JING JI LING YU ZHONG DE SUI JI GUO CHENG

经济领域中的随机过程

潘介人 编

上海交通大学出版社

本书出版由上海发展汽车工业教育基金会资助

经济领域中的随机过程

潘介人　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书向读者介绍经济和财务管理中的某些数学方法。除了概率论的基本知识外，书中的内容包括：倍增下注法、随机过程、最优中止、利用维纳过程建立不确定性的模型、作为随机运算一种工具的依托引理、关于随机微分方程的基本论点、随机稳定性的概念以及随机控制的方法。在应用方面则涉及期货交易的定价、职业的寻求、随机经济增长、合理期望的假设、随机宏观经济模型、在价格不确定性之下的竞争商号、最优消费和有价证券规则、指数债券的需求、利率的期限结构、项目评估中的市场风险判断、现金平衡的需求以及资产估评模型等等。

本书可作为经济和财政专业研究生用的教材，并且可作为这方面的研究工作者学习和掌握随机方法的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济领域中的随机过程/潘介人编. 一上海：上海交通大学出版社，1999
ISBN 7-313-02348-0

Ⅰ.经… Ⅱ.潘 Ⅲ.经济数学-方法 Ⅳ.F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 54248 号

经济领域中的随机过程
潘介人 编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)
电话：64071208 出版人：张天蔚
立信会计常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销
开本：850mm×1168mm 1/32 印张：7.5 字数：193 千字
2000 年 2 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷
印数：1～1050
ISBN 7－313－02348－0/F·338 定价：11.50 元

序　言

很早就想编写一本关于经济管理中的随机方法的书，给数理经济专业的基本教材增添新的篇幅，同时希望弥补我所撰写的《数理经济》一书的不足，因为在那本书里只写了静态分析，这是与经济领域中绝大多数现实问题不相一致的。直到此后所编写的《宏观经济分析》、《宏观经济模型的解析》、《微观经济分析》和《决策分析中的效用理论》等陆续出版或付印后才使本书的写作得以实现。

经济和财务中的态势不是静止的，也不一定是平稳的，因而我们不能停留在静态分析上，而要基于动态确定的方法和技术去解决经济工作中的一些现实问题。这要求我们必须向随机过程发展来提高解决经济管理中所遇到的各种麻烦的能力。这就是编写本书的目的。

书中所叙述的方法旨在解决与实际经济问题有关的各种复杂事物、质量误差、不确定性，并提出一种建模的方法。但是不可否认，单凭这一本书绝不可能对经济研究工作者提供充分的理性知识，使之有足够的能力去适应范围广阔的需要，用随机方法来解决的一切问题。要写出一本解决一切问题的教材是不可能的。然而作为一本入门的教材，本书有可能成为一本对数理经济专业有用的指南。

在阐明理论和应用之间的相互作用时，书中使用两种方法。在第一章，先叙述倍增下注法和最优中止法，接着就是它们的应用，并从理论上予以阐述。第二章叙述数学方法，第三章和第四章则包含它们在经济和财务领域中的应用。在第一章体现理论与应用的一体化，但是在其余各章则把此两者分开来，以更加有效地保持讲解流畅。有些方法，例如依托引理（Itô Lemma），则将理论和

应用集中讨论。有些方法,尽管它们有完整的理论,但是还没有得到广泛的应用,这就要寄希望于研究人员未来的成果。本书所举的示例包括连续最优中止、随机微分方程、随机控制等等,在经济和财务研究中,应用研究的某些领域(例如随机稳定性)已经引起了一些困难的数学问题,而恰当的数学方法则尚告阙如。因此,本书有些章节虽然涉及这些问题,但应该说还是不够充分完备的。

在本书中,如果不采用测度理论的概率基础,讲解上述这些方法则有很大的困难,因此采用了诸如 σ 域、概率空间、可测函数、数学期望、条件概率等基于测度理论的各种概念。这些素材均取自 Robert Ash 的著作 *Real Analysis and Probability*, Academic Press, New York, 1972, 为了使本书能为更多的读者接受,本书不得不将理论基础的阐述保持在一个基本的最低限度上。

本书的主要读者是经济(特别是数理经济)和财政专业的博士研究生,他们渴望用随机方法作为他们研究的工具。但是对于理工科大学毕业继续攻读 MBA 学位的研究生——他们需要以财务理论或定量分析作为其专门化手段,相信本书会在他们的学习过程中有所帮助。此外,经济和财务工作的研究人员也可以利用本书来掌握随机方法的应用。

作为硕士和博士研究生,他们必须具备运用参考文献,独立培养自己的理解能力。因此,本书中很多定理和引理的证明只是提供文献的来源而不作详细的阐述,这一点需要在此说明。好在书中所引用的参考书大多数在各大图书馆均能找到,查阅是很方便的。

目　　录

第一章　概率引出的结果

§1.1　引言

这一章打算向读者提供学习本书以后各章的背景材料，包括用拓扑来阐述概率论的各种概念(诸如定义、定理和示例)以及倍增下注[①] 和最优中止的规则。一些例子还说明了它们在经济管理中的理论。因此读者至少可以在两个方面得益：首先是研讨并理解各种实用模型的理论基础；其次是熟悉倍增下注和最优中止的理论，它们是在应用研究中用得很广泛的。

§1.2　概率空间

一个试验出现或不出现通常称之为结果，其所以出现与否那是因为"机会介入"的缘故。我们把一个试验结果的总体汇集在一个集合中，这个集合用 Ω 来表示。集合(亦称之为 Ω 空间)中的元素 ω 叫做样本点。Ω 的一个子集称之为事件。例如对于来年失业人数(它作为全体劳动力的一个百分比)来说，Ω 空间就是在 $[0,1]$ 区间中的一个有理数，而 $\omega=0.065$ 就是它的一个元素，即样本点。又如失业率不超过 0.07，或者说失业率在 0.06 和 0.08 之间，这些也都是各别的事件。直观地说，概率就是某一类事件的一个赋值。

设 Ω 是包含许多样本点 ω 的一个任意空间。Ω 的某几类子集在研究概率时显得非常重要。首先我们对**域**(field)和 **σ 域**

① 所谓"倍增下注"就是在赌输后增加或加倍下注的一种赌法。

(σ-field)以及**量度**(也叫做**测度**)给出定义。

我们知道,长度、面积、体积、概率等都是量度这一概念的例子。量度定义为**一个集合函数**,也就是说,给某一类集合中的每个集合 A 赋予 $\mu(A)$ 之值。如果 Ω 是一个集合,它的样本点相应于一个随机试验可能出现的结果,那么 Ω 的一些子集就是如上所说的"事件",并将赋予一个概率之值。现在我们设 $\mathscr{F}$ 为集合 Ω 的许多子集的一个集成。于是 $\mathscr{F}$ 称之为一个域的充要条件就是 $\Omega\in\mathscr{F}$,而且 $\mathscr{F}$ 在余集和有限个并集的条件下是闭的,亦即

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则 $A^c\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$。

满足上述这三个条件,$\mathscr{F}$ 便称之为一个域,由此可见,在有限个交集之下,$\mathscr{F}$ 也是闭的。因为,若 $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$,那么根据德·摩根定律(De Morgan's law):

$$(\bigcup\nolimits_n A_n)^c=\bigcap\nolimits_n A_n^c\in\mathscr{F},\quad(\bigcap\nolimits_n A_n)^c=\bigcup\nolimits_n A_n^c\in\mathscr{F}。$$

如果(3)代之以可数并集的闭包,也就是说,

(4) 若 $A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{F}$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$,于是 $\mathscr{F}$ 便称之为 σ 域。如同上述那样,在可数交集之下,$\mathscr{F}$ 也是闭的。

我们称 $\mathscr{F}$ 的元素为可测(度)集。请注意,对于一个给定的集合 Ω 来说,最小的 σ 域由空集 Φ 及 Ω 集本身构成,而最大的 σ 域则由 Ω 的幂集即 Ω 的所有子集构成。最大的 σ 域由 Ω 的 2^Ω 个子集构成。$(\Omega,\mathscr{F})$ 叫做可测空间。

设 $\mathscr{G}$ 为 Ω 的子集类。包含 $\mathscr{G}$ 在内一切 σ 域之交(即交集)称之为由 $\mathscr{G}$ 生成的 σ 域,并用 $\sigma(\mathscr{G})$ 表示之。例如,我们说由区间 $(a,b]$ 类生成的 σ 域,它们是实数轴 R^1 的子集。这个 σ 域用 $\mathscr{R}^1$ 来表示,而且它的元素称之为波莱尔集(Borel set)。注意到 $\mathscr{R}^1$ 为包含 R 的所有区间类的最小的 σ 域;特别是它包含 R 的一切开集和闭集。直观地,$\mathscr{R}^1$ 是用一切可能的方法从 R 的区间开始并形成迭次

有限且可数的集合理论之运算(包括并集、交集和余集)而得到的。

上面说过,概率是给一类相异事件的赋值。现在我们使这一概念更加精确。设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间。在$\mathscr{F}$上界定的一个集合函数 μ 称之为一个测度,如果它满足下述条件的话:

(1) $\mu(\Phi)=0$;

(2) $A\in\mathscr{F}\Rightarrow 0\leqslant\mu(A)\leqslant\infty$;

(3) $A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{F}$,而且若 A_n 为两两不相交,即 $A_k\cap A_m=\Phi,k\neq m$,则

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)。$$

极其重要的一种测度是勒贝格测度(Lebesgue measure),它用 λ 来表示,并在实数轴 R^1 的波莱尔集合类 $\mathscr{R}^1$ 上有定义。该测度对其长度的每一区间赋值,也就是说,

$$\lambda(a,b]=b-a。$$

我们可以把勒贝格测度 λ 直接延拓到一切波莱尔集。详细的讲解可参阅罗伯特(B. Ash Robert)的著作:*Real Analysis and Probability*(chapter 1), Academic Press, New York, 1972. 注意到 $\lambda(R^1)=\infty$以及每一个可数集的勒贝格测度为0,故在$\mathscr{R}^1$上的勒贝格测度 λ 可加以推广来定义 k 空间 R^k 的波莱尔集,并用$\mathscr{R}^k$表示之。

概率是一种特殊的测度,它用 P 来表示,其中 $P(\Omega)=1$。因此对 $A\in\mathscr{F}$来说,我们有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为概率空间,这里 Ω 是一个非空的空间,$\mathscr{F}$代表不同事件的 Ω 子集的一个 σ 域,而 P 则是定义在$\mathscr{F}$上的一个概率测度。

例如,今考虑[0,1]中的一切实数为 Ω,这些实数代表在未来某个岁月中失业人员在总的劳动力中所占的百分比。设$\mathscr{F}$是这个可数空间 Ω 的一切子集的σ 域,并设 $\mu(\omega)$为定义在 Ω 上的一个非负函数,使得 $\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)=1$。其次,我们定义 $P(A)=\sum_{\omega\in A}\mu(\omega)$。于是$(\Omega,\mathscr{F},P)$便为一个概率空间。

概率空间的一个特殊情况就是其全概率空间。设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间，并设 N 是该空间中的一个子集。如果存在一个集合 $A\in\mathscr{F}$使得 N 包含在A 中，并且 $P(A)=0$，我们便说 N 是一个可除集。如果$\mathscr{F}$包含 Ω 的每个可除子集，则概率空间就是完全的。此概念在本章§7 中用到。

今考虑在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中事件的一个序列$\{A_n\}$。如果$A_1,A_2,\cdots$为 Ω 的子集，则定义

$$\begin{aligned}\limsup_n A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\ &= \{\omega:\omega\in A_n,\text{对无穷多个 } n\},\end{aligned}$$

并且定义

$$\begin{aligned}\liminf_n A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\\ &= \{\omega:\omega\in A_n,\text{对无乎无穷多个 } n\}。\end{aligned}$$

假如所有的 $A_n\in\mathscr{F}$，则 $\limsup\limits_n A_n$ 和 $\liminf\limits_n A_n$ 这两者都属于 $\mathscr{F}$。

在讲述下面一个重要的引理之前，我们还需要对独立性给予定义。根据初等概率论我们知道，如果两个事件 A 和 B 有 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，则称这两个事件是独立的。现在把这一概念推广。设有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，取其中有限个集成。如果对每个集合 $k_1,\cdots,k_j$(这些表明 $1,\cdots,n$ 中相异的指标)有

$$P(A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_j}) = P(A_{k_j})\cdots P(A_{k_j}), \qquad (1.1)$$

那么这有限个集成就是独立的。对事件的无穷多个集成来说，如果每个有限的子集成是独立的，则该无穷多个集成便是独立的。下面这条有用的引理将在本书中经常使用。

引理 1.1 设$\{A_n\}$是在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中事件的一个序列。假使 $\sum\limits_n P(A)<\infty$，则 $P(\limsup\limits_n A_n)=0$。同样地，若事件的序列$\{A_n\}$是独立的，而且 $\sum\limits_n P(A_n)=\infty$，则 $P(\limsup\limits_n A_n)=1$。

这条引理的证明见 J. Neveu 的著作:*Mathematical Foundations of Calculus of Probability*, Holden-Day,1965。

§1.3 随机变量

设$(\Omega,\mathscr{F})$和$(\Omega',\mathscr{F}')$为两个可测度的空间。如果对每个 $A'\in\mathscr{F}'$有

$$X^{-1}(A')=\{\omega:X(\omega)\in A'\}\in\mathscr{F},$$

则映射 $X:\Omega\to\Omega'$是$(\mathscr{F},\mathscr{F}')$可测度的。直观地说,一个映射的可测性意味着对于像空间 Ω'每个有意义的事件在定义域空间Ω 中便有一个有意义的事件。结果是:假如一事件属于一个适当的 σ 域,那么这个事件就是有意义的。由 X 生成并用$\sigma(X)$来表示的 σ 域是最小的σ 域,就这个 σ 域而言,X 是可测度的。

当像空间 Ω'为实数轴R^1 时,这是一个特别重要的例子。在这种情况下,我们用 $\mathscr{R}^1$(即波莱尔集合类)作为 σ 域。一个实函数 $f:\Omega\to R^1$,如果对每个 $A'\in\mathscr{R}^1$ 有 $f^{-1}(A')=\{\omega:f(\omega)\in A'\}\in\mathscr{F}$,那么该实函数 f 便是可测度的。就上述意义来说,一个可测度的实函数即称之为一个**随机变量**。

假定 $f:\Omega\to R^k$ 是可测度的。于是我们把它叫做**随机向量**。请注意,f 具有如下的形式:

$$f(\omega)=(f_1(\omega),\cdots,f_k(\omega)),$$

这里每个分量 $f_i(\omega)$是一个实函数。映射 f 为可测度的,其充要条件是每个分量函数 f_i 都是可测度的。在许多实际应用中我们都假设 f 是连续的,它蕴含着 f 是可测度的。

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间,并设$(R^1,\mathscr{R}^1,\lambda)$为一个可测度的空间,其中 R^1 是实数轴,$\mathscr{R}^1$ 是波莱尔集合的 σ 域,λ 为勒贝格测度,然后假定 X 是一个随机变量,且 $X:\Omega\to R^1$。对所有的 $A\in\mathscr{R}^1$,我们定义 X 的**分布**(用 P_X 来表示)为

$$P_X(A)=P(X^{-1}(A))=P\{\omega:X(\omega)\in A\}\qquad(1.2)$$

随机变量 X 的分布对目标空间中的集合 $A \in \mathscr{R}^1$ 赋给概率测度之值。X 的**分布函数**(用 F 来表示)定义为

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \text{ 对每个 } x \in R^1。 \tag{1.3}$$

注意到 F 是一个右连续的非降函数,它使得

$$F(x) \to 0 \quad \text{当 } x \to -\infty \text{ 时},$$
$$F(x) \to 1 \quad \text{当 } x \to \infty \text{ 时}。$$

在概率论中有一条很有影响的定理,它是说,对一个给定的具有周期特性的分布函数 F 来说,我们总可以构造一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$与一个随机变量 X 使得 F 是 X 的分布函数。关于这一点,具体的情况可参阅 P. Billingsley 的著作[1]。*Probability and Measure*, John Wiley & Sons, 1979。

分布函数的概念可使之推广到一个随机变量 $X:\Omega \to R^k$。对 $x \in R^k$ 来说,我们有

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) &= F(x_1, x_2, \cdots, x_k) \\ &= P\{\omega : X_1(\omega) \leqslant x_1, \cdots, X_k(\omega) \leqslant x_k\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

这里 $X_1, \cdots, X_k$ 是 X 的 k 个分量,并指明 F 是一个**联合分布函数**。设 F 为 k 维随机变量 $X = (X_1, \cdots, X_k)$的一个联合分布。X 的 m 个分量(这里 $m \leqslant k$)的一个亚集成(subcollection)的**边际分布函数**是用∞来代替那些未出现的自变量而得到的。以二维($m=2$)为例,边际分布可以写作

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \infty, \cdots, \infty) \\ &= P\{\omega : X_1(\omega) \leqslant x_1, X_2(\omega) \leqslant x_2, X_3(\omega) \leqslant \infty, \cdots, X_k(\omega) \leqslant \infty\}。 \end{aligned} \tag{1.5}$$

假设 f 是一个非负实函数,使对每个 $A \in \mathscr{R}^1$ 有

$$P\{\omega : X(\omega) \in A\} = \int_A f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.6}$$

那么一个随机变量及其分布 P_X 便具有相对于勒贝格测度的密度 f。我们可以看到密度函数 f 只是在勒贝格零测度集的范围内予以求得。当随机变量具有密度 f 时,密度 f 以及密度函数 F 由下

面的方程联系起来：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)\mathrm{d}s。\tag{1.7}$$

在许多应用中，分布函数 F 是连续可微的，此时 F 的导数便可以用作密度 f。

在初等概率论中有几个大家熟悉的分布的例子，如**二项分布**

$$P_x(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad n=0,1,2,\cdots,n。\tag{1.8}$$

在这个示例中取 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,n\}$，$\mathscr{F}$ 由 Ω 的全部子集构成，并将随机变量 X 定义为 $X(x)=x$。

另一个例子是具有正参数 m 的**泊松分布**

$$P_x(x)=\frac{e^{-m}m^x}{x!},\quad x=0,1,2,\cdots。\tag{1.9}$$

最后一个例子是：若 $x\in A$，$A\in\mathscr{R}^1$，则称

$$P_x(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_A\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x\tag{1.10}$$

为随机变量 X 具有参数 μ 和 $\sigma>0$ 的**正态分布**。

假定 $X_1,\cdots X_n$ 是在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上界定的随机变量，$X_i:\Omega\to R^1$，$i=1,2,\cdots,n$。若对一切波莱尔集合 $A_1,\cdots,A_n$ 有

$$\begin{aligned}&P\{\omega:X_1(\omega)\in A_1,\cdots,X_n(\omega)\in A_n\}=\\&P\{\omega:X_1(\omega)\in A_1\}\cdots P\{\omega:X_n(\omega)\in A_n\},\end{aligned}\tag{1.11}$$

我们就说 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立的随机变量。还有另两个等价的定义。其一是：若对实数 $x_1,\cdots,x_n$ 有

$$P[X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n]=P[X_1\leqslant x_1]\cdots P[X_n\leqslant x_n],\tag{1.12}$$

则 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立的随机变量。我们注意在(1.12)式中的标记法，这里为标记方便起见，自变量 ω 已予压缩了。另一个定义是，若对实数 $x_1,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,\cdots,x_n)=F_1(x_1)\cdots F_n(x_n),\tag{1.13}$$

则 $X_1,\cdots,X_n$ 便为独立的随机变量，这里 F 是 $X_1\cdots,X_n$ 的联合分布函数，而 $F_1,\cdots,F_n$ 是一维分布函数。

上面的定义可以很简单地推广到随机向量。在(1.11)式中，我们知道 X_i 是一个随机变量，A_i 是一个 k 维波莱尔集合。此外，独立性的定义还可以延伸到随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 每个无穷多的子集成，只需要每个有限的子集成按照(1.11)式或其他等价的定义是独立的。

对于定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量的一个序列 $\{x_n\}$ 以及定义在同一个空间上的随机变量 X 来说，有三个实用的收敛概念。首先是，假如存在一个具有 $P(N)=0$ 的集合 $N\in\mathscr{F}$，使对一切 $\omega\notin N$ 来说实数序列 $\{X_n(\omega)\}$ 收敛于 $X(\omega)$，那么我们便说 $\{X_n\}$ **以概率等于1收敛于** X，并且写作

$$X_n\to X_{w.p.1}{}^{①}\quad 当\ n\to\infty 时。\tag{1.14}$$

其次，若对每个正的 ε 有

$$P\{\omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\}=P[|X_n-X|>\varepsilon]\to 0,\tag{1.15}$$

那么我们就说，随机变量的序列 $\{X_n\}$ **在概率上收敛于** X，并且写作

$$X_n\xrightarrow{P}X\quad 当\ n\to\infty 时。\tag{1.16}$$

最后，设 $\{F_n\}$ 和 F 表示 $\{X_n\}$ 及 X 的分布，并假定当 $n\to\infty$ 时对每个定义在 R 上的实值连续有界函数 f 来说有

$$\int_R f(x)\mathrm{d}F_n(x)\to\int_R f(x)\mathrm{d}F(x),\tag{1.17}$$

那么我们就说 $\{X_n\}$ **在分布上收敛于** X，并写作

$$X_n\Rightarrow X\quad 当\ n\to\infty 时。\tag{1.18}$$

可以看出，(1.14)式蕴含着(1.16)式，而(1.16)式又蕴含着(1.17)式。

---

① 为书写方便起见，如大多数文献那样，“以概率等于 1”均采用“w.p.1”表达，此即“with possibility 1”的缩写。

§1.4 期望

若 X 为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机变量,则 X 的**期望**(亦即**数学期望**)定义为

$$E(X)=\int_{\Omega}X\mathrm{d}P, \tag{1.19}$$

只要该积分存在,也就是说,$\int_{\Omega}X\mathrm{d}P<\infty$。于是有一个问题便自然而然地产生了:(1.19)式的意义是什么?我们直接用积分

$$\int_{\Omega}X(\omega)\mathrm{d}P(\omega)=\int_{\Omega}X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)=\int_{\Omega}X\mathrm{d}P \tag{1.20}$$

来回答这个问题。

首先设 X 是一个非负随机变量。我们把 Ω 空间有限地分解为一些集合 A_i,亦即集成$\{A_i\}$使得 $A_i\in\mathscr{F},A_i\cap A_j=\Phi(i\neq j)$,且 $\bigcup\limits_i A_i=\Omega$。对于这样一个分解来说,我们考虑

$$\sum_i\left[\inf_{\omega\in A_i}X(\omega)\right]P(A_i)。 \tag{1.21}$$

利用(1.21)式,今定义(1.20)式的意义如下:

$$\int_{\Omega}X\mathrm{d}P=\sup\sum_i\left[\inf_{\omega\in A_i}X(\omega)\right]P(A_i)。 \tag{1.22}$$

在(1.22)式中,上确界扩展到 Ω 的一切有限个分解$\{A_i\}$上。

其次,我们看到任意的随机变量 X 可以写作

$$X=X^{+}-X^{-}, \tag{1.23}$$

这里 X^{+}表示X 的正部分,它定义为

$$X(\omega)=\begin{cases}X(\omega) & 若\ -\infty\leqslant X(\omega)\leqslant\infty,\\ 0 & 其他。\end{cases} \tag{1.24}$$

X^{-}表示X 的负部分,它定义为

$$X(\omega)=\begin{cases}-X(\omega) & 若\ -\infty\leqslant X(\omega)\leqslant\infty,\\ 0 & 其他。\end{cases} \tag{1.25}$$