万成高　著

鞅的极限理论

YANG DE JIXIAN LILUN

科学出版社

鞅的极限理论

万成高 著

科学出版社
2002

内 容 简 介

本书介绍了鞅的基本理论和应用，特别是离散时间的各种鞅型序列的极限理论. 内容力求现代，论述力求严谨，条理力求清楚，突出典型证法，便于读者自学.

本书内容包括：经典鞅论的基本知识，实值鞅型序列及其极限理论，取值于 Banach 空间的鞅(**B** 值鞅)，**B** 值鞅型序列及多指标 **B** 值鞅型序列的极限理论.

本书可供高等院校高年级学生、研究生、教师及一般科技工作者学习参考.

鞅的极限理论

万成高 著

责任编辑 徐一帆

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2002 年 6 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2002 年 6 月第一次印刷 印张：10 1/4

印数：1～1000 字数：260 000

ISBN 7-03-010404-8/O・1621

定价：28.00 元

序　言

鞅的概念首先由法国数学家 P.Lévy 于 1939 年在随机变量和的研究中引入概率论. 随后 J.L.Doob 又提出了上鞅与下鞅的概念, 并对它们进行了系统的研究, 用以解决许多概率论与古典分析的问题. D.L.Burkholder 和 P.Meyer 等在此基础上又进一步深入做了一系列的工作, 从而形成了现代鞅论. 现在, 鞅论不仅作为概率论的一个重要分支迅猛发展起来, 而且渗透到其他数学分支如调和分析, Banach 空间的几何学以及随机分析等中去, 互相结合, 产生一些新兴的研究分支. 目前, 鞅论方法已深入到许多领域中去, 形成一个强有力的研究工具.

本书共分 8 章, 阐述了实值和 B 值鞅型序列的基本理论, 内容涉及鞅型序列 (包括鞅差阵列及多指标鞅差型阵列) 的收敛定理, 停时理论, 分解理论 (Doob−Meyer 分解, Riesz 分解等), 鞅不等式, 鞅变换, 鞅与 Banach 空间的几何学等, 重点叙述了它们的极限理论 (大数定律, 中心极限定理及收敛速度等). 本书突出典型方法, 追求严密推理, 方便自学.

本书相当一部分内容是作者近年所获得的成果, 为了内容的完整性, 自然地, 本书也包含了许多其他作者的内容. 由于作者水平有限, 本书的缺点错误在所难免, 敬请不吝指教, 以期改进.

作　者

2002 年 3 月于武汉

目　录

第一章 准 备 知 识

本章所叙述的主要内容都与测度和积分有着密切的联系. 作为以后各章的准备知识, 本章将较为系统地介绍有关的知识.

§1.1 向 量 测 度

设 Ω 是一个点集, $\mathcal{F}$ 是由 Ω 的某些子集构成的集类. $\mathcal{F}$ 称为 Ω 上的代数, 若

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) 当 $A \in \mathcal{F}$ 时, $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(3) 当 $A,\ B \in \mathcal{F}$ 时, $A \cup B \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ 称为 Ω 上的 σ 代数, 若用

(3)$'$ 当 $A_n \in \mathcal{F}\ \ (n \geqslant 1)$ 时, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

代替 (3) 成立.

容易验证, 同一点集上的任意多个代数 (σ 代数) 之交仍为代数 (σ 代数). 当 $\{\mathcal{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是一列单调增加的代数 (σ 代数) 时, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ 是一个代数.

设 $\mathcal{F}$ 是由 Ω 的某些子集构成的集类, Ω 上包含 $\mathcal{F}$ 的一切 σ 代数之交构成的 σ 代数称为由 $\mathcal{F}$ 生成的 σ 代数, 记为 $\sigma(\mathcal{F})$. 若 $\{\mathcal{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 σ 代数列, 通常以 $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ 表示由 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ 生成的 σ 代数.

显然, 若 $\mathcal{G}$ 为 Ω 上的 σ 代数, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ 是某个集类, 则 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}$. 若 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ 均为集类, 则 $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$. 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的任

一集类，Ω_0 是 Ω 的子集，则 $\sigma(\mathcal{F}\cap\Omega_0)=\sigma(\mathcal{F})\cap\Omega_0$, 其中 $\mathcal{F}\cap\Omega_0$ 表示 $\mathcal{F}$ 中每一元与 Ω_0 的交.

设 $\mathbf{B}$ 为实的 Banach 空间，其范数用 $\|\cdot\|$ 表示，$\mathbf{B}^*$ 表示 $\mathbf{B}$ 的共轭空间，设 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbf{B}$ 中全体开集产生的 σ 代数，称为 Borel σ 代数，$\mathcal{B}$ 中的集合称为 Borel 集.

设 Ω 是任一非空集合，$\mathcal{F}$ 是 Ω 上的代数，对每一 $A\in\mathcal{F}$, 记

$$\mathcal{F}(A)=\big\{B:B\in\mathcal{F},\ B\subset A\big\},$$

则 $\mathcal{F}(A)$ 是 A 上的代数. 称 $\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是 A 在 $\mathcal{F}$ 中的一个分划, 如果 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}\subset\mathcal{F}(A)$, $A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i=A$. 令 $\mathcal{P}(A)$ 是 A 在 $\mathcal{F}$ 中所有分划组成的集类.

定义 1.1 集函数 $\mu:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 称为是有限可加向量测度 (简称向量测度), 如果对任意不相交集合 A, $B\in\mathcal{F}$, 有 $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$. μ 称为是有界的，如果 $\sup\limits_{A\in\mathcal{F}}\|\mu(A)\|<\infty$. 向量测度 μ 称为完全可加的，如果

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

其中 $\{A_n\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中两两不相交的集合序列且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$, 等号右端的级数表示 $\Big\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\Big\}$ 按 $\mathbf{B}$ 中范数收敛的极限.

如不特别表明，本节所言测度均只满足有限可加性.

容易验证，向量测度具有下列性质:

(1) $\mu(\emptyset)=0$;

(2) 若 $A\subset B$, A, $B\in\mathcal{F}$, 则

$$\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A);$$

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots, k$. A_n 互不相交，则

$$\mu\Big(\sum_{n=1}^{k} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

定义 1.2　设 $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{B}$ 是向量测度，对任意 $E \in \mathcal{F}$, 令

$$V_\mu(E) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}(E)} \sum_{A \in \pi} \big\|\mu(A)\big\|,$$

其中 sup 遍历从 E 到 $\mathcal{F}$ 的所有分划，则 V_μ 是定义在 $\mathcal{F}$ 上取非负广义实值的集函数，称 V_μ 为 μ 的变差. 如果 $V_\mu(\Omega) < \infty$, 则称 μ 是有界变差的. 对任意 $E \in \mathcal{F}$, 令

$$V_\mu^*(E) = \sup\big\{V_{f\circ\mu}(E) : f \in \mathbf{B}^*,\ \|f\| \leqslant 1\big\},$$

其中 $f \circ \mu$ 为如下定义的实值测度： $(f \circ \mu)(E) = f(\mu(E))$, $E \in \mathcal{F}$, 则 V_μ^* 是定义在 $\mathcal{F}$ 上取非负广义实值的集函数，称 V_μ^* 为 μ 的半变差. 如果 $V_\mu^*(\Omega) < \infty$, 则称 μ 是有界半变差的.

直接验证可知： V_μ 是 $\mathcal{F}$ 上的非负可加的单调上升的广义实值集函数，而 V_μ^* 是 $\mathcal{F}$ 上的非负次可加的单调上升的广义实值集函数，且对任意 $E \in \mathcal{F}$, $V_\mu^*(E) \leqslant V_\mu(E)$. 由文献 [2] 知： μ 有界的充要条件是 μ 为有界半变差的. 若 $\mathbf{B}$ 是有限维的，则半变差和变差是等价的.

定义 1.3　设 $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{B}$ 是向量测度， ν 是 $\mathcal{F}$ 上的实值测度，如果对任何 $A \in \mathcal{F}$, $\nu(A) = 0$, 有 $\mu(A) = 0$, 则称 μ 关于 ν 绝对连续，记作 $\mu \ll \nu$.

定理 1.1　有界变差的向量测度为完全可加的充要条件是它的变差为完全可加的.

证明　充分性　设 μ 是有界变差的向量测度，其变差 V_μ 是完全可加的，设 $E_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$, $\{E_n\}$ 两两不相交且 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$,

往证 $\mu(E)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$. 由于 $\mathcal{F}$ 为代数, $\left(E-\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n\right)\in\mathcal{F}$, 且对任意的 $m\geqslant 1$, $\left(E-\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n\right)\downarrow\emptyset$, 于是

$$\begin{aligned}\left\|\mu(E)-\sum_{n=1}^{m}\mu(E_n)\right\| &= \left\|\mu(E)-\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{m}E_n\Big)\right\| \\ &= \left\|\mu\Big(E-\bigcup_{n=1}^{m}E_n\Big)\right\|\leqslant V_\mu\Big(E-\bigcup_{n=1}^{m}E_n\Big)\longrightarrow 0\ \ (m\to\infty).\end{aligned}$$

即

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n).$$

必要性 设 μ 是有界变差的完全可加的向量测度, 令 $\{E_n\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中两两不交的集合序列且 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathcal{F}$, $\pi=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$ 是 E 在 $\mathcal{F}$ 中的任一分划, 则

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\pi}\|\mu(B)\| &= \sum_{B\in\pi}\left\|\mu\Big(B\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\Big)\right\| \\ &= \sum_{B\in\pi}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B\cap E_n)\right\|\leqslant\sum_{B\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\|\mu(B\cap E_n)\| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{B\in\pi}\|\mu(B\cap E_n)\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}V_\mu(E_n),\end{aligned}$$

从而

$$V_\mu(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}V_\mu(E_n).$$

另一方面, 由于 V_μ 是有限可加的且单调上升, 故对每一个 $n\geqslant 1$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}V_\mu(E_k)=V_\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\Big)\leqslant V_\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Big),$$

因而

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_\mu(E_k) \leqslant V_\mu(E),$$

这就证明了 V_μ 是完全可加的. 定理证毕.

设 $\mathcal{F}$ 为点集 Ω 上的代数, $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间, 以 $ba(\mathcal{F},\mathbf{B})$ 表示定义在 $\mathcal{F}$ 上取值于 $\mathbf{B}$ 的有界向量测度全体. 可以证明有界半变差是 $ba(\mathcal{F},\mathbf{B})$ 上的范数, 它使得 $ba(\mathcal{F},\mathbf{B})$ 成为 Banach 空间.

定理 1.2 设 $\mu:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 是向量测度, ν 是 $\mathcal{F}$ 上的实值测度, 则

$$\mu \ll \nu \Longleftrightarrow V_\mu \ll \nu.$$

证明 设 $\mu \ll \nu$. 若 $A\in\mathcal{F}$, $\nu(A)=0$, 则对任何 $B\in\mathcal{F}$, $B\subset A$, 有 $\nu(B)=0$, 故 $\mu(B)=0$, 从而有

$$V_\mu(A)=\sup_{\pi\in\mathcal{F}(A)}\sum_{B\in\pi}\|\mu(B)\|=0,$$

即 $V_\mu \ll \nu$.

设 $V_\mu \ll \nu$, 若 $A\in\mathcal{F}$, $\nu(A)=0$, 则 $\|\mu(A)\|\leqslant V_\mu(A)=0$, 从而有 $\mu(A)=0$, 即 $\mu\ll\nu$.

定理 1.3 若 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的 σ 代数, $\mu:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 是完全可加的向量测度, ν 是 $\mathcal{F}$ 上的完全可加的实值测度, 则 $\mu\ll\nu$ 的充要条件是: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $E\in\mathcal{F}$, $\nu(E)<\delta$ 时, $\|\mu(E)\|<\varepsilon$.

证明 充分性是显然的, 下证必要性. 首先, 对 $f\in\mathbf{B}^*$, $f\circ\mu$ 是实值测度. 当 $\nu(E)=0$ 时, $\mu(E)=0$, 所以 $(f\circ\mu)(E)=f(\mu(E))=0$, 即 $f\circ\mu$ 关于 ν 绝对连续.

现假设结论不真, 则必存在 $\varepsilon>0$ 和 $\mathcal{F}$ 中的一列集合 $\{E_n\}$, 使得

$$\|\mu(E_n)\|>2\varepsilon,\quad \nu(E_n)<\frac{1}{n^2}\quad (n\geqslant 1), \tag{1.1}$$

显然

$$\lim_{k\to\infty}\nu\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n\Big)=0. \tag{1.2}$$

由 (1.1) 式及 Hahn–Banach 定理可取 $f_1\in\mathbf{B}^*$, $\|f_1\|=1$, 使得

$$|f_1\circ\mu(E_1)|>2\varepsilon,$$

因为 $f_1\circ\mu$ 关于 ν 绝对连续，由 (1.2) 式，又可取 n_1, 使得

$$\Big|f\circ\mu\Big(\bigcup_{n=n_1}^{\infty}E_n\Big)\Big|<\varepsilon.$$

令

$$\overline{E}_1=E_1-\bigcup_{n=n_1}^{\infty}E_n,$$

则有 $\|\mu(\overline{E}_1)\|\geqslant|f_1\circ\mu(\overline{E}_1)|>\varepsilon$, 且当 $n\geqslant n_1$ 时， $\overline{E}_1$ 与 E_n 不相交, 用 E_{n_1} 代替 E_1 进行上述讨论, 得 $n_2>n_1$, $\overline{E}_2=E_{n_1}-\bigcup\limits_{n=n_2}^{\infty}E_n$, 但 $\|\mu(\overline{E}_2)\|>\varepsilon$. 如此下去，得到 $\mathcal{F}$ 中一列互不相交的集合 $\{\overline{E}_n\}$, 满足 $\|\mu(\overline{E}_n)\|>\varepsilon$. 此与 μ 的完全可加性矛盾，这就证明了必要性.

若 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的 σ 代数，μ 是 $\mathcal{F}$ 上的非负可数可加实值测度，如通常那样，称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为测度空间. 若 $\mu(\Omega)<\infty$, 则称它为有限测度空间. 若 $\mu(\Omega)=1$, 则称它为概率空间，此时记 μ 为 P.

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间，对 A, $B\in\mathcal{F}$, 规定

$$\rho(A,B)=P(A\triangle B).$$

若 $\rho(A,B)=0$, 则把 A,B 视为同一元 (或者 A 等价于 B, 即 $A\sim B$). 记这种元素的全体为 $\mathcal{F}[P]$, 容易验证 $\mathcal{F}[P]$ 为 σ 代数， ρ 为 $\mathcal{F}[P]$ 上的可列可加测度.

引理 1.4 $\mathcal{F}[P]$ 是完备度量空间.

证明　实际上，对于任何 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\rho(A,B) = \int_\Omega |I_A - I_B| dP.$$

若 $A_n \in \mathcal{F}[P]$, A_n 为 $\rho-$Cauchy 序列，即 $\rho(A_n, A_m) \longrightarrow 0 \ \ (m,n \to 0)$, 则 $\{I_{A_n}, n \geqslant 1\}$ 是 L^1 中的 Cauchy 序列，必存在可积的变量 ξ, 使得

$$E\|I_{A_n} - \xi\| \longrightarrow 0 \ \ (n \to \infty),$$

那么 $\{I_{A_n}, n \geqslant 1\}$ 有子序列 $a.e.$ 收敛于 ξ, 所以 $\xi(\omega) = 0$ 或 $1 \ \ a.e.$, 从而 ξ 是某个集合 A 的特征函数，因此

$$\rho(A_n, A) = \int_\Omega |I_{A_n} - I_A| dP \longrightarrow 0 \ \ (n \to \infty),$$

即 $\mathcal{F}[P]$ 关于 ρ 是完备的.

如果 $\mu : \mathcal{F} \to \mathbf{B}$ 是完全可加的向量测度，且 $\mu \ll P$, 注意到

$$P(A \Delta B) = P(A - (A \cap B)) + P(B - (A \cap B)),$$

$$\mu(A) - \mu(B) = \mu(A - (A \cap B)) - \mu(B - (A \cap B)),$$

所以 $P(A\Delta B) = 0$ 时， $\mu(A) = \mu(B)$, 即 μ 可以看作 $\mathcal{F}[P]$ 上的函数.

又当 E, $E_n \in \mathcal{F}[P]$ $(n \geqslant 1)$, $\rho(E_n, E) \longrightarrow 0$ 时，有 $\mu(E_n) \longrightarrow \mu(E)$. 此即 μ 是由 $\mathcal{F}[P]$ 到 $\mathbf{B}$ 的依 ρ 连续的映射.

定理 1.5 (Vitali−Hahn−Sake)　设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$\mu_n : \mathcal{F} \to \mathbf{B} \ \ (n \geqslant 1)$ 为一列完全可加的向量测度，对任意的 $n \geqslant 1$, $\mu_n \ll P$, 且对 $E \in \mathcal{F}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E)$ 均存在，则

$$\lim_{P(E)\to 0} \sup_{n \geqslant 1} \|\mu_n(E)\| = 0.$$

证明 设 $\varepsilon > 0$, 记

$$\mathcal{F}_{n,m} = \{E : E \in \mathcal{F}[P],\ \|\mu_n(E) - \mu_m(E)\| \leqslant \varepsilon\},$$

$$\mathcal{F}_q = \bigcap_{n,m \geqslant q} \mathcal{F}_{n,m} \quad (q \geqslant 1),$$

因为 μ_n 在 $\mathcal{F}[P]$ 上连续，易见 $\mathcal{F}_{n,m}$, $\mathcal{F}_q$ 均为闭集. 又因为对任何 $E \in \mathcal{F}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E)$ 存在，所以， $\mathcal{F}[P] = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} \mathcal{F}_q$, 但 $\mathcal{F}[P]$ 是完备的，由 Baire 定理知： $\mathcal{F}[P]$ 是第二纲的，所以存在自然数 n_0, $A \in \mathcal{F}$ 及 $r > 0$, 使得

$$\{E : P(E \triangle A) < r\} \subset \bigcap_{n,m \geqslant n_0} \Big\{E : \big\|\mu_n(E) - \mu_m(E)\big\| \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

再由 $\mu_n \ll P$ $(n \geqslant 1)$, 故可取 $\delta, 0 < \delta < r$, 使得 $P(E) < \delta$ 时，有

$$\|\mu_n(E)\| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \cdots, n_0.$$

注意到

$$P((A \cup E) \triangle A) \leqslant P(E) < \delta,$$

$$P((A - E) \triangle A) \leqslant P(E) < \delta,$$

由

$$\mu_n(E) = \mu_{n_0}(E) + \{\mu_n(A \cup E) - \mu_{n_0}(A \cup E)\}$$
$$-\{\mu_n(A - E) - \mu_{n_0}(A - E)\}$$

即得

$$\|\mu_n(E)\| < 3\varepsilon, \quad n = n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots.$$

推论 1.6 在定理 1.5 的条件下，若对任意的 $E \in \mathcal{F}$, $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E)$, 则 μ 是 $\mathcal{F}$ 上的完全可加向量测度.

证明 显然 μ 是有限可加的，为证明它是完全可加的，只须证明：如果 $E_n \in \mathcal{F}$, $E_n \downarrow \emptyset$, 则 $\mu(E_n) \longrightarrow 0$.

事实上，因 $P(E_n) \longrightarrow 0\ (n\to\infty)$，由定理 1.5 知：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $m(\varepsilon)>0$，当 $m\geqslant m(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_{n\geqslant 1}\|\mu_n(E_m)\|<\varepsilon,$$

从而当 $m\geqslant m(\varepsilon)$ 时，$\|\mu(E_m)\|\leqslant\varepsilon$.

设 $\mathcal{F}_0$ 是点集 Ω 上的代数，$\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{F}_0)$，向量测度 $\bar{\mu}:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 称为 $\mu:\mathcal{F}_0\to\mathbf{B}$ 的扩张，若对任意的 $A\in\mathcal{F}_0$，有 $\mu(A)=\bar{\mu}(A)$.

定理 1.7 (Carathéodory–Hahn–Kluvanek 扩张定理)　设 $\mathcal{F}_0$ 是 Ω 上的代数，$\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{F}_0)$，$\mu:\mathcal{F}_0\to\mathbf{B}$ 是 $\mathcal{F}_0$ 上的有界的，完全可加的向量测度，则下列陈述等价：

(1) μ 可唯一地由 $\mathcal{F}_0$ 扩张到 $\mathcal{F}$ 上去而成一个完全可加的向量测度；

(2) 在 $\mathcal{F}_0$ 上存在一个实值测度 P，使 $\mu\ll P$.

证明可参见文献 [2].

根据 Stone 关于 Boole 代数的表示定理，对于任一点集 Ω 和 Ω 上的代数 $\mathcal{F}$，存在着完全不连通紧 Hausdorff 空间 $\overline{\Omega}$ 和 $\overline{\Omega}$ 的开闭集构成的代数 $\overline{\mathcal{F}}$，使得 $\mathcal{F}$ 到 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的 Boole 同构存在，利用这一表示定理，可以将实测度 Yosida– Hewitt 以及 Lebesgue 分解定理以适当的方式转移到向量测度上来.

定义 1.4　设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的代数，称向量测度 μ 是 $\mathcal{F}$ 上强可加的，若对于任意 $A_n\in\mathcal{F}\ (n\geqslant 1)$，$A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)$，则依 $\mathbf{B}$ 的范数有：

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0.$$

如下的结论是 Yosida–Hewitt 和 Lebesgue 的.

1. 设 $\mathcal{F}$ 是某个代数，$\mu:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 是强可加的向量测度，则

(1) μ 可以唯一地分解为两个测度 μ_c 与 μ_p，其中 $\mu_c:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 是可列可加的；$\mu_p:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 使得对每个 $x^*\in\mathbf{B}^*$，$x^*\mu_p$ 都是纯有

限可加的 (即除去 0 之外，没有其它可数可加测度 $\nu:\mathcal{F}\to[0,\infty)$ 满足：对任意的 $E\in\mathcal{F}$, 有 $0\leqslant\nu(E)\leqslant V_{x^*\mu_p}(E)$).

(2) 若 μ 是有界变差的，则 μ_c, μ_p 也是有界变差的，并且对任意的 $E\in\mathcal{F}$, 有

$$V_\mu(E)=V_{\mu_c}(E)+V_{\mu_p}(E).$$

此外 V_{μ_c} 与 V_{μ_p} 是互奇异的，即对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A\in\mathcal{F}$, 使得

$$V_{\mu_c}(\overline{A})+V_{\mu_p}(A)\leqslant\varepsilon.$$

2. 设 $\mathcal{F}$ 是某个代数， $\mu:\mathcal{F}\to\mathbf{B}$ 是强可加向量测度，则对任意有限可加的实测度 $\nu:\mathcal{F}\to[0,\infty)$,

(1) 存在唯一分解 $\mu=\mu_c+\mu_s$, μ_c, μ_s 强可加， $\mu_c\ll\mu$; 对于每个 $x^*\in\mathbf{B}^*$, $x^*\mu$ 是与 ν 互为奇异的.

(2) 若 μ 与 ν 可数可加，则 μ_c, μ_s 可数可加.

(3) 若 μ 是有界变差的， μ_c 与 μ_s 是有界变差的，并且对任意的 $E\in\mathcal{F}$, 有

$$V_\mu(E)=V_{\mu_c}(E)+V_{\mu_s}(E).$$

此外 V_{μ_s} 与 μ 是互为奇异的.

§1.2 可 测 函 数

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间，称 σ 代数 $\mathcal{F}$ 是完备的，如果 $A\in\mathcal{F}$, $P(A)=0$, 则对任意的 $B\subset A$, 都有 $B\in\mathcal{F}$. 任何 σ 代数都可以完备化成为完备 σ 代数. 例如以 $\mathcal{Y}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中的零概率集的全体子集，则 $\overline{\mathcal{F}}=\sigma\{A\Delta B:A\in\mathcal{F},B\in\mathcal{Y}\}$ 就是 $\mathcal{F}$ 的完备 σ 代数. 对于任意的 $B\in\mathcal{Y}$, $A\in\mathcal{F}$, 定义 $\overline{P}(A\Delta B)=P(A)$, 则 $\overline{P}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的概率，称 $\overline{P}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}$ 的完备概率， $(\Omega,\ \overline{\mathcal{F}},\ \overline{P})$ 是完备的概率空间.

本节恒设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备的概率空间.

定义 1.5　称函数 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iI_{A_i}$ 为 Ω 上的阶梯函数，如果 $A_i\in\mathcal{F}$, $x_i\in\mathbf{B}$, $i=1,2,\cdots,n$, $A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$. 称函数 $X=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_iI_{A_i}$ 为 Ω 上的可数值函数，如果 $A_i\in\mathcal{F}$, $x_i\in\mathbf{B}$, $i=1,2,\cdots$, $A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.

显然，阶梯函数为可数值函数.

定义 1.6　称函数 $X:\Omega\to\mathbf{B}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的弱可测函数 (或标量可测函数), 如果对任何 $f\in\mathbf{B}^*$, 实值函数 $f(X)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的可测函数.

称函数 $X:\Omega\to\mathbf{B}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 (强) 可测函数，如果存在阶梯函数列 $\{X_n\}$ 几乎处处强收敛于 X(强收敛指依范数收敛，以后如无特别声明，收敛总指强收敛), 即存在 $\Omega_0\in\mathcal{F}$, $P(\Omega_0)=0$, 对任意的 $\omega\in\Omega-\Omega_0$, 有

$$\|X_n(\omega)-X(\omega)\|\longrightarrow 0\ \ (n\to\infty).$$

此时，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$ $a.e.$ 或 $X_n\longrightarrow X$ $a.e.$.(注：以后，几乎处处成立的等式或不等式，常省去几乎处处的记号 $a.e.$)

定理 1.8　函数 X 可测的充要条件是存在可数值函数列几乎处处收敛于 X.

证明　必要性显然, 下证充分性. 设 $\{X_n\}$ 为可数值函数列, 几乎处处收敛于 X, 即存在 $\Omega_0\in\mathcal{F}$, $P(\Omega_0)=0$, 对任意的 $\omega\in\Omega-\Omega_0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n(\omega)-X(\omega)\|=0.$$

对每个 $n\geqslant 1$, 不妨设 $X_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_n^kI_{E_n^k}$, 其中 $E_n^k\in\mathcal{F}$, $x_n^k\in\mathbf{B}$ $(k\geqslant 1)$, 且有 m_n, 使得

$$P\Big(\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty}E_n^k\Big)<\frac{1}{n^2},$$