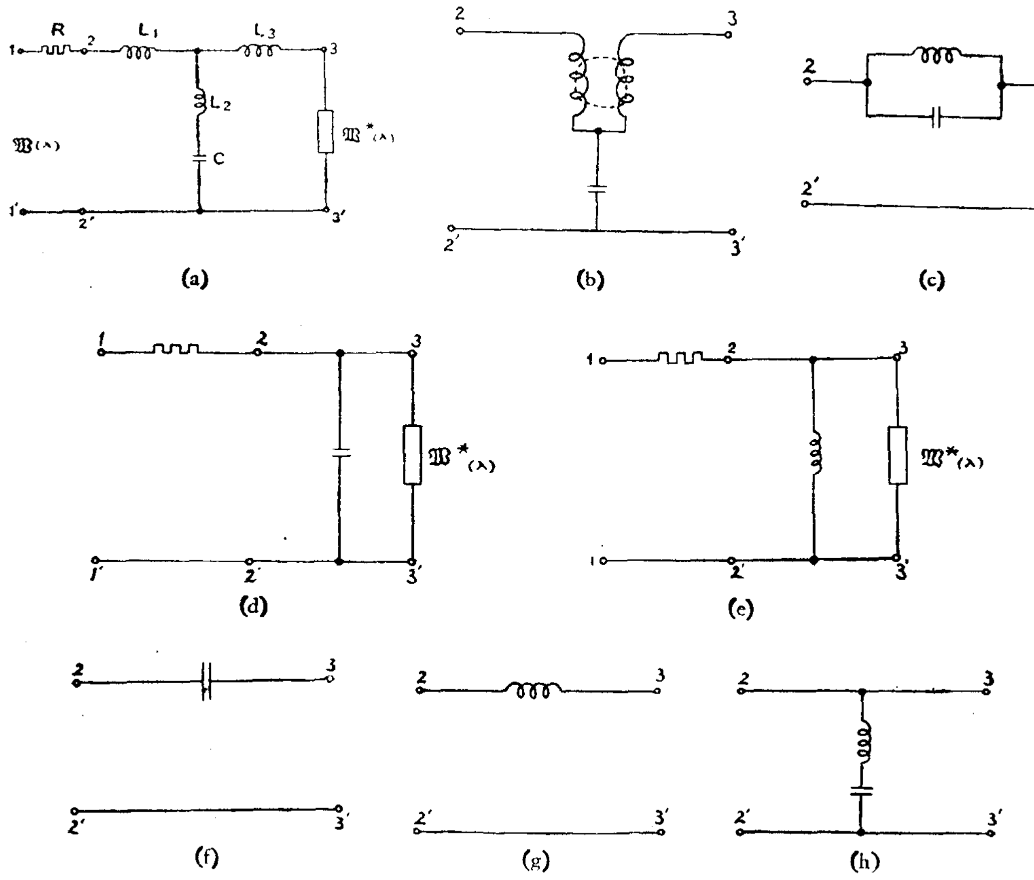


圖 2. 波戎奈兩端網絡實現法.

網絡如圖 2b 所示. 這裏表示有全耦合的互感. 如果 $\omega_0 = 0$, 那麽分出的部分四端網絡如圖 2c 所示. 如果 $\omega_0 \to \infty$, 那麽分出的部分四端網絡如圖 2d 所示. 在後兩種情形下, $\mathfrak{W}^*(\lambda)$ 較 $\mathfrak{W}(\lambda)$ 減低了一次. 上面的情形,在 $\mathfrak{W}(j\omega_0)$ 是有限值時有效. 如果 $\mathfrak{W}(j\omega_0)$ 有一個極點,那麽在第一種情形下,代替部分四端網絡 $22'-33'$, 是用圖 2e 中的四端網絡;在第二種情形下,用圖 2f 的四端網絡; 而在第三種情形下,用圖 2g 的四端網絡. 當 $0 < \omega_0 < \infty$ 並在第一種情形下, $\mathfrak{W}(j\omega_0) = 0$, 那麽代替部分四端網絡 $22'-33'$, 用圖 2h 中的四端網絡. 如此按步繼續進行,最後將 $\mathfrak{W}(\lambda)$ 簡化成一個常數,這種實現法是用最少的網絡元素.

如果所討論的兩端網絡只有電容和電感, 那麽這種兩端網絡的電阻抗函數 $\mathfrak{W}(\lambda)$ 或電導納函數 $\mathfrak{W}^{-1}(\lambda)$, 除了必須滿足上面的 a), b), c) 條件以外, 還必須滿足下面的條件 d):

d) 當 λ 爲虛數時, $\mathfrak{W}(\lambda)$ 爲虛數.

這類函數,我們稱之爲電抗函數. 相反地,凡電抗函數都可用電容和電感來實現. 因爲凡電抗函數都可寫成下列形式:

$$\mathfrak{W}(\lambda) = h_0\,\lambda^{-1} + \lambda \sum_{s=1}^{m} \frac{h_s}{\lambda^2 + k_s} + h_\infty\,\lambda; \tag{1.11}$$

這裏的 $h_0 \geqslant 0$, $h_\infty \geqslant 0$, $h_s > 0$, $k_s > 0$, m 是任一正整數或零. 但 $\mathfrak{W}(\lambda) \equiv 0$ 不認爲是電抗函數. 公式 (1.11) 可用如圖 3 所示的網絡來實現. 這結果首先由福斯特 (R. M, Foster) 得出[3]、通常稱爲福斯特電抗理論,因此我們也可將公式 (1.11) 簡寫成 F 函數.

§3. 波特、都芬和理查德的實現無互感的兩端網絡的方法

波特 (R. Bott) 和都芬 (R. J. Duffin)[4] 用無互感的網絡元素來實現 B 函數: 這方法主要根據許瓦茲 (Schwarz) 引理[5] 和理查德 (P. I. Richard)[6] 的定理,將波戎奈實現方法中有互感的一部分網絡(圖 2a 和 2b) 按下法分成兩部分.

當 Re $\mathfrak{W}(j\omega)$ 的絕對最低值是 Re $\mathfrak{W}(j\omega_0) = R \geqslant 0$ 而 $0 < \omega_0 < \infty$ 時, 使 $\mathfrak{W}_1(\lambda) = \mathfrak{W}(\lambda) - R$ 而 $\mathfrak{W}(j\omega_0) = j\omega_0 L$. 首先,假設 $L > 0$, 那麽 $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ 用圖 4a 中的網絡來實現. 如果 $L<0$, 那麽 $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ 用圖 4b 中的網絡來實現. 圖中的 $\mathfrak{W}_1^*(\lambda)$ 和 $\mathfrak{W}_1^{**}(\lambda)$ 都比 $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ 低二次. 這種實現方法雖無互感,但較波戎奈方法的網絡,元素的數目要多.

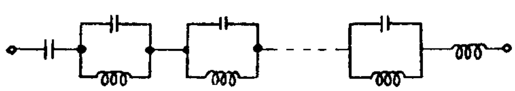


圖 3. 福斯特電抗兩端網絡.

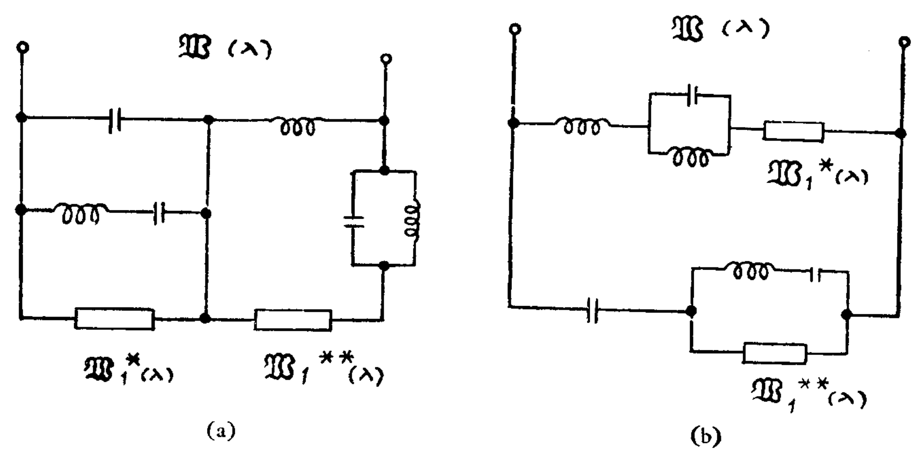


圖 4. 波特、都分和理查德兩端網絡實現法.

§4. 著者的損耗函數理論[7]

任何實際的電感不可能沒有串聯的損耗，任何實際的電容不可能沒有並聯的電導．因此，凡實際的電感和電容再加以電阻和電導所接成的兩端網絡，它的電阻抗函數 $W(\mu)$ 或電導納函數 $W^{-1}(\mu)$ 必須滿足下列條件．這裏的 $\mu=-\varepsilon+\lambda$，而 μ 面的虛軸也用 $j\omega$ 來代表．$W(\mu)$ 或 $W^{-1}(\mu)$ 是有理的，並且

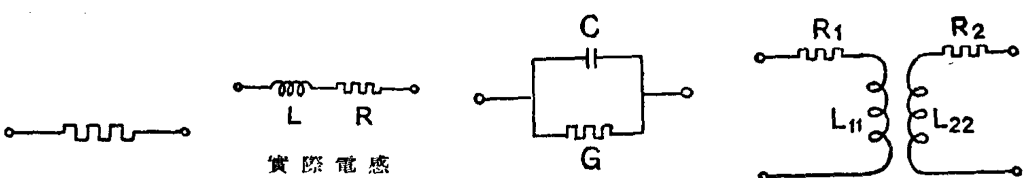
a) 對於實數的 μ，$W(\mu)$ 是實數；

b) $W(\mu)$ 在 μ 的右半閉面上是正規的；但可能有例外，當 $\mu\to\infty$ 時，$W(\mu)$ 可允許有一單極；

c) $W(\mu)$ 的實部 $[\mathrm{Re}\,W(\mu)]$，在 μ 的虛軸上，到處大於零．除了可能的例外，當 $\mu\to\infty$ 時，$W(\mu)$ 有一單零點，但在例外情形中，當 $\mu\to\infty$，$\mathrm{Re}\,W^{-1}(\mu)$ 必具有一正實值．

相反，凡滿足上列條件的函數均可按著者提出的方法，由圖 5 中所示的損耗網絡元素所組成兩端網絡來實現．原始實現法的證明採用的網絡元素較多(參考文獻[7])．這種函數被稱爲“損耗函數”，也有其他著者[2]稱之爲閔乃大函數，或簡稱爲 M 函數．

下面將簡略地介紹一下用最少的損耗網絡元素所組成的梯形網絡來實現 M 函數[8]．首先假設 $\mathrm{Re}\,W(j\omega)=u(x)$ $(x=\omega^2)$ 的絕對最低值是 $\mathrm{Re}\,W(j\omega_0)=R_0$ 並



電阻或電導 R 或 G

實際電感 $L\mu+R$ 或 $\dfrac{1}{L\mu+R}$

實際電容 $\dfrac{1}{C\mu+G}$ 或 $C\mu+G$

實際的互感 $Z=\begin{Vmatrix} L_{11}\mu+R_1 & L_{12}\mu \\ L_{21}\mu & L_{22}\mu+R_2 \end{Vmatrix}$

圖 5. 損耗網絡元素．

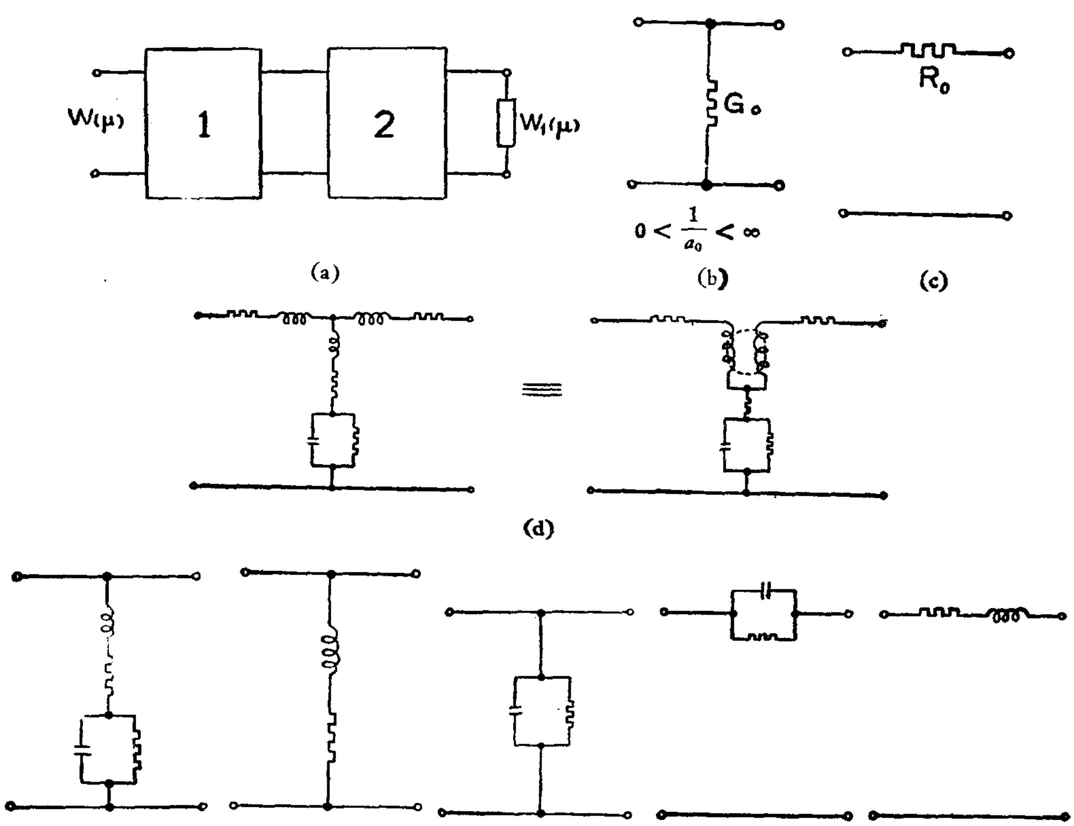
且是單階的，那麼就可分成下面三種類型．

第一類型是 $u(x)$ 的絕對最低值在 $\omega_0=0$ 並且 $\left[\dfrac{du(x)}{dx}\right]_{x=0}>0$．如果 $W(\mu)$ 是阻抗函數，那麼圖 6a 中的部分四端網絡 1 採用圖 6c，而部分四端網絡 2 採用圖 6f；如果 $W(\mu)$ 是導納函數，那麼圖 6a 中的部分四端網絡 1 採用圖 6b 而部分四端網絡 2 採用圖 6h．

第二類型是 $u(x)$ 的絕對最低值在 $\omega_0\to\infty$ 並且 $\left[\frac{du(y)}{dy}\right]_{y=0}>0\left(y=\frac{1}{x}\right)$. 如果 $W(\mu)$ 是阻抗函數，那麽圖 6a 中的部分四端網絡 1 採用圖 6c，而部分四端網絡 2 採用圖 6g；如果 $W(\mu)$ 是導納函數，那麽圖 6a 中的部分四端網絡 1 採用圖 6b，而部分四端網絡 2 採用圖 6i.

在以上兩種類型所分出的部分四端網絡中，可能有這種極限情形，即 $G_0=R_0=0$.

第三類型是 $u(x)$ 的絕對最低值在 $0<\omega_0<\infty$，並且 $\left[\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right]_{x=0}\neq 0$. 圖 6a 中的部分四端網絡 1 和 2，就採用圖 6d. 這裏可能有極限情形 $L_1=L_3=0$，這時部分四端網絡 1 和 2 便變成圖 6e 的形式. 在這類中只能從阻抗函數出發.



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)　(g)　(h)　(i)

圖 6. 著者兩端網絡實現法.

第四類型是 $u(x)$ 的絕對最低值在 $0\leqslant\omega_0\leqslant\infty$ 之中，不滿足第一、第二和第三類型中的任一條件，或者 $u(x)$ 的絕對最低值在兩個或兩個以上，那麽 $W(\mu)$ 總可能用下列方法降低次數：圖 6a 的部分四端網絡 1 採用圖 6b，而部分四端網絡 2 採用圖 6d. 圖 6b 中的 G_0 具有條件，$0<G_0<\infty$. 在特殊情況下，可能將部分四端網絡 2 採