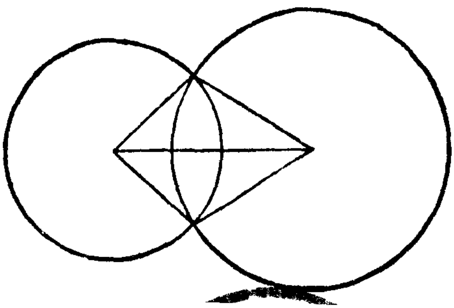
初級中学課本

平面几何

PINGMIAN JIHE



人民教育出版社

初級中学課本

平 面 几 何

北京市書刊出版业營业許可証出字第二号

人民教育出版社編輯出版(北京景山东街)

統一書号：K 7012・635　　字数：129千

北京出版社重印(北京东单麻綫胡同 3 号)

北京市書刊出版业營业許可証出字第 095 号

新 华 書 店 发 行

北京新华印刷厂印刷

开本：787×1092 公厘　1/32　印张：6[illegible]

1955 年第一版

1959 年 4 月第一版第二十九次印刷

北京：000,001—950,000 册

定价：0.34 元

目 录

第一章 緒論

I 基本概念

1. 几何学 我們观察周圍的各种物体，可以看到它們的外形和性质往往各不相同.

物体是根据它們的外形、重量和組成它們的物质的性質等来互相区别的. 在区别各种物体的时候，最容易看到的，首先是每一个物体各具有它自己的形状和大小. 为了滿足生活上的需要，我們常常制造一些物体；在制造这些物体的时候，我們必須使它們的形状和大小适合于它們的用途. 例如，船身应当具有的形状，是使它能在水面上更好地保持平稳的状态和更容易冲破水浪的阻力.

其次，每一个物体对于其他物体来說，都占有一个确定的位置. 在实际生活中，我們常常要用适当的方法把物体放置在所需要的位置上. 例如，在工厂中正确地安装机床和在农村中恰当地装設水車等都是很重要的.

因此，研究物体的形状和大小以及它們相互的位置，就构成了人类知識的一个領域.

研究物体的形状、大小和相互位置的科学叫做**几何学**.

几何学和其他一切科学一样，也是由人类生活的实际需要产生的. 原始时代的人，就已經有区别周圍的物体的形状和大小的需要，并且要注意到它們分布的位置. 例如，他們要熟記居住的地方、打猎的地方等等. 因此他們就漸漸学会怎

样判定各个物体之間的距离和各个地区的大小.

随着人类社会生活的发展,对于物体的形状、大小和相互位置的研究更有需要,从而也就要求人类具有更加丰富的几何知識.

在古代的埃及,由于尼罗河每年的泛濫,冲坏了耕地的疆界,在泛濫以后,需要修复它們.这样,对于測量地面上的某些距离和面积就有了需要.为了完成这些工作,必須掌握适当的法則以便計算距离、面积和繪制土地的图样等等.这些法則曾經被研究出来并且被記录下来.

希腊人在和埃及人通商中,也学到了这些法則.他們逐步加以补充,使这些法則发展成为一門完整的科学.他們把这一門科学称为"几何学",这个名詞的原义就是"測量土地的技术".

希腊的数学家欧几里得(約紀元前330—275)特别詳細地研究了这一門科学,編写出了一本书,叫做"几何原本".这本书对于几何学的发展和几何学的教学,都起了巨大的作用.后来的人学习几何学,根据的就是这本书.直到現在,人們还根据它来編写几何学的課本.

我国对于几何学的研究具有几千年的历史,并且有很多的偉大成就.在黑陶文化时期(約紀元前1,000年),陶器花紋就有菱形、正方形和圓内接正方形等几何图案.在墨翟(紀元前480—390)所著的书里,就提到許多几何学方面的知識.在古代算书"九章算术"中,載有計算各种形状的土地面积和物体体积的方法.在另一本古代算书"周髀算經"中,已講到

关于直角三角形各边間的关系的問題.

2. 几何图形 当我們只研究一个物体的形状和大小而不研究它的其他性質的时候，我們就把这个物体叫做**几何体**，或者簡称为**体**. 如果两个物体的形状和大小都相同，而只是制造它們的材料不同，那末它們的物理性質虽然不一样，但它們却还是完全相等的几何体. 例如，一个橡皮球和一个同样大小的木球，它們的物理性質虽然不同，但它們却是完全相等的几何体.

任何物体都是用它的**面**来和邻接的其他物体分开的. 例如，把物体和邻接它的空气分开的就是这个物体的面. 我們可以离开物体本身而单独想象它的面. 在这样想象的时候，我們把几何的面看做是沒有厚度的. 当然，这样的面实际上并不能单独存在，我們只是在想象中来体会它. 在自然界中只能找到它的大概的形象，例如，极薄的一張紙或者一个肥皂泡的薄膜.

物体的面有时相交(即相遇). 例如，烟囱的面和屋頂的面，正方体的相邻的两个面等等. 当面和面相交的时候就得到了**綫**. 例如，烟囱的面和屋頂的面相交的地方就是綫，正方体的棱(两个面相交的地方)也是綫. 我們可以离开几何的面而单独想象綫. 我們把几何的綫看做是沒有厚度和寬度的. 这样的綫实际上也不能单独存在，我們只是在想象中来体会它. 在自然界中也只能找到它的大概的形象，例如，一条絲綫或者用鉛笔的尖端在紙上画的一条痕迹.

两条綫有时也会相交. 当綫和綫相交的时候就得到了

点．例如，正方体相邻的两条棱就在它的頂相交，正方体的頂就是点．我們也可以离开几何的綫而单独想象点．我們把几何的点看做是沒有厚度、寬度和长度的，就是把它看做是沒有任何大小的．这样的点实际上也不能单独存在，我們只是在想象中来体会它．在自然界中也只能找到它的大概的形象，例如，一个极小的微粒或者用細針在紙上刺的一个小孔．

如果一点任意移动，那末它在这种运动中就画出一条綫．例如，用鉛笔的尖端在紙上画，就留下一条痕迹．这条痕迹就給我們以綫的概念，它是由一点（鉛笔的尖端）运动而成的．

如果一条綫从一个位置移动到另一个位置，那末它在这种运动中就可能画出一个面．例如，我們仔細观察自行車輪的輻条轉动的情形．当車輪很快地轉动的时候，每一条輻条就好象成了一个圓盘，从这里我們就可以看到由于綫的运动而成面的情形．

点、綫、面、体或者它們的集合，都叫做**几何图形**，簡称**图形**．

几何图形具有下面的性質：**几何图形可以在空間移动而不改变它的形狀和大小**．

如果把一个几何图形放到另一个几何图形上面，它們的各部分能够完全重合，这两个几何图形就叫做**全等形**．

3. 直綫 直綫是最簡单的綫．紧紧拉着的細綫或者从一个小孔透进来的光綫等都給我們以直綫的概念．

直綫有下面的性質：**过任意两点，可以引一条直綫，并且只能引一条直綫**．

在实踐中經常要应用到直綫的这种性質．例如，要在平地上測定一条直綫，我們先把一根标杆插到地上，然后在另一个地方插上第二根标杆，这两根标杆就确定了一段直綫．为了延长这段直綫，我們在第二根标杆外的另一个地方再插上第三根标杆，把眼睛靠近它来看前面的两根标杆而把它移动，使得它恰好把前面的两根遮住．同样可以安置第四根、第五根标杆等等．鋸工也应用直綫的这种性質来把木料鋸成木板．他們在木料两端的两点之間拉紧一条綫，然后根据这条直綫来鋸开木料．

4. 平面 平面是最簡单的面．在容器中处于平静状态的液体的表面或者磨得很平滑的鏡面等都給我們以平面的概念．

平面有下面的性質：**如果用一条直綫連結平面內的任意两点，那末这条直綫上所有的点都在这个平面內．**

当刨平一块木板的时候，我們利用平面的这种性質来檢查它刨得是否平滑．我們把一根經过精确地校正过的尺的边放到木板的面上．如果这块木板已經刨得十分平滑，那末无論把这根尺的边放在什么地方，边上所有的点都应当紧紧地貼在木板的面上．

5. 平面几何学 几何图形分平面的和空間的两种．如果图形上所有的点都在一个平面內，这个图形就叫做**平面几何图形**，在一張平滑的紙上所画的图画給我們以这种图形的概念；如果图形上所有的点不全在一个平面內，这个图形就叫做**空間几何图形**，任何几何体都給我們以这种图形的概念．

只研究平面几何图形的性质的几何学叫做平面几何学.

6. 研究几何图形的方法 研究几何图形的形状、大小和相互位置，只用直接测量或单凭經驗有时是不够的. 例如，直接测量一个物体的长度和高度并不永远都是可能的. 测量桌子的长度和房間的高度比較容易，但要测量一架飞着的飞机离开地面的高度就相当困难了.

因此，在几何学中，我們不限于运用直接测量，更主要的是运用推理的方法，也就是說，利用几何图形的已知的性质，来正确地进行推理，以发现新的性质.

例如，我們利用"过任意两点，可以引一条直綫，并且只能引一条直綫"这个性質，就可以推得：**两条直綫不能有一个以上的交点.** 因为，如果两条直綫能够相交于两点，那末过这两点就可以引两条直綫，而不是只能引一条直綫. 这就是，运用正确的推理方法，我們得到了"两条直綫不能有一个以上的交点"这新的性質.

这样的正确推理，是研究几何图形的性质的主要方法. 推理的过程叫做**証明**.

II 直綫

7. 直綫、射綫、綫段 我們把直綫想象成是向两方无限伸长着的. 直綫通常用表示它的任何两点的两个大写字母来表示，例如，"直綫 AB"或者"直綫 BA"(图 1)；或者用一个小写

图 1

图 2

字母来表示，例如，“直綫 a”(图 2).

画直綫可以用直尺．例如，要过两个已知点 A 和 B 画直綫，我們就把直尺的边紧紧地靠着这两个已知点，并且用鉛笔的尖端沿着直尺的边来画．

在直綫上某一点一旁的部分叫做**射綫**，这点叫做**射綫的端点**．

射綫通常用表示它的端点和射綫上另外任何一点的两个大写字母来表示，把表示端点的字母写在前面，例如，“射綫 OC”(图 3).

图 3

直綫上任意两点間的部分叫做**綫段**，这两点叫做**綫段的端点**．

綫段通常用表示它的两个端点的大写字母来表示，例如，“綫段 DE”或者“綫段 ED”(图 4)；或者用一个小写字母来表示，例如，“綫段 b”(图 5).

图 4

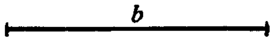


图 5

已知一条綫段的两个端点，我們可以用直尺靠紧这两个端点画出这条綫段．連結两点的綫段的长叫做**这两点間的距离**．

利用直尺，我們可以把一条綫段向两方延长到任意长．例如，我們可以过 B 点把綫段 AB 延长(图 6)，也可以过 A 点把它延长(图 7)．在前一种情形，我們說是延长 AB；在后一种情形，我們說是延长 BA，或者說是反向延长 AB．延长的

部分叫做原綫段的延长綫(图中用虚綫表示的).

图 6

图 7

8. 綫段的相等和不等 把一条綫段放到另一条綫段上,如果能够使它們的两个端点分别重合,这两条綫段就叫做相等的綫段. 例如,把綫段 AB 放到綫段 CD 上,使 A 和 C 重合,并且使綫段 AB 順着綫段 CD 落下. 如果 B 和 D 也重合(图 8),那末綫段 AB 和綫段 CD 就相等. 这时,可以写成:

$$AB=CD \text{ 或者 } CD=AB.$$

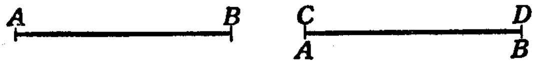


图 8

如果 B 和 D 不重合,那末綫段 AB 和綫段 CD 不相等. 这时,如果 B 落在 C、D 两点中間(图 9),綫段 AB 就是較短的綫段,可以写成:

$$AB<CD \text{ 或者 } CD>AB.$$

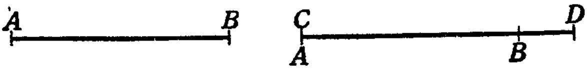


图 9

如果 B 落在綫段 CD 的延长綫上(图 10),綫段 AB 就是較长的綫段,可以写成:

$$AB>CD \text{ 或者 } CD<AB.$$

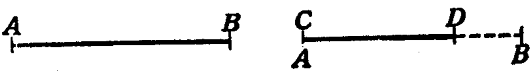


图 10

从直綫上一点，向它的任何一方都可以截取一条綫段等于已知的綫段．这时，我們需用圓規．例如，要在直綫 a（图11）上从一点 C 截取和已知綫段 AB 相等的綫段，我們可以先把圓規的两脚分开，使它的两个尖端間的距离等于 AB，然后保持着这个距离，把圓規的一个尖端放在 C 上，另一个尖端落在直綫 a 的另一点 D 上，这时，綫段 CD 就等于綫段 AB．同样，我們也可以从 C 向另一方截取．

图 11

9. 綫段的加减 如果在綫段 AB 上取任意一点 C（图12），就得到两条新的綫段 AC 和 CB．这时，綫段 AB 叫做綫段 AC 与綫段 CB 的和，綫段 AC（或 CB）叫做綫段 AB 与綫段 CB（或 AC）的差．就是

图 12

$$AB=AC+CB;\quad AC=AB-CB;\quad CB=AB-AC.$$

要把两条已知的綫段 AB 和 CD（图13）加起来，我們可以在綫段 AB 的延长綫上，从 B 起截取綫段 BE 使它等于 CD．这时，綫段 AE 就是綫段 AB 与綫段 BE 的和，也就是綫段 AB 与綫段 CD 的和：

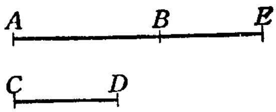


图 13

$$AE=AB+BE=AB+CD.$$

如果我們在綫段 AB 的延长綫上，从 B 起截取綫段 BC 使它等于綫段 AB（图14），那末，

$$AC=AB+BC=AB+AB=2AB.$$

所以綫段 AC 等于綫段 AB 的 2 倍，而綫段 AB（或者綫段 BC）等于綫段 AC 的二分之一．这时，我們說 B 把綫段 AC 平分（或者二等分）．平分一条綫段的点叫做这綫段的**中点**．

图 14

用相同的方法，我們可以把三条、四条、……綫段加起来，或者作一条綫段使它等于已知綫段的 3 倍、4 倍、……等等．

要从一条較长的綫段 AB 减去一条較短的綫段 CD（图 15），我們可以在綫段 AB 上，从 A 起截取綫段 AE 使它等于 CD，这时，綫段 EB 就是綫段 AB 与綫段 AE 的差，也就是綫段 AB 与綫段 CD 的差：

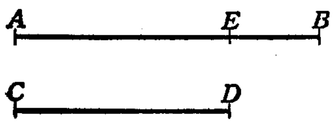


图 15

$$EB=AB-AE=AB-CD.$$

10. 綫段的长度 要量一条綫段的近似长度，可用刻度尺（带有刻度的直尺）．通常我們用的刻度尺上的两个小刻度間的距离等于一毫米．

为了量一条綫段的长度，我們把刻度尺靠近綫段，使刻度的起点和綫段的一个端点重合，然后讀出和綫段另一个端点相合的刻度数．

如果已知的各綫段用同一长度单位（例如厘米）来量，并且量得的长用相应的数来表示，那末綫段的和就用量这些綫段所得各数的和来表示；两条綫段的差，就用量这两条綫段所

得两数的差来表示等等.

用刻度尺也可以近似地画出已知长度的綫段.

例 1 从直綫上一点M起截取綫段MN等于10厘米，再从M起向同一方向截取綫段MP等于16厘米. 求綫段MN的中点A和綫段MP的中点B間的距离.

图 16

解: $$MA=MN\times\frac{1}{2}=10\times\frac{1}{2}=5,$$

$$MB=MP\times\frac{1}{2}=16\times\frac{1}{2}=8.$$

∴ $$AB=MB-MA=8-5=3.$$

答: 所求的距离是3厘米.

例 2 把一条18厘米长的綫段分成2:3:4三部分，求第一部分的中点和第三部分的中点間的距离.

图 17

解: 設AB是18厘米长的綫段，C和D是分点，M是綫段AC的中点，N是綫段DB的中点；那末

$$AC=AB\times\frac{2}{2+3+4}=18\times\frac{2}{9}=4,$$

$$CD=AB\times\frac{3}{2+3+4}=18\times\frac{3}{9}=6,$$

$$DB=AB\times\frac{4}{2+3+4}=18\times\frac{4}{9}=8.$$

$\therefore \qquad MC = AC \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$

$\qquad\qquad DN = DB \times \frac{1}{2} = 8 \times \frac{1}{2} = 4.$

$\therefore \qquad MN = MC + CD + DN = 2 + 6 + 4 = 12.$

答: 所求的距离是 12 厘米.

习 題 一

1. 作一条綫段使它等于三条已知綫段的和.

2. 作一条綫段使它等于已知綫段的 4 倍.

3. 已知两条綫段的和与其中的一条綫段, 求作另一条綫段.

4. 已知綫段 a 和 b ($a>b$), 求作一条綫段使它等于:

   (1) $3a+2b$;　(2) $3a-2b$.

5. 用刻度尺量一条已知綫段的长, 并且求出这条綫段的中点.

6. 按照 1:500 的比例尺, 在纸上画出表示下列实际长度的綫段:

   (1) 10 米;　(2) 24 米.

7. 两条綫段的和等于 11 厘米, 它們的差等于 4 厘米, 求每一条綫段的长.

8. 把綫段 AB 延长到 C, 使綫段 BC 等于綫段 AB 的 5 倍, 如果綫段 AC 的长为 9 厘米, 求綫段 AB 和綫段 BC 的长.

9. 从直綫上的一点 M 起截取綫段 MN 等于 5 厘米, 再从 M 起向相反的方向截取綫段 MP 等于 7 厘米. 求这两条綫段的中点間的距离.

10. 长 9.6 厘米的綫段 MN 被分成 3:4:5 三部分, 如果 A、B、C 分別为这三部分的中点, 求綫段 AB 和綫段 BC 的长.

III　圓的概念

11. 圓、弧　当射綫 OA 繞着它的端点 O 旋轉一周的时候

(图 18)，射綫上的一点，例如 A，就画出一条綫，这条綫叫做**圓**. O 叫做这个圓的**圓心**. 圓上所有的点到圓心的距离都相等. 連結圓心和圓上任何一点的綫段(如 OA、OB、OC)叫做圓的**半徑**.

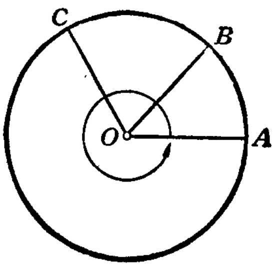


图 18

同圓的半徑相等.

圓可以用符号“⊙”来表示，以 O 为圓心的圓可以記做“⊙O”.

如果两个圓的半徑相等，那末我們把这两个圓的圓心重合在一起的时候，这两个圓上所有的点就完全重合(因为它們到圓心的距离都相等)，这样的两个圓叫做**等圓**. 因此

等圓的半徑相等.

过圓上任意两点的直綫(如图 19 中的直綫 MN) 叫做圓的**割綫**.

連結圓上任意两点的綫段(如图 19 中的綫段 EF)叫做圓的**弦**.

过圓心的弦(如图 19 中的綫段 AD) 叫做圓的**直徑**. 一条直徑等于两条半徑的和. 所以，

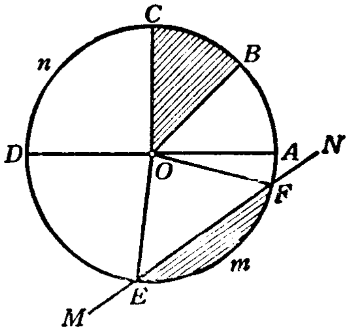


图 19

同圓(或者等圓)的直徑相等.

圓上任意两点間的部分(如图 19 中的 EmF) 叫做**弧**，这

两点叫做弧的端点．弧可以用符号“⌒”来表示，以E和F为端点的弧可以記做$\overset{\frown}{EF}$或$\overset{\frown}{FE}$．圓上任意两点把圓分成两条弧，这两条弧組成一个圓．为了区别这两条弧起見，我們可以在两个大写字母中間添上一个小写字母，例如，$\overset{\frown}{EmF}$和$\overset{\frown}{FnE}$．

連結一条弧的两个端点的綫段，叫做这条**弧所对的弦**，而这条弧就叫做这条**弦所对的弧**．例如，图19中，綫段EF是$\overset{\frown}{EmF}$所对的弦，而$\overset{\frown}{EmF}$是弦EF所对的弧．

一条弧和过这弧的端点的两条半徑所組成的图形（如图19中$\overset{\frown}{BC}$和半徑OB、OC所組成的图形）叫做**扇形**．

一条弧和这弧所对的弦所組成的图形（如图19中$\overset{\frown}{EmF}$和弦EF所組成的图形）叫做**弓形**．

我們可以用圓規来画圓．

12. 弧的相等和不等 把同圓（或者等圓）中的一条弧放到另一条弧上，如果它們的两个端点能够分别重合，这两条弧就叫做**相等的弧**．例如，把$\odot O$中的$\overset{\frown}{AmB}$放到$\overset{\frown}{CnD}$上（图20），使A和C重合，并且使$\overset{\frown}{AmB}$順着$\overset{\frown}{CnD}$落下，如果B和D也重合，那末这两条弧上所有的点也就完全重合（因为它們到圓心O的距离都相等），这时，$\overset{\frown}{AmB}=\overset{\frown}{CnD}$．

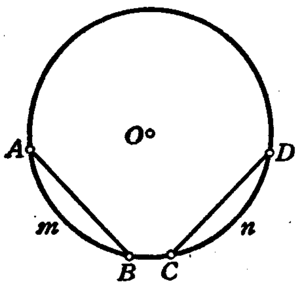


图 20

如果B和D不重合，那末$\overset{\frown}{AmB}$和$\overset{\frown}{CnD}$不相等．这时，如果B落在$\overset{\frown}{CnD}$上，那末$\overset{\frown}{AmB}<\overset{\frown}{CnD}$；如果$B$落在$\overset{\frown}{CnD}$外，那末$\overset{\frown}{AmB}>\overset{\frown}{CnD}$．