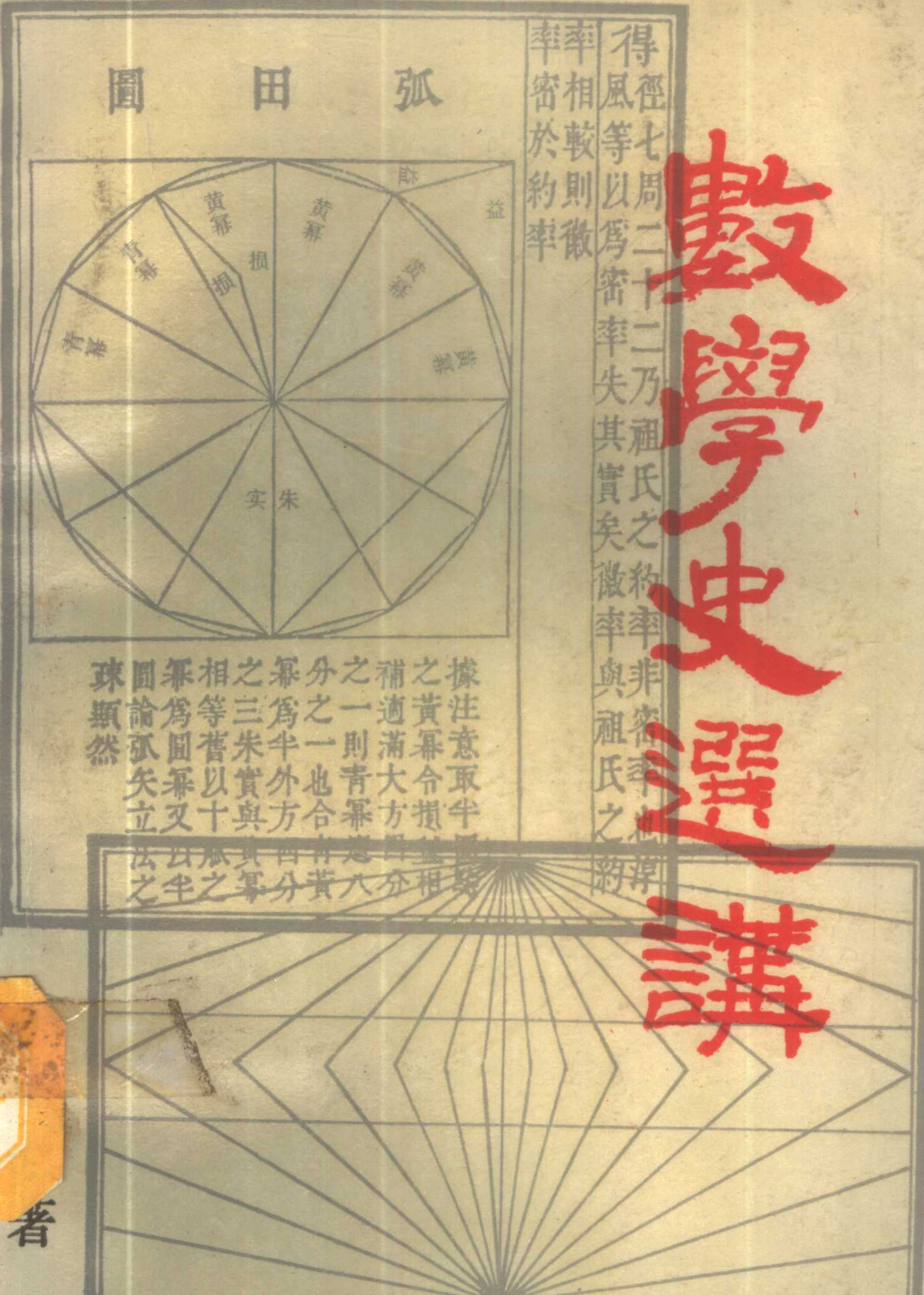
數學史選講



著

SHUXUESHI XUANJIANG • 江苏教育出版社

錢克仁著

數學史選講

江蘇教育出版社

数学史选讲

钱克仁 著

出版：江苏教育出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：江苏新华印刷厂

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 9.25 插页 5 字数 230,000
1989 年 1 月第 1 版 1989 年 1 月第 1 次印刷
印数 1—3,000 册

ISBN 7—5343—0572—1

G·511 定价：3.05元

责任编辑 何震邦

序

近年来，越来越多的数学教育工作者已认识到在数学教育中增加数学史内容的重要性。一般的数学史料可以使数学教育内容变得更加生动有趣；中国古代数学的伟大成就可以激发和提高民族自豪感；数学发展史上的高潮及其成功的经验可以作为今后发展数学的借鉴，而低潮和失败的教训可以帮助我们今后少走一些弯路；历史上的数学思想和数学方法可以给今人以启示。一个数学工作者和数学教育工作者，如果不了解他所从事的数学工作的历史和现状，是很难在这个领域有所创造或引导他的学生走上正确的道路的。

钱克仁先生从事数学教育工作四十多年，长期受到他的父亲、著名数学史家钱宝琮教授的影响和熏陶；在教学工作中，结合实际需要，经常开展数学史的讲授与研究。近年来，他把自己多年来的讲稿整理成册，名为《数学史选讲》。这是一件很有意义的工作。

钱先生的《选讲》有下列几个特点：

(1)《选讲》是从古代到近代数学产生前、后选择一些专题来讲述它的历史，重点是介绍一些原著的内容及作者的主要成就，这对数学教师结合数学教育是十分方便的。

(2) 在全部专题中，有中国的，有西方的，主要以其在数学史上的重要性及其成就的大小而言。这就克服一些西方数学史书籍中忽视中国，不提或少提中国古代数学成就的偏向，也避免在对待中国古代数学成就上盲目自大的弊病。从《选讲》中既可以看到中国古代数学的伟大成就，又可以了解整个数学发展的大概情况。

（3）在中国古代数学的专题中，十分重视介绍西方关于这个专题的工作；同样在西方数学的专题中，也不忘记中国古代数学家的有关工作。这种比较对照的叙述，不仅有利于了解每一项工作在世界数学发展中的地位，同时也有利于了解中、西方数学的优点和缺点。

此外，从《选讲》的对比论述中，人们自然会提出，在古代，中、西方数学为什么有这样那样的差别，为什么中国古代偏重于计算，古希腊偏重于几何？为什么在几何中古希腊如此重视公理化体系与图形性质的研究，而中国却不是这样？为什么西方古代数学的繁荣时期出现在奴隶社会而中国古代数学的繁荣时期出现在封建社会？为什么近代数学产生于西方而不是产生于中国？等等。从这个角度说，《选讲》对启发人们进一步进行思考和研究也是很有帮助的。

我们相信，这一著作的出版，对准备在高等学校开设数学史课的教师、所有的中学数学教师以及对数学史研究工作者和爱好者都是有一定参考价值的。

严敦杰

一九八六年十二月

前　言

江苏师范学院(今苏州大学)数学系于1981年起设置数学史课程。这本《数学史选讲》就是为这门课程编写的。所选课题的重点是与中、小学数学教材关系较多的中国、外国的数学史料。内容大致可分三类：(1) 简单介绍《算经十书》，特别是《九章算术》，欧几里得的《几何原本》等数学名著的内容；(2) 对于圆周率，几何三大问题，二项定理，孙子定理，素数，高次方程等专题作了综合性的叙述；(3) 简单介绍三角，解析几何，微积分各科的历史发展。

所谓综合性的叙述，是将历史上中、外数学家对同一课题的研究成果同时加以阐说，并进行一些比较。这样就避免了现有中、外数学史书籍里各讲一个方面的缺陷，并且指出外国数学史著作中对我国古代数学成就的误解。

选讲，不是对数学史作全面的讲述。如果将数学发展的历史按民族来分(如中国数学史、希腊数学史等)，或按科目来分（如算术史，几何史等)，这都是可以的；但我认为对于多数读者来说，尤其是中、小学教师来说，不如采用专题选讲的方法更为实惠一些。我真诚希望《选讲》的出版能实现这一心愿。

数学史这门课，我讲了六次(1981—1985)，每次讲若干课题，印过一些讲义，每次都适当地作了一些补充订正。江苏教育出版社多年前就要出版我这一讲稿。书稿集成以后，特请中国科学院自然科学史研究所梅荣照先生(副研究员)详细审阅全稿，梅先生提出了很宝贵的几十条意见。我非常感激并对原稿作了改正和补充。自然科学史研究所的著名数学史家严敦杰先生(研究员)看了

拙作并为此稿写了序言。对梅先生、严先生，我谨表示衷心的感谢。

希望读者对本书的内容提出批评和建议。

钱克仁

一九八七年五月于苏州大学

目　录

第一讲 《算经十书》

钱宝琮(1892—1974)在《校点算经十书序》* 中说:"《算经十书》包括从汉初到唐末一千年中的数学名著,有着丰富多采的内容,是了解中国古代数学必不可少的文献.在这一千年的时期里,我们的祖先发展了许多数学知识,创造了许多计算技能.有些光辉成就不仅当时在世界上是先进的,就是对现在的数学教学也还有一定的参考价值."“要发扬古代数学的伟大成就,明了数学发展的规律,首先必须将《算经十书》重加校勘,尽可能消灭一切以讹传讹的情况."

这里,把《算经十书》的内容作一些简要的介绍.

1.《周髀算经》

《周髀算经》原名《周髀》,不详作者名氏,成书于公元前100年左右.它是我国最古的天文学著作,主要阐明盖天说和四分历法.盖天说是西汉时期天文学家的一种宇宙构造学说,认为天的形状象车子的顶盖,地在盖下,日、月、五星都在这“盖”上移动,它们的明、暗都是由于离人的远近所致.四分历法是一种用闰月来调节四时季候的阴历,用三百六十五日又四分之一日为一个回归年,十九年有七个闰月,一个平均朔望月为二十九日又九百四十分之四百九十九日.

《周髀》中的数学成就,主要的有:

一、相当繁复的分数乘除 例如“内衡周"714000里,1里=

* 钱宝琮《校点算经十书》,中华书局,1963.

300步，周天$365\frac{1}{4}$度，得到内衡周上1度的弧长是

$$714000\text{里} \div 365\frac{1}{4} = 714000\text{里} \times 4 \div 1461$$

$$= 1954\ \frac{1206}{1461}\text{里}$$

$$= 1954\text{里}247\frac{933}{1461}\text{步}.$$

二、计算太阳在正东西方向时离人远近，用到勾股定理 已知弦与勾求股．例如，已知天之中离周(地名)103000里，夏至日道的半径是119000里，问“周”地正东西方向太阳直射地方离开周的距离．得到

$\sqrt{119000^2-103000^2}$ 之值约为 $59598\frac{1}{2}$(里)．

《周髀》开始的叙述中，有讨论勾股测量的方法，举出“勾三股四弦五”的特例，从而有勾股定理的发现．书中所提二十四个节气的名称与汉武帝太初元年(公元前104年)的三统历法的基本相同．所以《周髀》可以断定是汉朝人的著作．所谓周公、商高问答之辞，是作者伪托的话．

唐代规定《周髀》为十部算经之一，从而改为《周髀算经》．

传本《周髀算经》有赵君卿(即赵爽，3世纪)的注，有甄鸾(6世纪)的重述，还有李淳风(7世纪)的注释．赵爽有《勾股圆方图》一篇附在《周髀算经》首章的注中，并有四张弦图和一张并实图，对勾股定理、勾股弦的几个关系式以及二次方程解法都有了几何的证明．

赵君卿说：“勾股各自乘，并之，为弦实，开方除之，即弦．”这是说，设a=勾，b=股，c=弦，则有

$$a^2+b^2=c^2,\ c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

赵君卿又说："又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实。加差实，亦成弦实。"

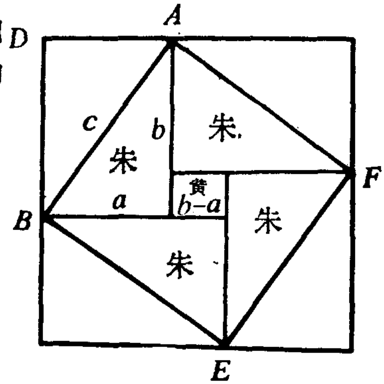


图 1-1

如图 1-1，$ab=2\triangle ABC$（朱实二），

$2ab=4\triangle ABC$（朱实四），

$(b-a)^2=$中黄实（差实）

$2ab+(b-a)^2=$正方形

$ABEF=c^2$（弦实）

就是 $a^2+b^2=c^2$。

赵君卿又得到过二次方程的求根公式，他说："其倍弦为广袤合，而令勾股见者自乘为实，四实以减之，开其余，所得为差。以差减合，半其余为广。减广于弦，即所求也。"设广$=x_1$，袤$=x_2$，$x_1+x_2=2c$（倍弦），$x_1\cdot x_2=$实$=a^2$（勾自乘）或b^2（股自乘）。"四实以减之，开其余，所得为差"，是说 $\sqrt{(2c)^2-4a^2}=x_2-x_1$。"以差减合，半其余为广"，$\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)-(x_2-x_1)\right]=x_1=$广，就是 $x_1=\frac{1}{2}\left[2c-\sqrt{(2c)^2-4a^2}\right]$。显然，这就是二次方程 $x^2-2cx+a^2=0$的求根公式． $x_2=2c-x_1=2c-\frac{1}{2}\left[2c-\sqrt{(2c)^2-4a^2}\right]=\frac{1}{2}\left[2c+\sqrt{(2c)^2-4a^2}\right]$。减广于弦，$c-x_1=\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2c)^2-4a^2}=b$。

2．《九章算术》

《九章算术》共九卷，不详作者名氏，《九章算术》是一部现在

有传本的、最古老的中国数学书，它的编纂年代大约是东汉初期(50—100)*. 书中收集了二百四十六个应用问题和解法，分别隶属于下列九章，所以称为《九章算术》.

章	名	题数	主要内容
一、	方田	38	面积的计算，分数算法
二、	粟米	46	粮食交易——简单比例问题
三、	衰分	20	配分比例问题
四、	少广	24	开平方、开立方、球体积计算
五、	商功	28	体积、容积的计算
六、	均输	28	与运输、纳税有关的加权比例问题
七、	盈不足	20	盈亏类问题的解法，其他类型的难题也用盈不足术处理
八、	方程	18	联立一次方程组解法，正负数
九、	勾股	24	勾股定理的应用问题，勾股测量

各章内容，本书另有专篇作较深入的介绍。

16世纪以前的中国数学书原则上遵守《九章算术》的体例，很多是应用问题解法的集成，后世的中国数学家结合当时社会的实际需要，引入新的数学概念和数学方法，超出了《九章算术》的范围，但也是在《九章算术》数学知识的基础上发展起来的. 因此，可以说《九章算术》为后世的中国数学奠定了基础. 《九章算术》正文包括"题"、"答"、"术"三个部份. "术"说明解题的思想和方法的大概，一般是不容易看懂的，因此，对《九章算术》做注释是很有价值的工作。

传本《九章算术》有魏、晋时代刘徽的注(263)**和唐李淳风(7世纪)等的注释. 刘徽把《九章算术》中各种的算法一一说明，并把它们在理论上进行归类，提纲挈领地阐明所以能解的道理. 另一方面，刘徽在注中又补充了新的解法，创立了准确的圆周率.

* (50—100)表示公元50年到100年之间，下同。

** (263)表示公元263年，下同.

唐李淳风等对刘徽注本作了一些解释．李淳风等在少广章开立圆术的注释中引述了南北朝祖暅(gěng)（6世纪）的著作，介绍球体积公式的理论基础．祖暅与他父亲祖冲之（429—500）对于球体积的研究在他们的著作《缀术》失传以后，幸有李淳风等的征引而得流传到现在．清嘉庆初年，李潢（？—1812）撰《九章算术细草图说》九卷，有校勘、有补图，有详草，有说明，发挥了刘徽注的原意．

3．《海岛算经》

《海岛算经》一卷原为刘徽《九章算术注》十卷的最后一卷．刘徽撰《重差》一章附于《九章算术》之后，他在《九章算术注原序》中说："辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下．"《周髀算经》上卷有依据两个测望数据推算太阳"高、远"的方法．这种测量方法在地面为平面的假设下，理论上是正确的．由于地面不是平面，所以《周髀》所谓"日去地"的"高"和"日下"离测望地点的"远"是脱离实际的．但在地面上几里路以内，用两次测量的方法测量目的物的高和远还是正确的．因为推算高、远的公式中用着两个差数，所以这种测量方法称为"重差术"．刘徽在汉人重差术的基础上，把它的应用加以推广，他说："度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望．触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入．"

唐朝初年选定十部算经时，《重差》一卷和《九章算术》分离，另本单行．因为它的第一题是测望海岛山峰，推算它的高、远的问题，从而《重差》被改称为《海岛算经》．

宋刻本的《海岛算经》早已失传．现在的《海岛算经》传本是由戴震从《永乐大典》中辑录出来的九个问题订成的，原书中题目的个数和次序，现已无法考查了．刘徽序中有"辄造重差，并为注解"的话，但《永乐大典》中的《海岛算经》只有李淳风等的注释，没有刘徽的自注，也没有刘徽的《九章重差图》．李淳风等的注释仅仅

在每一条术文之下写出了用问题中的已知数据计算所求答案的演算步骤而没有将刘徽设题造术的理由注释出来。清李潢有《海岛算经细草图说》一卷，沈钦裴有《重差图说》一卷。两书都用相似形的对应边成比例说明刘徽术文的正确性，但“图”中添线过多，未必能符合刘徽造术的原意。因此，刘徽重差术的理论根据还是应作进一步的探讨的。

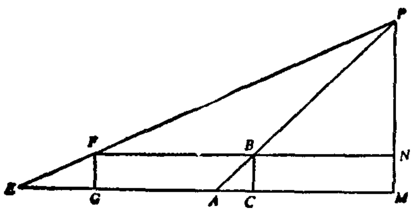


图 1-2

《海岛算经》第一题：如图 1-2：“今有望海岛(MP)。立两表(CB、GF)齐高三丈，前后相去(GC)千步，令后表与前表参相直。从前表却行(AC)一百二十三步，人目着地，取望海岛峰，与表末参合。从后表却行(EG)一百二十七步，人目着地，取望岛峰，亦与表末参合。问岛高(MP)及去表(CM)各几何？答曰：岛高四里五十五步。去表一百二里一百五十步。”

当时，1里＝300步，1步＝6尺，所以1里＝180丈。

已知：$CB=GF=3$ 丈 $=5$ 步，$GC=1000$ 步，$AC=123$ 步，

$EG=127$ 步。

求：岛高 MP 和去岛远 CM。

因 $\triangle EGF \sim \triangle FNP$，得

$$NP\cdot EG=FN\cdot GF \qquad (1)$$

因 $\triangle ABC \sim \triangle BPN$，得

$$NP\cdot AC=BN\cdot CB \qquad (2)$$

(1)、(2)两式相减，得

$$NP(EG-AC)=GC\cdot CB$$

$$NP = \frac{GC \cdot CB}{EG - AC}^{*}. \tag{3}$$

得岛高 $$MP = \frac{GC \cdot CB}{EG - AC} + CB \tag{4}$$

前表去岛远 $$CM = BN = \frac{AC \cdot NP}{CB}$$

$$= \frac{AC}{CB} \cdot \frac{GC \cdot CB}{EG - AC}$$

$$= \frac{GC \cdot AC}{EG - AC} \tag{5}$$

所以刘徽的术文说："以表高（CB）乘表间（GC）为实，相多（$EG-AC$）为法，除之，所得加表高即岛高。求前表去岛远近者，以前表却行（AC）乘表间（GC）为实，相多（$EG-AC$）为法，除之，得岛去表里数。"

答：岛高 $MP = \frac{1000 \times 5}{127 - 123}$步 + 5 步 = 1255步 = 4里55步。

前表去岛远

$$CM = \frac{1000 \times 123}{127 - 123}\text{步} = 30750\text{步} = 102\text{里}150\text{步}.$$

吴文俊《海岛算经古证探原》（1981）认为刘徽《九章算术注》中许多证法是根据"出入相补"原理的.例如（图1-3），从长方形 $AEBD$ 与对角线 AB 上一点 C，可得

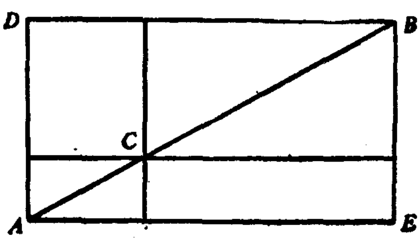


图 1-3

* （3）式中 $\frac{GC}{EG-AC}$ 是两个差数之比，所以称为重差术。

长方形CD的面积 = 长方形CE的面积.

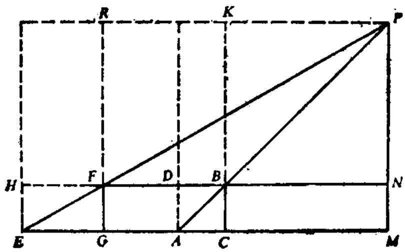


图 1-4

刘徽"重差术"的根据也可能是这种"出入相补"原理.《海岛算经》第一题可以解之如下:

如图1-4, 从长方形EP与对角线EP上一点F, 可得长方形HR = 长方形GN, 即

$$HF\cdot NP = FG\cdot GM \tag{1}$$

从长方形AP与对角线AP上一点B,

可得 长方形DK = 长方形CN,

即 $$DB\cdot NP = BC\cdot CM \tag{2}$$

(1)、(2)两式相减:

$$NP\cdot(HF-DB) = BC\cdot(GM-CM),$$

即

$$NP\cdot(EG-AC) = BC\cdot GC.$$

同样得到前述的(3)、(4)、(5)诸式.

4. 《孙子算经》

《孙子算经》三卷是公元400年前后的书*, 不详作者的名字.《孙子算经》卷上首先叙述竹筹记数的纵横相间制:"凡算之法, 先识其位。一纵十横, 百立千僵, 千十相望,万百相当"; 然后讲筹算的乘除法则.卷中举例说明筹算分数算法和筹算开平方法.这些都是考证筹算法的好资料. 卷中和卷下所选的应用问题大都切于民生日用的, 解题方法是浅近易晓的.

* 钱宝琮《校点算经十书》下册《孙子算经提要》.

《孙子算经》卷下又选取了几个算术难题。例如第17题："今有妇人河上荡杯"，第26题"今有物不知其数"，第31题，"今有雉兔同笼"等等。这些问题经过后来数学书的转辗援引，得到广泛的流传。

卷下第26题："今有物不知其数。三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？答曰：二十三。"这就是说，设

$$N\equiv 2(mod3)\equiv 3(mod5)\equiv 2(mod7)$$

求最小的整数N，答数是23。这是一个一次同余式组的有名问题。

5.《张邱建算经》

《张邱建算经》三卷，张邱建撰，是5世纪后半叶的作品。《张邱建算经》继承了《九章算术》的数学遗产，并且提供了很多推陈出新的创见，主要有下列几点：

一、卷上第10题、第11题是最大公约数、最小公倍数的应用问题 第10题："今有封山周栈三百二十五里。甲、乙、丙三人同绕周栈行。甲日行一百五十里，乙日行一百二十里，丙日行九十里。问周行几何日相会？答曰：十日、六分日之五。术曰：置甲、乙、丙行里数，求等数为法，以周栈里数为实，实如法而一。"等数就是150、120、90的最大公约数30。$325\div 30=10\frac{5}{6}$。

二、等差级数问题 卷上第22题："今有女善织，日益功疾。初日织五尺，今一月，日织九匹三丈。问日益几何？答曰：五寸、二十九分寸之十五。术曰：置今织尺数，一月日而一，所得，倍之，又倍初日尺数，减之，余为实。以一月日数初一日减之，余为法，实如法得一。"这里，1月＝30日，$n=30$，初日织5尺$=a_1$，今一月，日织9匹3丈＝390尺$=a_n$（1匹＝4丈，1丈＝10尺）。术文是说