

332809

成都工学院图书馆

基本馆藏

砂基上基础的稳定性

[苏联] M·И·高尔布諾夫-波薩多夫 著

顾慰慈 王正宏 译

081
0014

中国工业出版社

5(3)81
5/0014

砂基上基础的稳定性

〔苏联〕 M·И·高尔布诺夫-波萨多夫 著

顾慰慈 王正宏 译

中国工业出版社

本书阐述按土的弹性理论和塑性理论的混合课题解法计算天然地基的方法，以及该课题在砂基稳定性计算中的应用。这样一种计算方法为更接近于实际情况大大迈进了一步，并且也证明了它的经济效益。

书中提出了一些计算实例，叙述了混合课题的原理、求解的数学途径、计算结果的特点以及问题的实际意义。

本书可供从事于土力学地基与基础的科学研究、设计及教学人员参考。

М. И. Горбунов-Посадов
**УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНДАМЕНТОВ НА
ПЕСЧАНОМ ОСНОВАНИИ**

Госстройиздат Москва—1962

* * *

砂基上基础的稳定性

顾慰慈 王正宏 译

*
建筑工程部图书编辑部编辑(北京西郊百万庄)

中国工业出版社出版(北京佟麟阁路10号)

北京市书刊出版业营业许可证出字第110号

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*
开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张4·字数97,000

1965年9月北京第一版·1965年9月北京第一次印刷

印数0001—4,950·定价(科六)0.60元

*
统一书号: 15165·4097(建工-478)

前 言

本书试图利用試驗数据來說明，为何单独按弹性理論，或是按极限应力介质理論計算地基的稳定性，会得出不相一致的結果。这两种方法还常常給出不經濟的結果。作者根据对試驗和理論研究的分析得出一个結論，即所謂土介质的弹性理論与极限应力状态（塑性状态）理論的混合課題能保証解答的成果最接近于实际情况。

作者不准备提出类似于 В.Г. 別列贊采夫（Березанцев）教授在“結構物地基强度的計算”（“Расчет прочности оснований сооружений”，Госстройиздат，1960）一书中給出的，用以进行稳定性实际計算的現成公式及計算数据表，也不想給地基稳定性問題的現狀作輪廓性的描述，只推荐感兴趣的讀者去參考 Е.查哈列斯庫（Zaharescu⁽⁶⁶⁾）的綜合文獻。

本书旨在簡要地闡明地基稳定計算問題的現狀，并且說明，利用土的弹性理論以及塑性理論算得的結果完全不能反映实际情况，因为，这些理論不能很好地反映土的真正的力学性质。問題出現在，在計算中这两种理論都沒有被正确利用，它們忽視了一种情况，即在大多数情况下，都必須考虑在土中是既存在弹性区域，又存在塑性区域的，并且二者之間是相互作用的。早在1930年中期，В.А.弗洛林（Флорин）和Д.Е.波尔申（Польшин）就指出了这样来处理問題的重要性^(48,49和33)，并称之为土的弹性理論和塑性理論的混合課題。

本书的主要内容在于叙述为了理解上述混合課題解所必須的有关地基稳定性計算的理論与試驗研究成果。还談到置于砂基表面受中心荷載的刚性基础在平面問題条件下的稳定計算实例、混合課題的提出、求解的数学途径、計算結果的特点以及問題的經濟意义。

AS 14/09

IV

从文章中可以看到，混合课题的求解是十分困难且烦琐备至的。但是在目前有可能利用电子计算机，因而可以设想，在很短的时间内就能排列出现成的表格，按照混合课题的原理，对处于各种内摩擦角情况下的地基进行稳定性计算。此外，也可以建立简化的计算方案，而以严密解作为其精度的验证标准。欲将所得成果推广到有砌置深度的和受倾斜荷载的基础下的粘性土地基，尚需花费巨大的劳动。可以期望，今后我们所提出的方法将为更有效的方法所代替，并且土的塑性区域与它下面的不滑动的土体的相互作用问题会被更深入地研究。

混合课题的解答不仅对地基稳定性计算有其积极的现实意义，而且对于基础强度计算、地基的沉降以及其它问题的计算也都具有重大意义。在本书中不能不接触到混合课题在这些领域内应用的前景，即使是十分肤浅的。

因此，我们的研究目的主要在于拟订有关计算土质地基的混合课题解法的一般原理，而不在于解决地基稳定的某一个十分特殊的问题。

甚至于如果研究者们开始只注意于地基的稳定问题，他们的工作也是具有重大的实际意义的，因为按极限稳定状态来计算地基仍然是现今基础工程中极为重要的工程问题之一。

诚然，建筑法规⁽⁴²⁾和房屋及工业结构物天然地基设计标准及技术规范(ННТУ127-55)⁽²⁹⁾等文件指出，只有作用有规则的水平荷载的房屋和结构物的地基，以及对于地基以斜坡为界面的房屋和结构物，才必须进行稳定性的计算，同时，对于所有的各类房屋和结构物都必须进行变形计算。显然，按极限稳定状态进行计算的范围将来还会扩大⁽³⁴⁾，特别是对紧密砂土，这时即使基础的支承面很小，预计规范中规定的结构物变形量的限值是可以满足的，但如不校核其稳定性，便不可能得到足够经济的方案。因此，要求建立一种无论是对于房屋地基，或是水工结构物地基，在承受垂直的或是倾斜的荷载下，能以满足严格要求的有根据的稳定计算方法。没有这样一种方法，就会使得工业结构物

和土工結構物地基設計規範中論述穩定性的一章的內容顯得極其貧乏。

如果在本書出版問世以後，能使研究人員對於這樣一個廣闊的綜合課題引起注意，能將混合課題應用於地基計算，並且能夠推動該領域中的新工作的話，那麼我們便認為編寫該書的目的算是達到了。

作者衷心感謝高級科學研究員技術科學副博士 P.B. 謝列布利雅內、科學研究員 O.И. 希洛娃及 И.Г. 布特科夫斯基，他們在計算工作上幫助極大。

目 录

前 言

第一篇 应用土的弹性理論及塑性理論計算地基的稳定性。同实验数据的比較

第一章	用严格理論計算土基的一般意見	1
第二章	弹性理論的应用	10
第三章	土的塑性理論的应用	26
第四章	实验資料綜述	32
第五章	考虑压密核存在的近似方法	46

第二篇 解刚性承压板下砂土地基稳定性課題的一般原理。弹性核边界及其应力状态的确定

第一章	一般原理	58
第二章	用理論方法确定弹性核課題的提出	62
第三章	弹性核的近似界线及其精化方法	65
第四章	应力函数的选择	68
第五章	接触条件及平衡条件的滿足	69
第六章	核的下部边界的接触条件的滿足	78
第七章	临界边缘荷载下承压板底面上接触压力的确定和核的弹性状态的校核	95

第三篇 土中塑性区的計算及基础上临界荷载值的确定

第一章	压密核塑性区的計算	100
第二章	弹性核外塑性区的計算和稳定临界荷载值的确定	109
第三章	結論与进一步研究的前景	114
参考文献		117

第一篇 应用土的弹性理论及塑性理论 计算地基的稳定性。同实验数据的比较

第一章 用严格理论计算 土基的一般意见

在地基计算时，对于作为多相的松散介质的土来说，它的极复杂的实际的力学性质，在大部分情况下是用两种简化的连续介质力学模型之一的力学性质来代替的：即土的弹性理论模型或土的极限应力状态模型。为了简化起见，今后称后一理论为土的塑性理论。

选择这些计算模型并非偶然的。因为在确定地基任意区域中的应力和变形时，没有其它计算模型能够这样完备。在上述两种计算理论中，介质的力学性质是非常清楚的。对计算理论的数学工具进行深入研究的程度是不同的。根据计算理论可以解决许多综合问题，在解决这些问题时，可以用现成的公式或表格来进行地基的计算。

例如，在H.M.格尔谢瓦诺夫教授（Герсеванов）的一些著作中曾经指出，在荷载作用下土中所存在的大量残余变形并不影响到应用弹性理论来确定土的变形⁽⁸⁾，根据这一理论就能够进行结构物的沉降计算。就是这样一种理论奠定了弹性地基上结构物的近代计算方法。

在第一篇中所讲述的基础稳定计算的理论，是在应用弹性理论和应用塑性理论的途径上发展起来的。

多数实验研究证明，在符合一定条件的情况下，初步近似地来应用这两种理论，可以认为是正确的。如果作用在土上的荷载完全没有或者只在很小的范围内越过土的抗剪强度所允许的数

值，那末整个土基可近似地认为是一种直线变形的介质，因此就可用弹性理論来计算。在超过抗剪强度所允許的情况下，土就轉变为滿足塑性理論所反映的状态。

同时，根据对实际結構物的沉降观测，确定地基底面应力的試驗，以及在荷載作用下地基丧失稳定性时土的性状的研究，都显示出与土的弹性理論或塑性理論对这些情况所預測的結果存在很大的差別。

为使理論成果和实际情况之間能很好地吻合，曾提出过許多建議，其中人工模型或对基本理論的所謂修正方法常常能获得令人滿意的結果。

然而直接根据弹性理論和塑性理論来使得計算結果和实际情况相当一致的作法也是完全可能的，但是必須是在正确使用上述理論的前提下。看来，对于沉降計算，可以根据变位功能最小的条件采用弹性有重量半空間体和半平面体的变形理論。对于地基穩定計算和基础底面反力分布的計算，制定一个考虑基础地基中产生的弹塑性区相互作用的方法則具有同样重要的意义。

由于这种相互作用，譬如，在根据弹性理論計算均质地基或弹性成层地基时，在刚性基础底面边缘处所出現的无限大应力，就被实际上可能出現的有限应力所代替，而对位于砂基面上的基础，这种应力甚至等于零（见图2）。

当考虑弹塑性区的相互作用时，临界荷載的大小和挤出楔的尺寸要比按塑性理論計算的大好几倍，而与实验数据正好吻合。

弹性区和塑性区的相互作用，决定了这两个区的边界上的应力必須滿足連續条件，也就是边界上的正应力和切应力在边界的两側应该是相同的。这一条件不仅决定着土中的应力状态，而且也决定着弹性区和塑性区的边界。

由于对問題采用了这样的处理方式，所以就被称为弹性及塑性理論的混合課題。混合課題是弹塑性課題中的特殊情况，它說明由弹性状态过渡到塑性状态也可能是緩变的，要获得弹性区和塑性区之間的明确边界也是不可能的。在混合課題中如将土的性

质加以某些理想化，就能避免地基計算中的許多基本困难，而同时較之一般的处理方法，又能保証达到足够的精度。

應該說明，刚才所談的一切只能无保留地用于砂土地基。对于粘土地基，变形不是一瞬間就过去的，而是随时变化的，这意味着在应用混合課題时，事情就变得比較复杂。在粘土地基的許多問題中，應該采用的并不是土的塑性理論，而是考虑到它們的粘滯性的土的蠕变理論。在某些情況下，有可能要同时利用所有三种理論。

在解地基計算的混合課題时，我們认为可以局限于研究靜力学問題，而不研究塑性变形的速度。應該指出，企图考虑塑性变形速度的作法还为时过早，因为这会导致与試驗数据发生很大矛盾的后果，在下面我們將要談到。

前面我們已經部分地提到的混合課題的解，对于下列三类基本問題是具有实用价值的。現在我們来研究位于砂基表面上的基础（承压板）的最简单的例子。

1. 基础的沉降計算。通常，作用在基础上的实际荷載远小于地基穩定性的极限荷載，因此塑性变形区比較小（图 1）。这些塑性区的存在使地基的强度减弱。因此考虑塑性区存在时刚性基础的沉降計算值，要比按弹性理論計算得到的沉降值大一些。但是應該指出，在实际荷載下，精确計算所得到的沉降的增加是不大的，因为在地基的受压土体中，由于塑性区的存在所引起的应力重分布是不很大的。

結構物的实际沉降是不大的，要比按弹性理論計算的小。因

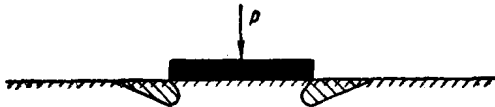


图 1 位于砂基上的无砌置深度基础（示意图）。在实际荷載作用下砂基中的塑性变形区（划影线的部分）

此，在这种情况下如果不考虑到前面所提到的另一个比较重要得多的因素——土的重量，则应用混合课题的方法是无无论如何不可能使计算更趋精确的。

但是这并不意味着在进行沉降计算中混合课题的解就不具有任何意义了。

首先应该指出，根据现行的房屋及工业结构物天然地基设计标准和技术规范⁽²⁹⁾的规定，在进行沉降计算时，只有在这种情况下才允许应用弹性理论，譬如，对于受中心荷载的基础，基础底面边缘处所产生的塑性变形区的深度应不超过基础宽度的 $\frac{1}{4}$ 时。这实际上是要限制基础上的荷载，因为在通用的沉降计算方法中是不存在不利用弹性理论的方法的。

然而并没有对论证上述规范的正确性进行研究。所有这些课题都是含混不清的。在应用标准及技术规范127-55时，是假定作用在基础下面土上的压力是均匀分布的，但根据弹性理论的计算，刚性基础下的压力分布是极不均匀的，在基础的最边缘处达到了无限大。这不可能不严重地影响到塑性变形区的大小（参见第二章）。并且规范还毫无根据地提出，在确定塑性变形区时土的侧压力系数采用为 $\xi_0 = 1$ 。然而研究证明（参见第二章），选择这样或者那样的侧压力系数值也影响到塑性变形区的大小。

其次应该指出，塑性变形区的深度不应该象规范中所指出的那样按弹性理论来确定，而应该按弹性理论和塑性理论混合课题的解来确定。

最后，规范本身所提出的一个先决条件是，当荷载超过规范中所述的范围时，荷载和沉降之间就产生非线性的关系，这也是既没有理论根据，也没有被试验资料证明的。

在柔性基础的情况下，根据混合课题所确定的总沉降量也有一些偏大。至于沉降的不均匀性，通常在考虑塑性变形时会减小。这是由于在大多数情况下边缘反力的降低导致基础挠曲的减小。因为对结构物有害的不是总沉降量，而是不均匀沉降量，所以混合课题的解在这里也就能给出极经济的结果。

2. 基础的强度计算。在这种情况下下的塑性区也和沉降计算时一样(图1), 但它对计算成果的影响是很大的。在砂基的情况下, 根据试验资料、理论分析和本书第二篇中所列举的解可以证明, 在考虑塑性区的情况下, 无砌置深度基础底面边缘处的反力等于零, 而不象根据弹性理论计算得的那样是无限大(图2)。可是在粘土地基上, 而且是有砌置深度基础的情况下, 边缘应力下降的效果就比较小, 完全可以肯定, 在任何非岩土的情况下, 考虑边缘应力的降低在大多数情况下将导致基础中部最大计算正弯矩的减小。特别是在荷载接近于均匀分布时, 弯矩的减小最厉害, 而且甚至可能使弯矩的符号发生改变(参见第二篇第七章)。

为了考虑塑性变形区的影响, B.A. 弗洛林早在1937年就提出过一个近似方法⁽⁴⁸⁾, 用来切除刚性条形基础下沙多夫斯基反力图中的《边峰》值。为此他建议应用别尔泽茨基公

式, 此式给出土基上极限压力的近似解。我们⁽⁹⁾曾经注意到, 在沒有荷载或有均匀荷载的情况下, 当应用B.B. 索柯洛夫斯基的松散介质静力学中的严格理论时, 极限压力图实际上是按直线分布的。这种情况在B.B. 索柯洛夫斯基本人的著作中^(39, 40)得到进一步的证明, 这一著作是由一些计算表所组成, 根据基础砌置深度的大小、内摩擦角及内聚力, 即可确定极限压力图的各参数。

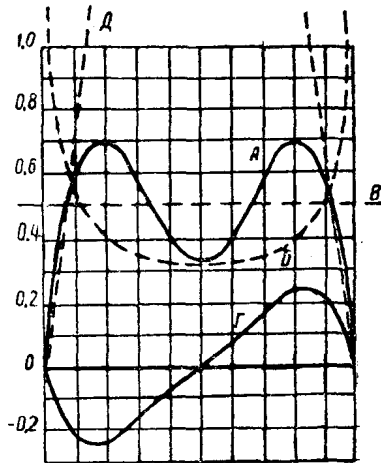


图2 在平面课题条件下刚性承压板下的应力分布

A—根据混合课题的解在内摩擦角 $\rho = 40^\circ$ 时的垂直正应力; B—在无摩擦的情况下根据弹性理论(M. 沙多夫斯基解)所求得的承压板下的反力; Γ —作用在上上的平均压力; $\tilde{A}$ —根据B.B. 索柯洛夫斯基解求得的砂基极限压力

因此就使得有可能用比 B. A. 弗洛林所建議的方法更加严格的方法⁽¹³⁾来切除《峰值》。

这种切除的例子在图 2 上用直线 II 示出，此例是針對位于砂基表面上寬度 $2a = 2$ 米的承压板的，砂基的內摩擦角 $\rho = 40^\circ$ 、容重 $\gamma = 1.8$ 吨/立方米。反力图按一定比例尺給出了平均压力 $p_{cp} = 20$ 吨/平方米。

B. A. 弗洛林和作者的方法存在着这样一个缺点，即基础梁內面的压力图或者保持与弹性理論解的結果相同（我們的計算图），或者按任意推荐的規律变化（B. A. 弗洛林的計算图）。И. Я. 施塔耶尔曼（Штаерман）曾企图使这些方法更加精确，而采用条形基础（当作弹性半平面上刚性承压板来研究）兩側边的极限荷載作为基础中部的超荷載。

最后說明这样一个問題，即基础底面邊緣下土中所发生的塑性变形对基础底面压力分布的影响究属如何，以及由于考虑到这种影响而获得什么样的經濟效果等問題，只能借助混合課題的解来解决。Е. И. 捷普里茨基（Теплицкий）在这方面曾进行过嘗試⁽⁴³⁾，遺憾的是他所假定的滑动线网沒有为运动学所証明。

3. 地基的稳定計算。本书正是研究这个問題，即使是研究的范围十分狹窄。

正如本书第一篇中所述的試驗研究和理論研究所証明，随着粗糙基础底面下砂基中荷載的增加，楔形区中的土就产生压密。这一楔形区就称为压密核。它的上部保持于弹性状态，而下部則保持于塑性状态（图 3）⁽¹⁵⁾。对于其它类型的土，压密核則往下移动。在这一阶段，核以外的塑性区在临近基础邊緣的不大一段长度內由地基表面逸出。

如果繼續增大荷載，則荷載即达极限值（临界值），这时，压密核有如挡土墙一样向兩側作用，使相邻的全部土被挤出（图 3）。

压密核的存在导致滑动土层厚度，較之不考虑压密核的塑性理論所求得的滑动土层厚度急剧地增大（图 4）。由于这一原

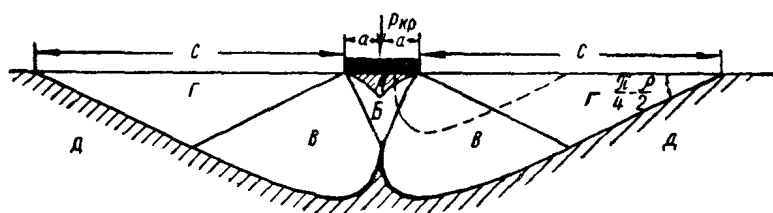


图 3 根据实验数据和混合课题的计算结果，在临界荷载 P_{KO} 作用下承压板下弹性区和塑性区的分布
 A—压密核的弹性部分和B—塑性部分；B—过渡塑性区；Г—朗肯区；Д—不滑动的弹性区

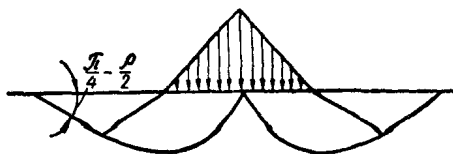


图 4 根据土的塑性理论，当不考虑压密核存在而基土向两侧挤出时，地基稳定性的计算图(希尔图)。适用于底面绝对光滑的基础

因，也使得临界荷载值（破坏荷载）急剧地增大。

这就意味着，混合课题的应用范围不应该仅仅局限于一般的基础。这样的一些问题同样发生在承受垂直荷载以及水平荷载的有砌置深度基础的计算中，发生在锚固板、桩、挡土墙和板桩墙、山岩坑道的加固以及地下结构物衬砌的计算中。在所有有砌置深度基础的情况下，混合课题的性质就比较复杂，因为它的对象变成了研究是否形成闭合的塑性区，或者称做“内部流土”区⁽⁶⁾（图5），闭合的塑性区只有在毗邻塑性区的土产生极大压密的情况下才可能形成。

正如И.Ф. 拉佐列诺夫（Разоренов）的试验⁽³⁶⁾所证实，在图56上所列的内部流土的情况下，被动土压力的数值可能比土体自由滑动的库伦方法或B.B. 索柯洛夫斯基方法⁽⁴¹⁾所求得数值大好几倍。

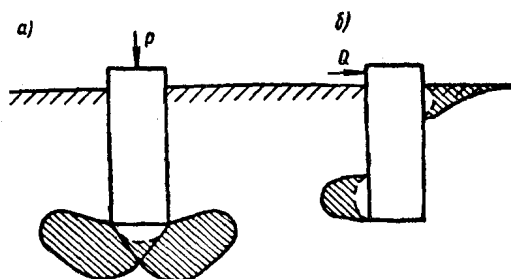


图 5 深置基础的地基中的塑性区

a —在垂直荷载作用下的内部流土； b —在水平荷载作用下的内部流土及表面流土

在解砌置在土中的结构物的混合课题时，必须考虑到由于结构深埋于土中所发生的土体整体性的破坏和土粒的压密作用。在弹性区域内，这一点可以用引入一个应力分量函数的方法来解决，该分量与一对张力和扩大中心有关。

从上面所说的可以清楚地看到，应用混合课题可以得到较大的经济效果，而这一课题的范围是很广的。混合课题揭示了按极限状态来精确计算地基和基础的强度、稳定性及变形的广阔的可能性。

但是，计算方法转变到以混合课题为条件的意义，不仅仅局限于事物经济性的一个方面，而也是由于许多静力计算的问题，一般在弹性理论或塑性理论单方面的框框里是不能得到解决的。在本书第三章中将证明，当应用土的极限平衡理论来计算在松散介质顶部边界的有限长度上作用有荷载的情况时，课题的解只能建立在分塑性区为两个部分的这种计算图形上（见图4），虽然为承压板所传递的荷载的试验数据与这种计算图形是有矛盾的（22、25、59、66）。

其次，在基土无论是从刚性承压板底面的一侧挤出或从两侧挤出的情况下，根据土的塑性理论，基础受垂直向的或倾斜向的偏心荷载作用时，基土反力的合力作用方向 and 作用点是不可能与外荷载的合力作用方向和作用点相一致的（图6），也就是说，不

能滿足平衡条件。

基础刚度的作用使得反力的分布与外荷载的分布不一致。如果地基的稳定性只依靠土的塑性理論来計算，那末一般是不可能来考虑上述作用的。但是如果考虑到由实验所証实的，在基础下基土中存在弹性核这一事实，而应用混合课题的方法，那末这一困难立即就可消除。若解基础和地基的接触课题，则可求得弹性核的这样的下部边界及沿着底部边界的这样的应力分布，在这种下部边界及应力分布的情况下，基础—核—塑性区体系中的每一部分处于平衡状态。

虽然上述的一切已指出了这样一个明确的理由，証明必須加强混合课题解的研究，但是在这方面做得还是很不够的。现有的混合课题的严格解^[39,46]，是针对直接作用在地基表面上的半无限

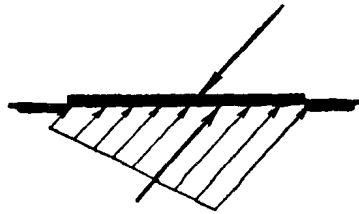


图 6 外荷载合力作用点与根据土的塑性理論所确定的土內极限破坏压力合力作用点不相吻合的图示

荷载的情况而論的，虽然这种解具有极大的理論价值，但是还不能用来計算有限尺寸及具有一定刚度的基础。

最后，也不能期望混合课题的解就能保証与实际結果完全一致。前面曾經指出，也应该采用其它能使理論成果与結構物地基的实际情况相接近的方法。这些方法可以相互取长补短。但是虽然应用这些精确的綜合方法，計算成果还毕竟与实际情况有一段距离。譬如，要考虑土的非均质性的影响就并不是完全可能的；稳定計算的成果与內摩擦角值、內聚力值及側压力系数值有很大关系，而对于确定这些数值的方法問題还远未达到观点一致；計算基础的沉降及强度时是不够精确的，这表现在土的变形模数等等的确定方面。

虽然存在这些保留条件，但是混合课题还是一种能保証使成果最有效地接近于实际，具有严格的靜力学的依据和具有經濟性

的地基穩定計算的方法。

本書僅講述根據彈性理論和塑性理論獲得的地基穩定計算領域內的已有成果；並不表明這些成果不適於用來處理混合課題情況下的同一問題。實用的計算方法是建立在假定這樣或那樣的滑動面形式的基础上的，我們對此並不感到興趣。我們並不是想要說這種方法已經過時了。恰恰相反，可以肯定，在許多情況下，譬如，對應用圓柱形滑動面假定的計算方法，在其靜力學的条件下，其計算成果的可靠性幾乎可以和按土的彈性理論或塑性理論計算的成果沒有一點差別。關於應用圓柱形滑動面方法的評述和本人的方法的推荐，均同時發表於本人的著作中⁽¹⁰⁾；基於假定這種或那種滑動面形式的各種計算方法的說明，讀者也可以參閱B.Г.別列贊采夫的書籍⁽⁶⁾。下面所介紹的建立在嚴格理論基础上的方法，常常由於不正確的使用而使計算成果接近於實際情況的程度較之上面所列举的近似方法還要差一些，但是關鍵在於對這種計算方法的看法，根據作者的意見，它是最嚴格的，其次也是能夠比較好地與實驗數據相吻合的方法。

第二章 彈性理論的应用

用分析彈性半空間應力狀態的方法來研究地基穩定性的問題，曾首見於Н.П.普崔列夫斯基（Пузыревский）⁽³⁵⁾及И.В.雅羅波爾斯基（Яропольский）⁽⁵⁴⁾的著作中。隨後這些問題引起了許許多多作者的注意。這些問題和這些書籍所介紹的基本概念，讀者也可得自B.Г.別列贊采夫的書籍中⁽⁶⁾。本書僅限於研究與我們所提出的課題有直接關係的一些問題。

應用彈性理論來研究地基的穩定性及強度問題，是建立在下列假定的基础上的。即假定在一定荷載和根據彈性理論所確定的相應的土的應力狀態的情況下，土中任意點滿足下列平衡條件⁽⁴¹⁾：