中考数学思维新概念丛书

中考

几何证明题

分析与训练

JHZMT

浙江少年儿童出版社

中考数学思维新概念丛书

中考几何证明题分析与训练

主编　叶天碧
编写　张晋红　何　坚
　　　傅兰英　王红权

浙江少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考几何证明题分析与训练/叶天碧主编. 一杭州：浙江少年儿童出版社，2003.9
(中考数学思维新概念丛书)
ISBN 7-5342-2875-1

Ⅰ.中… Ⅱ.叶… Ⅲ.数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第051446号

责任编辑 刘力行
美术编辑 孙达明
责任印制 阙 云
装帧设计 周翔飞 刘 炜

中考数学思维新概念丛书

中考几何证明题分析与训练

叶天碧 主编

浙江少年儿童出版社出版发行
(杭州体育场路347号)
临安曙光印务有限公司印刷　全国各地新华书店经销
开本850×1168 1/32 印张8.125 字数150000 印数1-10350
2003年9月第1版 2003年9月第1次印刷

ISBN 7-5342-2875-1/G·1553　定价：10.50元

前　　言

在初中阶段的数学学习中，平面几何成了学习的分化点，尤其是平面几何的证明使人头痛. 当图形背景稍微复杂时，不少同学找不到证明的思路，理不出证明的头绪，久而久之，形成一种怕几何证明的心理状态. 众多的学习资料往往只提供平面几何的证明过程，而这个过程是怎么想出来的，看了还是不得而知，更不用说它还有哪些变化了.

本书在介绍平面几何证明时，不急于展示几何问题的证明过程，重在讲清这些几何问题的证明是怎么想到的，辅助线是怎么添出来的，为什么要添这条辅助线，还有没有别的证明思路. 这样写的目的，是想使读者找到一种几何证明的途径，寻找证题的分析思路. 而且，在讲清思路之后，还把几何问题引申和拓宽，并提出新的问题，不断引导读者进行反思，多问几个为什么，发散自己的思维. 这样取得的成效要比解一个个问题有更多的收获.

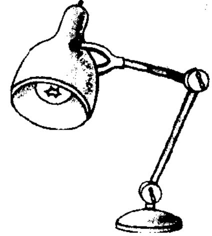
几何证明离不开图形. 当讨论一个几何问题时，就要把这个问题讨论透，有几种不同的思路，几种不同的方法，这些思路和方法是根据几何图形的哪些特征想出来的，都应在学习中弄清楚. 只要我们肯动脑筋，仔细观察图形的特征，不断思考，捉摸思路的门道，平面几何的证

明方法肯定能被大家掌握.

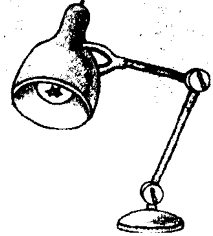
写这本书的作者都很有经验,把在学习平面几何的基础知识、基本技能、基本方法归纳成“基础结构”、“添线规律”写在一章的前面,使读者有个综合了解,尤其是“常用块状图”,把常见的、常用的几何图形进行整理和归纳,点明从几何图形中反映出的信息,从数形结合的思想出发分析问题.在“思维流程图”中,把几何证明的思维过程有序地表达出来.在阅读本书时,最好是对上述几个方面有个大概的了解,再去研究例题,然后想一想.对每个例题应先理解题意,熟悉图中的线段和角的位置关系,了解分析思路,看懂证明过程,然后把书合拢,把例题的分析思路和证明过程再回顾一下.这样做,必将得到意想不到的效果.

尽管我们对本书的编写工作高度重视,作风严谨,态度认真,但疏漏之处在所难免,恳请读者提出宝贵意见.

参加编写本书的作者有:张晋红(第一章)、何坚(第二章)、傅兰英(第三章)、王红权(第四章).全书由叶天碧统稿和审定.



目　　录



第一章　等量关系

在初中几何中普遍存在着的等量关系，一般指的是线段(角或面积)相等.证明两条线段(角或面积)相等的问题，还应包含线段(角或面积)间的和、差、倍、分，线段成比例(或线段成等积式)，因此，线段(角或面积)等量关系的形式是多种多样的.

【知识结构】　本章所用的知识除了三角形全等的性质及判定外，还有等腰三角形、线段中垂线、角平分线的性质及判定，轴对称、中心对称的概念、性质及应用，三角形(梯形)中位线的概念、性质及应用，平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形的性质及判定，平行线分线段成比例定理，相似三角形的判定、性质及应用，直角三角形相似的判定，垂径定理、圆幂定理的应用等.值得注意的是，线段、角、面积的等量关系的证明是可以相互转化的.

【添线规律】　当解题思路在已知图形中发生“断路”时，便要添辅助线，将思路“接通”.常用的方法是通过添平行线将图形中分散的边或角，集中到一个三角形或一个平行四边形中.对于对称图形，宜从对称的观点，在一侧补上它相对于另一侧所缺的部分.还有一些几何证题，常需要用到某种块状的基本图形，而这种图形在题设所给定的图形中却没有出现，必须添置这些图形，才能导出

结论.下面是本章常用的块状基本图形,解题时若能在已知图形中迅速识别出这种“块状图”,或者把这些图形“镶嵌”到已知图形中,常常能收到事半功倍的效果.

【常用块状图】

互余信息图（线段、角相等或线段成比例）

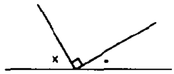


图 1-1

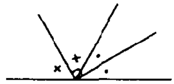


图 1-2

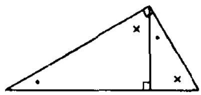


图 1-3

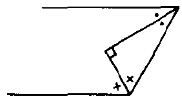


图 1-4

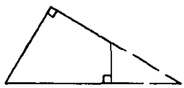


图 1-5

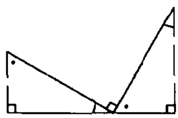


图 1-6

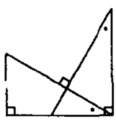


图 1-7

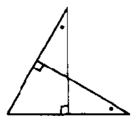


图 1-8

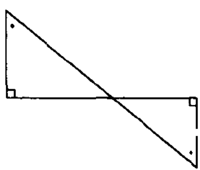


图 1-9

角平分线信息图（线段、角相等）

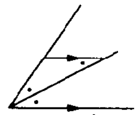


图 1－10

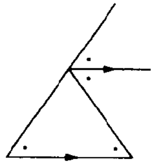


图 1－11

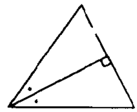


图 1－12

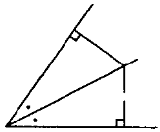


图 1－13

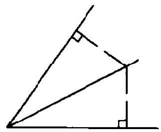


图 1－14

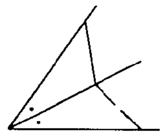


图 1－15

中点信息图（线段、角相等或线段成比例）

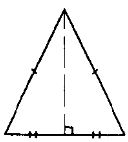


图 1－16

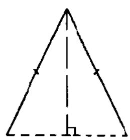


图 1－17

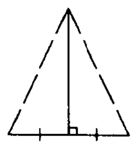


图 1－18

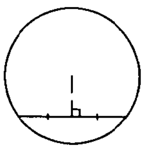


图 1－19

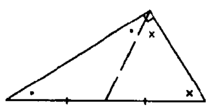


图 1－20

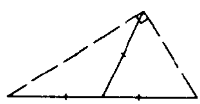


图 1－21

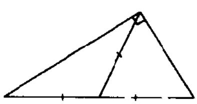


图 1－22

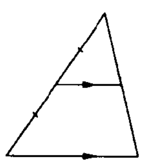


图 1－23

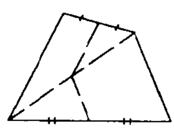


图 1－24

中点信息图(线段、角相等或线段成比例)

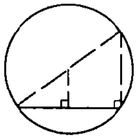


图 1－25

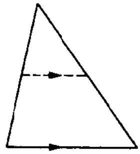


图 1－26

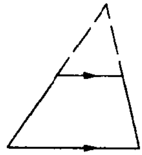


图 1－27

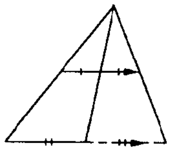


图 1－28

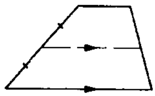


图 1－29

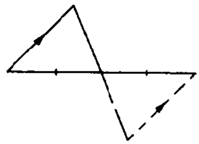


图 1－30

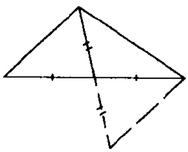


图 1－31

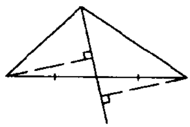


图 1－32

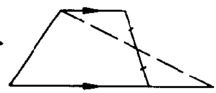


图 1－33

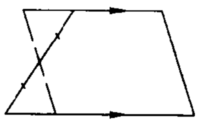


图 1－34

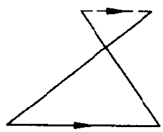


图 1－35

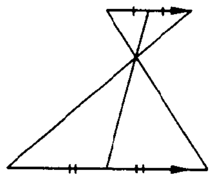


图 1－36

等面积图

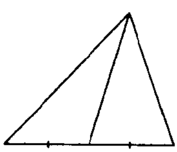


图 1－37

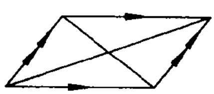


图 1－38

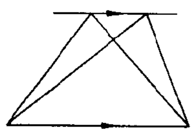
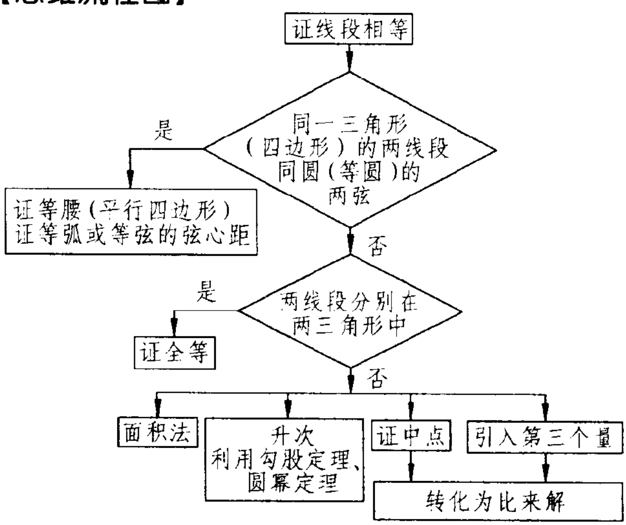


图 1－39

第 1 节　与线段有关的等量关系

在与线段有关的等量关系证明中，线段的和、差、倍、分问题，只要通过“放”与“缩”将它们变为一条线段，就可化归为相等关系的证明. 与倍、分相关的证明还可通过中点、中线、中位线“加倍”或“折半”，使变为一条线段，也可转化为相等关系的证明，或者化归为比例，与证明线段成比例（成等积式）类似，可利用平行线分线段成比例定理、相似三角形性质和圆幂定理的有关内容来解决. 有时，把与线段有关的等量关系转化为与面积有关的等量关系来证明也不失为一条捷径. 但其中线段相等的证明是最基本也是最为重要的. 它的思考途径由下图展开.

【思维流程图】



【专题例析】

例 1 如图 1－40，AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线，BE 交 AC 于点 E，交 AD 于点 F，且 $AE=EF$. 求证：$AC=BF$.

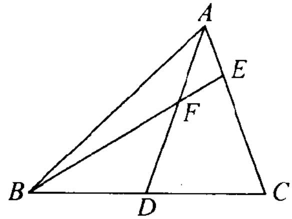


图 1－40

分析 由思维流程图，要证 $AC=BF$，先看它们是否在同一三角形中.（不在）再找以 AC、BF 为边的两个三角形，设法证明它们全等. 图中现有的 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BDF$ 显然不全等，尝试添辅助线（连结 FC），我们发现以 BF 为边的三角形（$\triangle BFD$ 与 $\triangle ABF$）与 AC 边所在的三角形，都不具备三角形全等的条件，此路不通.

能否把要证明的两条线段放在同一个三角形中？这就需要把一条线段平行移动. 怎样移？这是证明的关键.

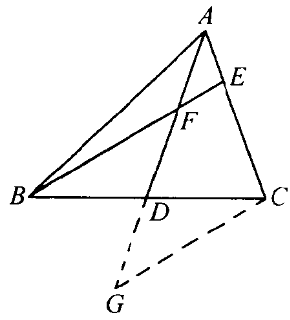


图 1－41

第一种思考途径是让 AC 不动，而将 BF 平移，使得平移后的 BF 与 AC 是同一个三角形的两条边. 自然新三角形是以 A、C 为顶点的，因而可将 BF 向下平移，让点 F 与点 C 重合. 即过点 C 作 CG 平行且等于 BF，连结 DG，如图 1－41，则 $\triangle BDF\cong\triangle CGD$. 问题归结为证明 $AC=CG$. 但这时就要牵扯到 A、D、G 是否三点共线的问题. 事实上要保证 CG 平行且等于 BF，联想

到一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，只要四边形 $BFCG$ 是平行四边形即可. 因已有已知条件 $BD=CD$，考虑到对角线互相平分的四边形是平行四边形，所以可将辅助线作如下修改：延长 FD 至点 G，使得 $FD=DG$，连结 GC. 或者过点 C 作 CG 平行 BF 与 AD 的延长线交于点 G. 这样就避开了证明三点共线.

我们还可尝试把 BF 向上平移，让点 F 与点 A 重合. 即过点 A 作 AM 平行且等于 FB，连结 MB，得到平行四边形 $AMBF$，连结 MC 与 AD 交于点 T，如图1－42. 问题归结为证明三角形 AMC 为等腰三角形.

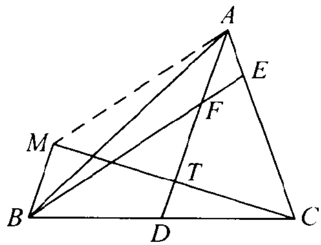


图 1－42

先想到的是证明$\angle AMC=\angle ACM$，但很难实现，故而考虑证明“两线合一”得等腰. 由点 D 是 BC 的中点，且 $BM\parallel AD$，得到点 T 是 MC 的中点；又由 $AE=EF$ 及 $BF\parallel AM$，得到 AT 是$\angle MAC$ 的角平分线. 实现了“两线合一”. 这样我们就得到了两种证明方法.

第二种思考途径是让 BF 不动，而将 AC 平移，使得平移后的 BF 与 AC 是同一个三角形的两条边. 自然新三角形是以 B、F 为顶点的，类似地可将 AC 平移到 BH（AD 的延长线与过点 B 的平行线交于点 H），如图1－43，问题归结为证明三角形 FBH 为等腰三角形. 或者将 AC 平移到 FN（FN 平行且等于 AC），连结 NC、BN，如图 1－44，只要证明$\triangle BFN$ 为等腰三角形. 证明

的方法与第一种思考途径的两种方法类似，从而又得到了两种证明方法. 于是，此题就有了四种解法.

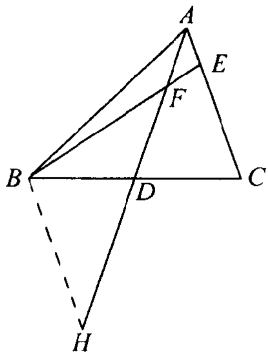


图 1－43

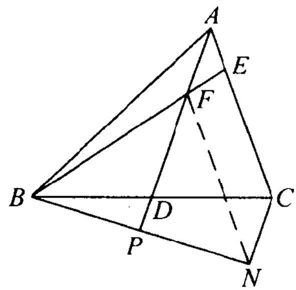


图 1－44

由于证明的需要，所添的辅助线一般要在证明之前写清楚. 下面就图 1－41 写出证明过程.

证明 延长 FD，并截取线段 $DG=FD$，连结 CG.

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDG$ 中，

$\because$ AD 是 BC 边上的中线， $\therefore$ $BD=CD$.

又 $\because$ $\angle FDB$ 与 $\angle GDC$ 是对顶角，

$\therefore$ $\angle FDB=\angle GDC$. $\therefore$ $\triangle FDB\cong\triangle GDC$.

$\therefore$ $GC=BF$，$\angle CGD=\angle BFD$.

又 $\because$ $AE=EF$， $\therefore$ $\angle EAF=\angle AFE$.

而 $\angle BFD$ 与 $\angle AFE$ 是对顶角，

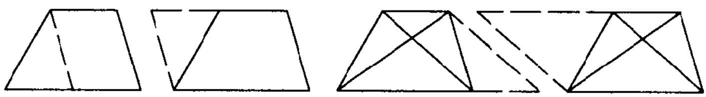
$\therefore$ $\angle BFD=\angle AFE$. $\therefore$ $\angle CGD=\angle EAF$.

在 $\triangle CAG$ 中， $\because$ $\angle CGA=\angle CAG$，

$\therefore$ $GC=AC$. $\therefore$ $AC=BF$.

小结 从求证的结论看，要证明两条线段相等，由于

要证的线段不在同一三角形中，就要通过证明两线段所在的两个三角形全等．当证全等不可能时，就要通过平行移动，把分散的线段平移到同一个三角形中．借助平行四边形进行平移，是一条有效的途径．我们在学习梯形的内容时，常常通过这种方法，添置辅助线，把两腰、两对角线平移到同一三角形中，从而求得问题的解决，如下图所示．



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

从条件来看，已知 AD 是 BC 边上的中线，得出点 D 是 BC 的中点，由中点的信息，设法“嵌”入块状图 1－30，选择以 BD 和待证线段 BF 所在的$\triangle BDF$，作出$\triangle CDG$，将 AC、BF 聚拢，或者选择以 CD 和待证线段 AC 所在的$\triangle ACD$，作出$\triangle BDH$，将 AC、BF 聚拢．这就是“典型图形的特殊规律”的作用，它使一个思维较复杂的几何题轻松地解决了．因此多总结和应用一些“块状图”，对减少或避免思考问题的盲目性，加快思考速度都是大有益处的．

引申 1　如果把 BC 边上的中线改成$\angle BAC$ 的平分线或是 BC 边上的高线，其他条件不变，会有什么结论？

问题 1　如图 1－45，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，BE 交 AC 于点 E，交 AD 于点 F，且 $AE=EF$，则 BF 与 AC 有怎样的关系？（根据题意先画图，会发现线段 BE 是不存在的，或者说根据条件，得出 BF

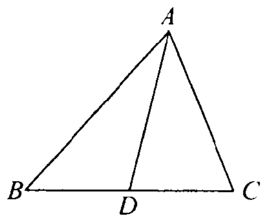


图 1－45

$//BA$,但是两条平行线出自同一点,势必重合. 这就是说,符合题意的 BE 是画不出的. 因此,本题要问 AB 与 AC 有怎样的关系. 请读者作猜测后,再证明. 答案:$AB:AC=BD:DC$)

问题 2 如图 1-46,AD 是$\triangle ABC$ 的高线,BE 交 AC 于点 E、交 AD 于点 F,且 $AE=EF$,则 BF 与 AC 有怎样的关系?(根据题意先画图,并在图上作好标记,会发现$\angle FBD=\angle ECD$,从而得出结论:$BE=CE$;进一步分析还可以得出一个重要结论:$BF:AC=BD:AD$. 这与问题 1 的结论相似)

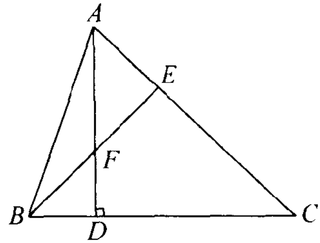


图 1-46

引申 2 如果把条件 $AF=EF$ 去掉,其他条件不变,又会有什么结论?

问题 3 AD 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线,BE 交 AC 于点 E、交 AD 于点 F,图中有哪些线段成比例?(由例 1 的证明联想得到$\dfrac{AF}{2FD}=\dfrac{AE}{EC}$,读者不妨试证之)

例 2 已知点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 上的中点,$MN\perp DM$ 且与$\angle ABC$ 外角的平分线交于点 N. 求证:$MD=MN$.

分析 由结论思考,从图中看出要证的两条线段 DM 和 MN 不在现有的同一个三角形中,想到连结 DN,

则 DM 和 MN 就成为$\triangle DMN$的两条边，只要证明$\triangle DMN$是等腰三角形.但经过尝试发现，无法实现该想法.试着去寻找 DM 和 MN 所在的两个三角形，想办法证明它们全等.遗憾的是以 DM 为边的$\triangle AMD$ 与以 MN 为边的$\triangle NMB$ 不全等.只有添辅助线构造新三角形，再证全等.但怎样构造？这是本题证明的关键.

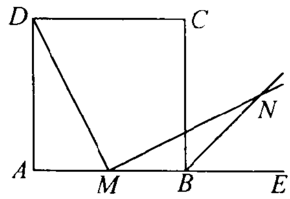


图 1－47

我们先看以 MN 为边的$\triangle NMB$，找找角的条件，联想到已知条件 $MN \perp DM$，由"块状图"1－1，可得到$\angle NMB = \angle MDA$，又由 BN 是$\angle ABC$ 外角的平分线，得$\angle MBN = 135°$.至此，我们找到了$\angle NMB$ 的对应角$\angle MDA$（注意：应边分析边在图上做好标记，把已知或已得到的相等元素，都用同样的记号或颜色标记），但与$\triangle BMN$ 的边相等的条件只有 $MB = AM$，又绕回到$\triangle AMD$ 和$\triangle NMB$.怎么办？可以假设"未知"$MD = MN$ 成立（做好标记，最好在 MD 和 MN 上打上小问号），这时在$\triangle BMN$ 中会发现"边、角、边"的信息，而在$\triangle ADM$ 中出现"边、角"的信息，独缺一条与 MB 相等的边.我们只要在 DA 上截取 $DP = MB$ 即可（如图 1－48 所示）.这样就构造出了新三角形 DMP.它是否真的与$\triangle MNB$ 全等呢？事实上，因$\angle NMB = \angle MDA$ 和 $DP = MB$，又$\angle MBN = 135°$，只

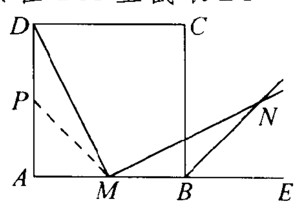


图 1－48