

电子学译丛

上海市电子学会编译委员会编

11

上海市科学技术编译馆

电 子 学 译 丛

(11)

上海市电子学会编译委员会编

*

上海市科学技术编译馆出版

(上海南昌路59号)

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 6 1/2 字数 200,000

1965年4月第1版 1965年4月第1次印刷

印数 1—3,200

编 号 : 1 5 . 2 7 8

定 价 : (科七) 0.90 元

目 录

1. 用奇异积分方程解决一类波导的不連續問題	1
2. 微波功率測量技术綜述	11
3. 利用反饋改进微波功率測量	16
4. 使用晶体倍頻器的一些簡單測量技术	20
5. 双介质片 H 型波导	29
6. 用于毫米波的双棱鏡衰减器	35
7. 場效应晶体管小信号高頻理論	37
8. 結型晶体管上升和下降時間的計算	44
9. 均匀半导体.....一类新誕生的器件	48
10. 測量热电偶电动势用的磁性半导体毫伏計	51
11. 电容式半导体頻率計	54
12. 測量晶体管 β 的新方法	57
13. 万用晶体管特性測試器	60
14. 晶体管小尺寸快动作自动补偿器	65
15. 快速电流脉冲发生器	68
16. 数字电压表的綫性电压发生器	73
17. 反饋放大器的分析	76
18. 隧道二极管振蕩器	80
19. 新型的自激多諧振蕩器	84
20. 微弱吸收調制的最佳关系	86
21. 两电平相关的模拟計算机	90
22. 相关干扰时最佳檢測問題	96

1. 用奇异积分方程解决一类波导的不連續問題

L. Lewin

«IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques» Vol. MTT-9, No. 4, 1961, 7, pp. 321~332 (英文)

本文指出在文献中出現的矩形波导問題的許多解之中,有相当数目是以奇异积分方程已知解为中心的普遍处理方法的特例。作者据此对一些典型的結果重新予以考查,并将这种方法应用于四种新的結構上。文中并研究了它的应用范围及其限制。

I. 引言

即使采用了几何形状是理想的、波导壁的电导是无限的等等近似,可以得到准确解的波导問題,仍限于少数形状非常简单的波导。近来,可以准确地处理的一类問題具有这样的結構,即其中的不連續部分把空間分成 $z < 0$ 和 $z > 0$ 的两个均匀区域。例如半无限长波导向自由空間的輻射、波导的分隔以及波导截面一半有膜片等等。解这类問題的方法是建立沿波导軸或其它等效軸的場的积分方程,这个积分方程在不連續处的兩側取不同的形式,然后用 Wiener-Hopf 法求解,波导的参数就可以从解中得到。

这种方法只对有限几种形式可以給出严格的結果。然而,如果波导的不連續是沿截面变化的形式,例如膜片、带、波导截面改变等,这种方法就不适用。它也不能应用于傳播介质在不連續处改变的結構,例如插入一个电介质或鉄氧体。

对于这些情况,将沿橫截面的場作为未知量,結果将更滿意些,并且可以为这一类的問題建立一不同形式的积分方程。Wiener-Hopf 方法就再有用,但在一些特殊的情形中,方程式可以得到各种准静态程度的近似解。Schwinger 和与他合作的人^[1]曾对波导膜片做了这种工作, Lewin^[2,3]对非对称的波导带及装有鉄氧体的一段波导,也做了这样的工作。Schwinger^[4]也曾采用保角变换方法得到波导参数的表达式而不用得出积分方程的显式解。后一种方法是非常有力的,其結果把一些膜片結構的結果也包括在內,否則的話,要从解准静态积分方程才能得出。

然而并不是所有这种形式的結構都可以用这种方法处理的。似乎对于非对称电感結構的、傳播介质改变的,电抗性的带及其它等等形式就必须直接解准静态积分方程才行。

本文所要研究的,就是与最后这一类不連續有关的問題。这一类問題的方程散見于各文献,而且解的方法也是各种各样的。現在看来,它們都是一个普遍处理方法的特殊情况。这种处理方法具有比較廣闊的应用范围。本文首先概略地說明以上所提到的几个实例是这个普遍处理方法的特例,然后提供几个新的应用的例子,并指出哪一类結構形式可以使用这方法处理。当然,它不是取代以前的处理方法而是扩大了能够严格求解的問題的范围。

II. 电感性膜片

图1表示矩形波导中的一个电感性膜片。一个主模式的波 $E_z = \sin(\pi y/a) e^{-jk_z z}$ 从 $z = -\infty$ 的地方射入并建立起一个反射波、一个傳播波和在膜片兩側一系列逐漸消失的模式。在开孔处的場 $E(y)$ 仍是未知的,但是可以利用富里叶展开式,将各种模式的幅值用 $E(y)$ 表示出来。开孔处切向磁場的連續性导致含有模式振幅的一个方程式,并且把这些表示出来以后,便得到 $E(y)$ 的积分方程。这个方程可以用分部积分法簡化,并且按膜片的未知函数表示后,它所取的形式^[5]是:

$$\begin{aligned} & B \sin(\pi y/a) \int F(\eta) \cos(\pi \eta/a) d\eta \\ &= - \sum_n (\lambda_n/a) (1 - \delta_n) \int F(\eta) \sin(n\pi y/a) \\ &\quad \times \cos(n\pi \eta/a) d\eta \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $F(\eta) = E'(\eta)$, 积分变量 η 的范围只限于孔径,这也是 y 的范围,在这个範圍內, (1) 式必須成立。 $\delta_n = 1 - (1 - k^2 a^2 / n^2 \pi^2)^{1/2}$ 是一个小量,对于高模式数 n , 它趋于零,而且它是 n 次模式偏离其准静态值的度量。作为一次近似时可以把它略去,做二次近似时,保留前一个或两个系数,将得到一个相应的高阶次的解。保留这些高阶次的項,虽然使它复杂化,但并不影响这种解的方法,因此这里不去研究它們。虽然任何地方把它們加进来是比較容易的。

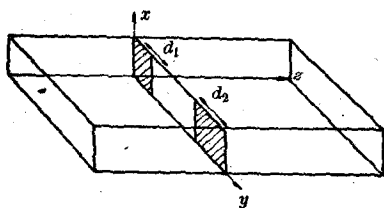


图1 矩形波导中的电感性膜片

d_n 略去后, 为了解(1)式, 我們加上再减去这无穷级数的第一项, 通过以下已知的結果求和,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nxy/a) \cos(n\pi\eta/a)}{n} = -\frac{1}{2} \log 2 |\cos(\pi\eta/a) - \cos(\pi y/a)|$$

把它对 y 微分, 可得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nxy/a) \cos(n\pi\eta/a) = \frac{\frac{1}{2} \sin(\pi y/a)}{\cos(\pi\eta/a) - \cos(\pi y/a)} \quad (2)$$

代入(1)式得:

$$(2 + 2aB/\lambda_g) \int F(\eta) \cos(\pi\eta/a) d\eta = - \int \frac{F(\eta) d\eta}{\cos(\pi\eta/a) - \cos(\pi y/a)} \quad (3)$$

和前面一样, y 和 η 两者的范围是膜片的孔径。

现在左边全部是某一常数 C , 与 y 无关。如果我們选取新变量 $X = \cos(\pi\eta/a)$, $Y = \cos(\pi y/a)$ 并令 $F(\eta) d\eta = G(X) dX$ 则(3)式变为

$$\int_A^B \frac{G(X) dX}{X - Y} = -C \quad A < Y < B \quad (4)$$

这里 A 和 B 是 X 的新极限, 相应于 η 的孔径极限。加入高阶次的项时, 将在右边增加一个 Y 的多项式, 除此之外, (4)式的形式不改。

(4)式中积分的主值是要知道的, 因此(4)式是一个奇异积分方程, 我們可以借助于这些方程的理论求解。一个方便的参考书是 Tricomi^[6], 那里我們找到

$$f(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(Y)}{Y - X} dY \quad (5)$$

的解是

$$\phi(X) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-Y^2}{1-X^2}} \frac{f(Y)}{Y-X} dY + \frac{K}{\sqrt{1-X^2}} \quad (6)$$

K 的性质是积分常数, 把这結果应用到(4)式上必須把积分范围从 (A, B) 改为 $(-1, 1)$ 。这很容易, 选取新变量

$$X' = \frac{2(X-A)}{B-A} - 1 \quad (7)$$

和与它相似的以 Y 表示的 Y' 就可以。这正相当于 Schwinger 的 $\cos(\pi y/a) = C + S \cos \theta$ 的变换^[1], 它就是迄今处理象(3)式那样的方程所用的技巧。現在(6)式中的 K 是:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(X) dX$$

在(4)式的情形中, 它化为:

$$\int G(X) dX = \int F(\eta) d\eta = E(\eta)$$

因为物理上的原因, 它在两个极限处等于零, 所以 $K=0$, (6)式中附加的项为零。在現在的情形, $f(Y)$ 是一个常数, 因为

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-Y^2} dY}{Y-X} = -\pi X$$

于是立刻得到(4)式的解。相应的解也可以得到。如果(4)式的右边代以一个有限的多项式, 使高阶次的解即容易得出而不必对其形式做各种猜测。

在这里这些表达式的细节与我們无关, 重要的是了解通过简单的变量变换可以将(3)式化为(5)式的特例。奇异积分方程各种形式的經常出現是这方法可推广到較广的形状的关键。

III. 非对称的电容带

除了所要計算的未知量是帶上的电流而不是孔径的場以外, 可以按照与前例相似的方法建立积分方程(在膜片的情形中, 如所用的是电流而不是孔径的場, 可以得到一个相似形式的表达式)。准静态积分方程可以写成这样的形式^[2]

$$x + C = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int \sin(\pi x/b) \cos(\pi \xi/b) I(\xi) d\xi \quad (8)$$

其中 C 是一常数, $I(\xi)$ 与帶中的未知电流成比例, x 和 ξ 都在帶內。

用(2)式求和并令 $\cos(\pi x/b) = X$, $\cos(\pi \xi/b) = Y$, $I(\xi) d\xi = F(Y) dY$, 这方程式变为:

$$C + \frac{b}{\pi} \cos^{-1} X = \int \frac{F(Y) dY}{\sqrt{1-X^2}} \quad (9)$$

(7)式改换变量, 立刻簡化为(5)式的形式, 除了积分比較麻煩外, 可以求得解。在这問題中的积分常数可以令帶边缘处的电场为零求得。

在原来的文章^[2]中, (8)式是先假设 $I(\xi)$ 是一个无限的富里叶級数, 通过 Schwinger 变换解出的, 最后求和就得出与(9)式的解相同的結果。细节及最后的积分, 請看参考文献。

这里需要注意的一点是在(9)式中奇异积分方程再次出现,虽然它比在(4)式中的形式较为复杂。

IV. 有铁氧体的波导

这装置包括一个矩形波导,在 $-\infty < z < 0$ 处填以介电常数为 ϵ 的介质,在 $0 < z < \infty$ 处填以横向磁化了的铁氧体。这装置所引起一些情况比简单的反射波和传输波更复杂的原因是铁氧体导磁率张量使磁场的分布与单纯波导中的不同。因此在边界的两侧需要无限序列的模式以满足连续条件,其细节可参阅 Sharpe 和 Heim 的文章^[7]。在 Lewin^[3]的文章中所推得的积分方程的形式是:

$$C = MF(Y) + \frac{jK}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(X)}{X-Y} dX \quad (10)$$

其中 C , M 和 K 是常数而 $F(x)$ 则与接头处铁氧体面上的场有关。

这是一个奇异积分方程,但与(5)式的形式不同,在参考文献中,一部分是根据猜测求解的,但它是 Carleman 方程^[8]

$$a(x)\phi(x) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{\phi(y)}{y-x} dy = f(x) \quad (11)$$

的特例,它的解是:

$$\phi(x) = \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) + \lambda^2\pi^2} + \frac{\lambda e^{\tau(x)}}{\sqrt{a^2(x) + \lambda^2\pi^2}} \times \left[\int_{-1}^1 \frac{e^{-\tau(y)}f(y)}{\sqrt{a^2(y) + \lambda^2\pi^2}} \frac{dy}{y-x} + \frac{c}{1-x} \right] \quad (12)$$

其中:

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta(t)}{t-x} dt, \quad \theta(t) = \tan^{-1} \frac{\lambda\pi}{a(t)}$$

所包含的一切积分都是主值。

方程式(12)中包括了(5)式,它是 $a(x)=0$ 的特例。方程式(10)是 $a(x)=M$, $f(x)=C$ 的特例。更高阶模式的解以简单的多项式代换 C ,解的性质不变。

过去部分用猜测法虽然已得到解,但本文是环绕着建立显式(11)和它的解(12)并以(5)式和(6)式作为特例而写的。下面是这种方法应用于几种新结构的情况。

V. 具有电感膜片并有铁氧体负载的波导

虽然在第IV节中有铁氧体负载的波导的解是一个十分艰巨的工作,但把它与一个电感膜片合在一起,实际上并不增加很多困难。其装置示于图2。

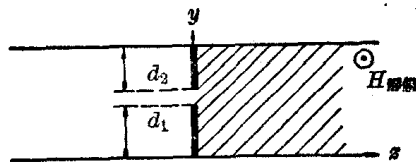


图2 有铁氧体负载的波导中的电感膜片

膜片位于铁氧体表面上。

如果把边界处金属膜片加入并重复建立积分方程的过程,可以看出这种变更所引入的变化只是使积分的范围和积分方程的独立变量的范围缩减到新的孔径上,因此新的方程是:

$$C = MF(y) + j \frac{K}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(x)}{x-y} dx \quad (13)$$

其中 $-C=1+KX$,并且归一化的电抗 X 是

$$jX = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} y F(y) dy \quad (14)$$

这些形式取自 Lewin^[3]的文章。此外 $F(y)$ 必须满足

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(y) dy = 0$$

如果 d_1 和 d_2 是插入的膜片,则 α 和 β 的值由 $-\cos(\pi d_2/a)$ 和 $\cos(\pi d_1/a)$ 给出。变换式(7)给出新的极限(1, -1)并且

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dx'}{x'-y'}$$

因此这方程不变更地转换为(10)式而最后唯一的改变是(14)式中的 jX 乘了一个因子 $f^2 = \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2$,这是因为在改变变量时 $y dy$ 所提供的。从 Lewin^[3]的(33)式我们得到方程:

$$X = -\frac{4C}{K} p(1-p)f^2 \text{ 而不是 } -\frac{4C}{K} p(1-p)$$

它连同 $-C=1+KX$ 最后给出

$$X = -\frac{1}{K} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{f^2 L^2 + \pi^2 (f^2 - 1)} \right\} \quad (15)$$

式中

$$L = \frac{1}{\pi} \log \frac{K+M}{K-M}$$

(参见 Lewin^[3]的(35)式)。因子 f 可以写成 $\sin(\pi d/2a) \sin(\pi y_0/a)$ 的形式,其中 $d=a-d_1-d_2$ 为孔的大小,而 $y_0 = \frac{1}{2}(a+d_1-d_2)$ 是其中心的坐标。当 $f=1$ (无插入膜片)时方程式(15)化为 Lewin^[3]的(35)式,当 $f=0$ (膜片横跨波导全部)时,它给出 $X=0$ 。

VI. 矩形波导的分隔(H平面)

图3表示H平面分隔的矩形波导,这里两个宽

度为 a 的波导在 $z=0$ 处合成一个宽度为 $2a$ 的波导。

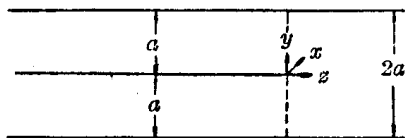


图3 H平面分隔的矩形波导

这装置的最简单的形式可以用 Wiener-Hopf 的方法^[8]严格地求解。这里用准静态积分方程的方法来处理它的原因是它的几种可能的变形只能用后一种方法来解决。在接头的两边可以用不同的电介质,也可以在那里放置膜片或带或是两者同时并用。这些变形不在 Wiener-Hopf 处理方法之内,然而它们各有它们自己的应用领域,例如不相等的波导分隔。在图3的简单装置中,两种处理方法恰巧重合。

图3可以存在两个基本的模式,即对称的和反对称的。用任何方法从左方向两波导输入,可以分解为两者之和,此外因为反对称模式正是宽波导中固有的二阶模式,在接头处的场没有改变——场传播而无反射。

因此只有对称的模式需要考虑,我们把注意力集中在图的上部, $0 < y < a$,

对于 $z < 0$, 我们有:

$$E_x = (e^{-jk'z} + Re^{jk'z}) \sin(\pi y/a) + \sum_{n=2}^{\infty} R_n e^{\gamma_n z} \sin(n\pi y/a) \quad (16)$$

$$Z_0 H_y = (e^{-jk'z} - Re^{-jk'z}) (k'/k) \sin(\pi y/a) + j \sum_{n=2}^{\infty} R_n (\gamma_n/k) e^{\gamma_n z} \sin(n\pi y/a) \quad (17)$$

式中 $Z_0 = 120 \pi$, $k' = 2\pi/\lambda_g$ 及对于大的 n 值

$$\gamma_n = \sqrt{n^2 \pi^2/a^2 - k^2} \sim n\pi/a$$

反射系数 R 和模式的振幅 R_n 仍是待定的。

对于 $z > 0$, 记住对称输入,

$$E_x = T_1 e^{-jK'z} \cos(\pi y/2a) + \sum_{m=1}^{\infty} T_{2m+1} e^{-\Gamma_{2m+1} z} \cos((2m+1)\pi y/2a) \quad (18)$$

$$Z_0 H_y = T_1 (K'/k) e^{-jK'z} \cos(\pi y/2a) - j \sum_{m=1}^{\infty} T_{2m+1} (\Gamma_{2m+1}/k) e^{-\Gamma_{2m+1} z} \cos((2m+1)\pi y/2a) \quad (19)$$

这里 $K' = 2\pi/\lambda_g$ 而 $\lambda_g = \lambda/\sqrt{1 - (\lambda/4a)^2}$ 及当 m 很大时

$$\Gamma_{2m+1} = \sqrt{(2m+1)^2 \pi^2/4a^2 - k^2} \sim (2m+1)\pi/2a$$

如果 $E(\pi y/a)$ 是开孔 ($0 < y < a$) 中尚未未知的场,则各种模式的振幅可用它表示如下:

$$1 + R = \frac{2}{a} \int_0^a E(\pi y/a) \sin(\pi y/a) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi E'(\theta) \cos \theta d\theta \quad (20)$$

令 $\pi y/a = \theta$ 并用分部积分(积出的部分在两个极限处为零,因为在金属边缘处切向电场为零)。同理,

$$R_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi E'(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (21)$$

$$T_{2m+1} = \frac{-4}{\pi(2m+1)} \int_0^\pi E'(\theta) \sin((2m+1)\theta/2) d\theta \quad (22)$$

这些值可以代入(17)式和(19)式。我们把 γ_n 和 Γ_{2m+1} 改换为它们的主要形式和一个余项,令 $\pi y/a = \phi$ 为 θ 的余变数,用(2)式求和并进行一些项的简化。表示开孔处切向磁场为连续的方程可以在 $0 < y < a$ 时令(17)式等于(19)式求得。

$$A \sin \phi + B \cos(\phi/2) = \int_0^\pi \frac{E'(\theta) \cos(\phi/2) d\theta}{2[\sin(\theta/2) - \sin(\phi/2)]} + S \quad (23)$$

式中

$$A = -\frac{1}{2} j k' a (1 - R) - \int_0^\pi E'(\theta) \cos \theta d\theta$$

$$B = (1 - j 2a K'/\pi) \int_0^\pi E'(\theta) \sin(\theta/2) d\theta$$

S 是一个余项,它给出高阶模式衰减常数与其准静态值之差的影响。

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2a \Gamma_{2m+1}}{\pi(2m+1)} - 1 \right) \times \int_0^\pi E'(\theta) \sin((2m+1)\theta/2) \cos((2m+1)\phi/2) d\theta - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a \gamma_n}{n\pi} - 1 \right) \int_0^\pi E'(\theta) \sin(n\phi) \cos(n\theta) d\theta \quad (24)$$

欲求(23)式的准静态近似解可略去 S 并改换变量,

令 $\sin(\theta/2) = \frac{1}{2}(1+x)$, $\sin(\phi/2) = \frac{1}{2}(1+y)$ 。消去(23)式中的公共因子 $\cos(\phi/2)$ 并令 $E'(\theta) d\theta = F(x) dx$, 即变为:

$$A(1+y) + B = \int_{-1}^1 \frac{F(x) dx}{x-y} \quad (25)$$

这是(5)式的形式,其解为:

$$F(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} [C + \pi x (A + B + Ax)] \quad (26)$$

为了决定 C , 我们注意

$$\int_{-1}^1 F(x) dx = \int_0^\pi E'(\theta) d\theta = E(\pi) - E(0) = 0$$

因为 E 在极限处为零。所以最后

$$F(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[Ax^2 + (A+B)x - \frac{1}{2} A \right] \quad (27)$$

* 原文漏掉 a ——译者注

从(20)式連同定义 A 和 B 的两式,我們得到三个关系,于是可以消去 A 和 B 。它們給出接头处的归一化的准静态阻抗表示式如下

$$Z = \frac{1+R}{1-R} = j \frac{k'a}{\pi} \frac{35\pi + j2K'a}{13\pi + j30K'a} \quad (28)$$

如果从左方只饋給一个波导,我們必須增加一个单位振幅的反对称模式以消去另一波导中的波。因此入射模式的振幅现在是 2,于是在这情形中相对反射系数是 $\frac{1}{2}R$, R 仍由(28)式給出。

保留(24)式中級数的最初各項,可以使(28)式得到改进,于是与零显著偏离的头一项是 Γ_3 中的項,如果我們保留它,(25)式扩大为

$$A(1+y) + B + C(y^2 + 2y) = \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{x-y} dx \quad (29)$$

其中:

$$C = A_3 \int_0^\pi E'(\theta) \sin(3\theta/2) d\theta \quad A_3 = \frac{2a\Gamma_3}{3\pi} - 1$$

(29)式的适宜的解是:

$$F(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left\{ Cx^3 + (A+2C)x^2 + \left(A+B - \frac{1}{2}C \right)x - \left(\frac{1}{2}A+C \right) \right\} \quad (30)$$

如果把它代入(20)式及定义 A 、 B 和 C 的表示式中并消去后者,即出現与(28)式相似的一个方程,其中微少量 $d = 34_3/(64 + 28A_3)$ 指出与(28)式偏离的量子級。

$$\frac{1+R}{1-R} = j \frac{k'a}{\pi} \frac{35\pi + j2K'a - d(119\pi + j18K'a)}{13\pi + j30K'a + d(135\pi - j14K'a)} \quad (31)$$

把不同的电介质包含在解之內是一件容易的事,因此,如果左边的波导的介电常数为 ϵ 而不是一直所假设的 1,則除了 k' 变为 $(2\pi/\lambda)\sqrt{\epsilon - (\lambda/2a)^2}$ 及 γ_n 变为 $\sqrt{n^2\pi^2/a^2 - k'^2\epsilon}$ 以外,(16)和(17)式仍成立。除此之外,这个分析不改,并且所得結果(28)或(31)式对于常数的新值仍是有效的。同理,右边的电介质也可以改变。

另一种可以沒有太多的困难而类似地求解的结构是在分隔波导的接头处有一膜片的结构。为了保持对称,在下边一半的膜片是上边的鏡象。在不同的波导中放入任意电介质的情况也并不复杂。

膜片的影响首先在(20)式中出现,在那里积分限变为象 V 节中的形式。其解直接导致(25)式但改变了极限。用(7)式改换变量又把范围恢复到 $(-1, 1)$ 并可按以前求解。然而这里我們不再进一步探討此事,因为第 V 节中給出的实例是用这种方法求解

的典型。

VII. 电感性膜片和带

作为更进一步的一例,我們研究矩形波导中含有一个由对称的膜片及中間一个带所組成的障碍物。只研究电感性的情形,因为电容性的情形可以用影象法从一个非对称电容性带的已知結果^[2]求得。

装置示于图 4。显然那里有两个孔径和三个金属障碍物,因此,看作两孔或三个障碍物都可以。为了使問題簡化成只含一个未知的函数,我們注意到由于对称性,一个开孔分布函数就够了,它对每个开孔都是一样的。因此我們从这个观点建立方程式。和前一节一样,我們可以允許在不連續处的两边有不同的电介质,但这是不必要的。

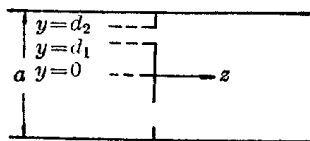


图 4 矩形波导中的电感性膜片和带

在障碍物左边的場可写为:

$$E_x = (e^{-jk'z} + Re^{jk'z}) \cos(\pi y/a) + \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n+1} e^{\gamma_{2n+1}z} \cos(\overline{2n+1} \pi y/a) \quad (32)$$

$$Z_0 H_y k = k' (e^{-jk'z} - Re^{jk'z}) \cos(\pi y/a) + j \sum_{n=1}^{\infty} R_{2n+1} \gamma_{2n+1} e^{\gamma_{2n+1}z} \cos(\overline{2n+1} \pi y/a) \quad (33)$$

其中对于大的 n 有

$$\gamma_{2n+1} = \sqrt{(2n+1)^2 \pi^2/a^2 - k'^2} \sim (2n+1) \pi/a$$

右边也可以得到一个相似的形式,所不同的是 E_x 的第一項是 $(1+R)e^{-jk'z} \cos(\pi y/a)$,其大小是从边界两侧 E_x 相等来的。指数中 z 的符号相反,这也改变了 H_y 的級数中 j 的符号。因为装置的对称性,只有奇次模式在各个和中出現。

如果上面开孔的場用 $E(\pi y/a)$ 表示,則經過改換变量及分部积分,由富里叶分析給出

$$1+R = \frac{4}{a} \int_{d_1}^{d_2} \cos(\pi y/a) E(\pi y/a) dy = -\frac{4}{\pi} \int_{\pi d_1/a}^{\pi d_2/a} E'(\theta) \sin \theta d\theta \quad (34)$$

和以前一样,由于插入金属在边缘处的 E 的物理条件,积出的部分在极限处为零。

同样地对于高阶模式的系数

$$R_{2n+1} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \int_{\pi d_1/a}^{\pi d_2/a} E'(\theta) \sin(\overline{2n+1} \theta) d\theta$$

将边界两边的切向磁场列为等式所得到的方程可写成:

$$ak'R \cos \phi = -4j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \gamma_{2n+1}}{\pi(2n+1)} \times \int E'(\theta) \sin(2n+1)\theta \sin(2n+1)\phi d\theta \quad (35)$$

其中积分和变量 $\phi = \pi y/a$ 的范围是上边的孔径 $\pi d_1/a$ $a \leq \phi$, $\theta \leq \pi d_2/a$ 。从问题的对称性,波导的下半部也保持正确的条件。现在

$$\frac{\alpha \gamma_{2n+1}}{\pi(2n+1)} = 1 - \delta_{2n+1}$$

其中当 n 的值很大时, $\delta \rightarrow 0$ 。对于准静态解,我们完全忽略 δ (和前面一样,如果保留开始的几项以得到较好的解)。

在每一边加上级数的第一项。求和并简化,则(35)式可写成:

$$A \cos \phi = \int_{\pi d_1/a}^{\pi d_2/a} \frac{E'(\theta) \sin \theta \cos \phi d\theta}{\cos 2\phi - \cos 2\theta} \quad (36)$$

式中

$$A = j a k' R/4 + \int_{\pi d_1/a}^{\pi d_2/a} E'(\theta) \sin \theta d\theta \quad (37)$$

解这方程式时,令 $\cos 2\phi = \alpha + \beta x$, $\cos 2\theta = \alpha + \beta y$, 和 $E'(\theta) \sin \theta d\theta = \beta F(y) dy$, 消去 $\cos \phi$ 因子, (36)式变为:

$$A = \int_{-1}^1 \frac{F(y) dy}{y-x}, \text{ 假如}$$

$$\alpha + \beta = \cos(2\pi d_1/a) \text{ 和 } \alpha - \beta = \cos(2\pi d_2/a) \quad (38)$$

这一积分方程的解是:

$$F(y) = \frac{A}{\pi \sqrt{1-y^2}} (y+C) \quad (39)$$

为了决定 C , 我们注意到, 由于 $E(\theta)$ 在极限处为零,

$$0 = \int_{\pi d_1/a}^{\pi d_2/a} E'(\theta) d\theta = -\beta \int_{-1}^1 \frac{F(y) dy}{\sin \theta}$$

$$\text{因此 } \int_{-1}^1 \frac{y+C}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-\alpha-\beta y}} dy = 0 \quad (40)$$

从这个关系求 C 参见附录 I。

现在我们可以从(34)和(37)式计算孔径的反射从而求得代表不连续性的归一化以后的电抗 X 。用 C 表示, 我们得

$$X = -\frac{a}{\lambda_g} \frac{\beta C}{1+\beta C}$$

这一关系可以写成不同的形式, 也许最简单的是

$$X = \frac{a}{\lambda_g} \left\{ -1 + \frac{K}{2 \sin^2(\pi d_2/a) E + [\cos^2(\pi d_2/a) - \sin^2(\pi d_1/a)] K} \right\} \quad (41)$$

其中完全椭圆函数 K 和 E 的模由下式得出

$$k = \sqrt{1 - \sin^2(\pi d_1/a) \operatorname{cosec}^2(\pi d_2/a)} \quad (42)$$

这可以与 Lewin^[6]的结果相比, 当 $d_2 = \frac{1}{2}a$ 时此式即简化成该式。

VIII. 非对称 H 平面阶梯

图 5 表示一个波导从 $z = -\infty$ 到 $z = 0$ 填以 ϵ_1 , μ_1 (相对值) 的介质。在 $z = 0$ 处, $y = a$ 的波导跃变成宽度为 $2a$ 的波导 ($z > 0$)。这一区域填以 ϵ_2 , μ_2 的介质。一个电场为 $E_x = e^{-jk'z} \sin(\pi y/a)$ 的波从左边入射, 其传播常数为

$$k' = k(\epsilon_1 \mu_1 - \lambda^2/4a^2)^{1/2} \quad (43)$$

$z > 0$ 时可以传播的模式与 ϵ_2 和 μ_2 的值有关。特别是当两个介质相同时, 至少有两个模式, 主要模式和第二模式能在较宽的波导中传播。它们的形式分别为:

$$e^{-jK'z} \sin(\pi y/2a) \text{ 和 } e^{-jK''z} \sin(\pi y/a)$$

其中: $K' = k(\epsilon_2 \mu_2 - \lambda^2/16a^2)^{1/2}$

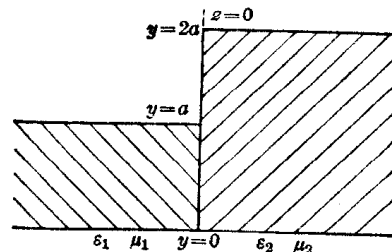


图 5 矩形波导 H 平面截面及介质改变

$$K_2 = k(\epsilon_2 \mu_2 - \lambda^2/4a^2)^{1/2} \quad (44)$$

当两个介质相同时, K_2 与 k' 相同。

为了处理最普遍的情形, 必须考虑在 $z > 0$ 时对这两个模式的负载。如果第二波导完全匹配的, 对任一模式都没有反射。一般是有反射的, 其振幅为 R'_1 及 R'_2 , 相位则与反射负载的位置有关。如果这些负载是指 $z = 0$ 的平面而言, 我们可以定义导纳

$$Y_1 = (1 - R'_1)/(1 + R'_1)$$

及

$$Y_2 = (1 - R'_2)/(1 + R'_2) \quad (45)$$

它们确定反射的影响。这些导纳与第二波导中的波导纳有关, 有关导纳是各模式的导纳。

现在可以建立电场和磁场的方程式。对于 $z < 0$ 时我们有:

$$E_x = (e^{-jk'z} + R e^{jk'z}) \sin(\pi y/a) + \sum_n R_n e^{j\gamma_n z} \sin(n\pi y/a) \quad (46)$$

$$\mu_1 k Z_0 H_y = k' (e^{-jK'z} - R e^{jK'z}) \sin(\pi y/a) + j \sum_n R_n \gamma_n e^{\gamma_n z} \sin(n\pi y/a) \quad (47)$$

其中当 n 很大时,

$$\gamma_n = (n^2 \pi^2 / a^2 - k^2 \epsilon_1 \mu_1)^{1/2} \sim n\pi/a \quad (48)$$

对于 $z > 0$,

$$\begin{aligned} E_x = & \frac{T_1}{1+R_1'} (e^{-jK'z} + R_1' e^{jK'z}) \sin(\pi y/2a) \\ & + \frac{T_2}{1+R_2'} (e^{-jK'z} + R_2' e^{jK'z}) \sin(\pi y/a) \\ & + \sum_n T_n e^{-\Gamma_n z} \sin(n\pi y/2a) \quad (49) \\ \mu_2 k Z_0 H_y = & \frac{K' T_1}{1+R_1'} (e^{-jK'z} - R_1' e^{jK'z}) \sin(\pi y/2a) \\ & + \frac{K_2 T_2}{1+R_2'} (e^{-jK'z} - R_2' e^{jK'z}) \sin(\pi y/a) \\ & - j \sum_n T_n \Gamma_n e^{-\Gamma_n z} \sin(n\pi y/2a) \quad (50) \end{aligned}$$

其中, 对于大的 n

$$\Gamma_n = (n^2 \pi^2 / 4a^2 - k^2 \epsilon_2 \mu_2)^{1/2} \sim n\pi/2a \quad (51)$$

在把方程式表成这样形式时已写出了头两个模式的系数以便充分表现第二波导中负载的影响。所以 T_1 就是在主模式没有失配时的传输系数。

在 $z=0$ 处, 对于 $0 < y < a$ 取电场为 $E(\pi y/a)$, 对于 $a < y < 2a$ 取电场为零。在 $y=0, a$ 时在金属壁上它是零。除此之外, E 的形式仍未定。取一个假积分变量 η 代替 y 将是方便的, 并且也把变量从 $\pi\eta/a$ 改为 θ , $\pi y/a$ 改为 ϕ 。然后各个系数可以用富里叶分析用未知量 E 表示出来。例如,

$$1+R = \frac{2}{a} \int_0^a E(\pi\eta/a) \sin(\pi\eta/a) d\eta$$

如果我们用分部积分, 令积出的部分为零, 因为在极限处 E 是零。如上所述把 η 改为 θ , 我们得:

$$1+R = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi E'(\theta) \cos \theta d\theta \quad (52)$$

同样地

$$R_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi E'(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (53)$$

和

$$T_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi E'(\theta) \cos \frac{1}{2} n\theta d\theta \quad (54)$$

把这些值代入磁场的方程式中, 令 $z=0$, 将开孔上两个场写成等式得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \pi \mu_2 k' (1-R) \sin \phi \\ & + j \sum_n \mu_2 (\gamma_n/n) \int_0^\pi E'(\theta) \cos n\theta d\theta \cdot \sin n\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \mu_1 K' Y_1 \sin \frac{1}{2} \phi \int_0^\pi E'(\theta) \cos \frac{1}{2} \theta d\theta \\ & + \frac{1}{2} \mu_1 K_2 Y_2 \sin \phi \int_0^\pi E'(\theta) \cos \theta d\theta \\ & - j \sum_n \mu_1 (\Gamma_n/n) \int_0^\pi E'(\theta) \cos \frac{1}{2} n\theta d\theta \\ & \times \sin \frac{1}{2} n\phi \quad (55) \end{aligned}$$

为了得到准静态方程我们现在用 $n\pi/a$ 代替 γ_n , 用 $n\pi/2a$ 代替 Γ_n 。如果需要, 可以保留有限数目的前面的一些项, 实际上对第二阶模式已这样做了, 它在这问题中正好是一个传播的模式。把这级数向下推展到 $n=1$ (利用增项及减项法) 并用下式求和

$$\sum_1^\infty \cos(nu) \sin(nv) = \frac{1}{2} \sin v / (\cos u - \cos v)$$

我们引入两个常数如下:

$$A = (j4/\pi^2) (j\pi + 2K'a Y_1) \int_0^\pi E'(\theta) \cos \frac{1}{2} \theta d\theta \quad (56)$$

$$\begin{aligned} B = & (-j8/\pi) [k'a(1-R)\mu_2/\mu_1 \\ & - \frac{1}{2}(1+R)(j\pi + K_2 a Y_2 + j\pi\mu_2/\mu_1)] \quad (57) \end{aligned}$$

将三角函数项用半角表示, 则(55)式变为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E'(\theta) \left[\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \theta - \sin \frac{1}{2} \phi} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \theta + \sin \frac{1}{2} \phi} \right] \\ & \cdot \left[\cos \frac{1}{2} \theta + \cos \frac{1}{2} \phi (1 + 2\mu_2/\mu_1) \right] d\theta \\ = & A \sin \frac{1}{2} \phi + B \sin \frac{1}{2} \phi \cos \frac{1}{2} \phi \quad (0 < \phi < \pi) \quad (58) \end{aligned}$$

现在 $E(\theta)$ 作为 θ 的函数可以认为是奇函数。在 $\theta=0$ 时, 它线性地趋于零。实际上另一问题, 一个馈以二阶模式的, 显然具有反对称特点的对称波导阶梯的问题, 通过沿中间电场为零的地方放一金属壁而变成现在的问题。所以在 $0 < \phi < \pi$ 时得到的(58)式实际上在 $-\pi < \phi < 0$ 时仍然成立。这也能够从这一点看出来: 如果利用 $E(\theta)$ 的对称特性把 ϕ 换为 $-\phi$, θ 换为 $-\theta$, 则方程式又转换为其本身。为了说明这个, 同时为了简化这方程式, 我们注意到如果只在左边的第二项中, 我们把 θ 写成 $-\theta$, 它变为第一项的形式, 但极限为 0 及 $-\pi$ 。因此左边变为:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi E'(\theta) \frac{\cos \frac{1}{2} \theta + \cos \frac{1}{2} \phi (1 + 2\mu_2/\mu_1)}{\sin \frac{1}{2} \theta - \sin \frac{1}{2} \phi} d\theta$$

它显然具有所说的对称特性。

最后我们再改换变量, 令 $x = \sin \frac{1}{2} \theta$, 及

$y = \sin \frac{1}{2} \phi$ (在这一节里 x 和 y 的用途不要和以前用作坐标相混)。我們引入一个函数 $F(x)$ 而不用 $E'(\theta)$, 于是 $E'(\theta)d\theta = F(x)dx$ 。

$1+2\mu_2/\mu_1$ 这个量此后将不断出現, 因此用 α^2 来表示,

$$\alpha^2 = 1 + 2\mu_2/\mu_1 \quad (\text{介质相同时} = 3) \quad (59)$$

方程式(58)变为:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(x)}{x-y} [(1-x^2)^{1/2} + \alpha^2(1-y^2)^{1/2}] dx \\ = Ay + By(1-y^2)^{1/2} \quad (-1 < y < 1) \quad (60)$$

連同附加的条件

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^\pi E'(\theta) d\theta = E(x) - E(0) = 0 \quad (61)$$

初看时, 方程(60)比简单的奇异积分方程要复杂得多。如果 α^2 的項不存在, 它将是一个以 $(1-x^2)^{1/2} F(x)$ 为未知的简单方程式。同样地, 如果 $(1-x^2)^{1/2}$ 的項不存在, 則除以 $(1-y^2)^{1/2}$ 后它将变成一个含 $F(x)$ 的简单方程。有两个任意函数的普遍方程式好象不能用已知的方法求解。然而特例(60)式及一些其它方程能用附录 II 中所述的方法求解。这里我們只引用最后的結果。方程式(60)的解(也滿足式(61))是:

$$F(x) = \frac{A \sec \pi\beta}{2(1+\alpha^2)} \left[X^\beta \left(\frac{2\beta}{1-x} - 1 \right) \right. \\ \left. + X^{-\beta} \left(\frac{2\beta}{1+x} - 1 \right) \right] \\ - \frac{B \operatorname{cosec} \pi\beta}{2(1+\alpha^2)} \left[X^\beta \left(x + 2\beta - \frac{2\beta^2}{1-x} \right) \right. \\ \left. + X^{-\beta} \left(-x + 2\beta - \frac{2\beta^2}{1+x} \right) \right] \quad (62)$$

其中

$$X = (1-x)/(1+x)$$

及

$$\beta = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\alpha) \quad (\text{介质相等时} = 1/3) \quad (63)$$

現在代入(56)式可以得到常数 A 和 B 之間的关系:

$$A = \frac{4B}{3\alpha} \frac{\beta(1-\beta)(1-2\beta)(1-j2K'aY_1/\pi)}{1-(1-2\beta)^2(1-j2K'aY_1/\pi)} \quad (64)$$

最后, 如果将这些結果代入(52)和(57)式, 結果得到 $(1-R)/(1+R)$ 的方程式, 即相对于第一波导中波导納的輸入導納

$$Y_{in} = \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{k'a} \left\{ Y_2 K_2 a + j\pi\alpha^2 \left[1 - \frac{9}{16\beta^2(1-\beta)^2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1-(1-2\beta)^2(1-j2K'aY_1/\pi)}{9-(1-2\beta)^2(1-j2K'aY_1/\pi)} \right] \right\} \quad (65)$$

在 $\mu_2 \gg \mu_1$ 的情形中, 它給出 $\beta \rightarrow \frac{1}{2}$ 及 $Y_{in} \sim 0$, 正如我們所預期的那样。

方程式(62)可以积分以得出孔徑上的电场, 因为

$$E(\theta) = \int_0^\theta E'(\theta) d\theta = \int_0^x F(x) dx \\ E(\theta) = \frac{A \sec \pi\beta}{1+\alpha^2} \left[\frac{X^{1-\beta} - X^\beta}{1+X} \right] \\ - \frac{B \operatorname{cosec} \pi\beta}{1+\alpha^2} \left[\frac{X^{1-\beta} - X^{1+\beta}}{(1+X)^2} \right. \\ \left. - \beta \frac{X^{1-\beta} - X^\beta}{1+X} \right] \quad (66)$$

在这当中我們必須取 $x = \sin \frac{1}{2} \theta$ 以得

$$X = \tan^2(\pi - \theta/4)$$

介质相同时, $\beta = \frac{1}{3}$, 而对于 $\mu_2 \gg \mu_1$, $\beta = \frac{1}{2}$, β 总是 X 的各个指数中最小的。因此靠近尖銳的角处 $\theta \rightarrow \pi$ 。可以看出电场随 X^β 或 $(\pi - \theta)^{2\beta}$ 变化。現在能用开孔的坐标 y 把它表示出来,

$$\text{当 } y \rightarrow a, E \sim (a-y)^{2\beta} \quad (67)$$

通过(63)式把指数用 α 表出, 亦即用 μ_1 和 μ_2 表出, 我們得

$$2\beta = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(1+2\mu_2/\mu_1)^{1/2} \quad (68)$$

介质相同时, 这个指数是 $\frac{2}{3}$ 。在从前这类問題的計算常常是用 Schwartz-Christoffel 变换把边界进行保角映射, 且其指数是因为考虑到在再入角处边界面的几何形状产生的。在另一方面, 方程式(68)把指数表示为电参数而这参数的值随介质的改变而改变。这結果似乎是新的。特别是当 $\mu_2 \gg \mu_1$, 第一波导开路, 方程式(68)給出 $2\beta = 1$, 相当于正常的正弦波导模式在波导壁处线性地趋于零。

IX. 应用范围

到目前已知現在的这方法只能用于矩形波导, 包括无限大的平行板装置。如障碍物是电感性的, 它也容許在边界处任一边改变介电常数。同样地当障碍物是电容性时, 它能适应介质的磁导率改变。但是, 有时候分析起来比較麻煩, 这方法能用于任何有限个数的饋入模式, 并能用来計算电场、反射系数、傳輸系数、或模式的轉換。保留有限个数的高次模式可以增加准静态的解, 有关积分方程的解并不因之而更为复杂。但是每一新的模式在解中引入一个常数, 若是保留太多的模式, 則消去这些常数是复杂

的。

这个方法尚未能成功地用于包含着不同尺寸的波导的情形,除非具有整数关系,也不能用于需要考虑到障碍物轴向伸展的情形。相信,至少第一个限制最终将被解除,但是它的成功要依靠新的方法来处理所引起的特殊类型的奇异积分方程。

附录 I

在方程(40)中令 $y = -\cos 2\theta$

$$0 = \int_0^{\pi/2} \frac{C-1+2\sin^2\theta}{\sqrt{1-\alpha+\beta-2\beta\sin^2\theta}} d\theta$$

全部乘以 $\sqrt{1-\alpha+\beta}$ 并令 $k^2 = 2\beta/(1-\alpha+\beta)$

$$0 = \int_0^{\pi/2} \frac{(C-1+2/k^2) - (1-k^2\sin^2\theta)2/k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta$$

其中

$$C = 1 + \frac{E-K}{\frac{1}{2}Kk^2} \text{ 模 } \sqrt{2\beta/(1-\alpha+\beta)}$$

简化各项后它导致文中的(41)和(42)式。

附录 II

按照 Tricomi^[6] 的方法,我们引入变换算子 T_y 对函数 $\phi(x)$ 进行运算,

$$T_y[\phi(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(x)}{x-y} dx \quad (69)$$

所要知道的是积分的主值。因为变数的混乱不太容易存在,我们将简写为 $T(\phi)$ 。方程式(60)是方程式

$$aT'(F) + T(bF) = f \quad (70)$$

的特例,其中

$$a = \alpha^2(1-y^2)^{1/2}, \quad b = (1-x^2)^{1/2} \\ f = Ay + By(1-y^2)^{1/2} \quad (71)$$

并遵从 $0 = \int_{-1}^1 F(x)dx$ 的条件,这是 $F(x)$ 为偶函数时(61)式的另一形式。增加一个电感膜片的类似问题,经过再归一化后将给出一个相似的方程式,但其中全部的根式都代以 $[1-(C+dy)^2]^{1/2}$ 。在(70)式没有通解的情形下,这一问题至今不能解决。然而方程式(70)能在许多特殊情形下求解,包括 $a=b$, $ab=C(1-x^2)$ 和其他许多特殊情形。但是这里我们只集中在得出我们手中的问题的解的分析上。

Tricomi 给出一些有用的结果。一个积分定理是

$$T[\phi_1 T(\phi_2) + \phi_2 T(\phi_1)] = T(\phi_1)T(\phi_2) - \phi_1\phi_2 \quad (72)$$

$T(\phi) = \psi$ 的解是:

$$\phi = (1-y^2)^{-1/2} \{ -T_y[(1-x^2)^{1/2}\psi(x)] + C \} \quad (73)$$

其中 C 是一常数。

Carleman 的方程

$$a(x)\phi(x) - T_x[\phi(y)] = g(x)$$

的解是

$$\phi(y) = \frac{a(y)g(y)}{1+a^2(y)} + A(y) \left\{ T_y \left[\frac{e^{-\tau(x)}g(x)}{[1+a^2(x)]^{1/2}} \right] + \frac{C}{1-x} \right\} \quad (74)$$

其中

$$\tau(x) = T_x[\tan^{-1}1/a(y)]$$

及

$$A(x) = e^{\tau(x)}[1+a^2(x)]^{-1/2}$$

我们回到(70)式,用这些公式并且问如果可以,在甚么情形下,它可以简化为已经知道解的 Carleman 方程的一个例子。

让我们从方程式

$$cF + eT(dF) = h \quad (75)$$

开始,其中 c, d, e 和 h 是随我们选择的函数。用 T 运算并以(72)式把 $T[eT(dF)]$ 用其他项表示,我们得:

$$T(h) = T(cF) - edF + T(e)T(dF) - T[dFT(e)] \quad (76)$$

让我们选择 $T(e) = K$, K 是一个常数,从(73)式

$$e = K(x-C)(1-x^2)^{-1/2} \quad (77)$$

其中的 C 仍然是任意的。

然后(76)式简化为:

$$T(h) = T(cF) - edF \quad (78)$$

从(75)和(78)式,消去未变换的 F 项,

$$T(h) + edh/c = T(cF) + (e^2d/c)T(dF) \quad (79)$$

选择 $c = x-C$, $d = (1-x^2)^{1/2}$, 使 $ed/c = K$ 。现在

$$T(cF) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x-C}{x-y} F(x)dx \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x-y+y-C}{x-y} F(x)dx \\ = (y-C)T(F)$$

因为根据式(61)

$$\int_{-1}^1 F(x)dx = 0$$

令 $K = 1/\alpha$ 并且把这些结果代入(79)式最后得:

$$\alpha^2(1-y^2)^{1/2}T(F) + T[(1-x^2)^{1/2}F] \\ = \frac{\alpha^2(1-y^2)^{1/2}}{y-C} [T(h) + h/\alpha] \quad (80)$$

如果我们这样选择 h 使

$$T(h) + h/\alpha = \alpha^{-2}(y-C)(1-y^2)^{-1/2}f(y) \quad (81)$$

则(80)式变成与(70)和(71)式等同。

用(81)式给出的 h , 从(78)式

$$T[(x-C)F] - (y-C)F/\alpha = \frac{1}{2}[T(h) - h/\alpha] + \frac{1}{2}\alpha^{-2}(y-C)(1-y^2)^{-1/2}f(y)$$

如果我們令 $(y-C)F(y) = \frac{1}{2}H(y) + \frac{1}{2}h(y)$, 則 H 由

$$T(H) - H/\alpha = \alpha^{-2}(y-C)(1-y^2)^{-1/2}f(y) \quad (S2)$$

得出, 此式与 (81) 式的差别只在于 α 的符号不同。这两个方程式都是 Carleman 的形式, 能解出 h 和 H , 并且 $F(y)$ 用它們表示为

$$F(y) = \frac{H(y) + h(y)}{2(y-C)} \quad (83)$$

在写出它的解时, 显然这积分在 $x=1$ 时是发散的, 除非令常数 C 等于 1。这个特点决定了这常数且解所取的形式是:

$$F(y) = \frac{1}{2\alpha(1-y)(1+\alpha^2)} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{X^{\beta-1/2}}{y-x} f(x) dx + Y^{\beta} \int_{-1}^1 \frac{X^{1/2-\beta}}{y-x} f(x) dx \right\} \quad (84)$$

其中 $Y = (1-y)/(1+y)$ 和 X 是 x 的类似的函数。常数 β 与 α 的关系是 $\beta = (1/\pi) \tan^{-1} \alpha$ 。有鉴于在 $y=1$ 时对 $F(y)$ 的可积性的要求, 在这問題中不出現沿 (74) 式指出的途徑的余函数。

当 X 被当做一个新变数时, (84) 式中的积分是简单的。如果我們写成

$$y_n = \int_0^{\infty} X^p (1+X)^{-n} dX$$

則 $y_1 = -\pi \operatorname{cosec} \pi p$, 并很容易得出循环关系 $y_n = y_{n-1}(n-2-p)/(n-1)$ 。积分

$$\int_0^{\infty} \frac{X^p}{X-Y} dX = -Y^p \pi \cot \pi p$$

这里取 $\xi = X/Y$ 为新变数。当 $f(x)$ 是 (74) 式特定的形式和适当地选择 p 时, 这些結果足够积分 (84) 式。

很容易验证 $\int_{-1}^1 F(x) dx$ 是零, 这証明不存在任何其它余函数。

在决定 A 和 $1+R$ 的积分式中包括积分

$$x_n = \int_0^{\infty} X^p (1-X)^n (1+X)^{-n-2} dX$$

可以証明它滿足

$$(n+1)x_n + 2px_{n-1} - (n-1)x_{n-2} = 0$$

x_0 和 x_1 容易用前节中的 y_2 和 y_3 表示, 从而得出 x_n 的值。

最后, 原文中 $F(x)$ 的 (62) 式是由併項得到的。用积分法求 $E(\theta)$ 是简单的。

当 (70) 式具有完全任意的函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 时, 它的解尚不能用这方法求出, 可能在这普遍的情形中需要更有力的数学工具。特别是当根式是有膜片存在时的更复杂的形式时, 尚未能找到解, 除非在 $\alpha=1$ ($\mu_2=0$) 这个很特殊的情况下。

参 考 文 献

- [1] N. Marcuvitz, "Waveguide Handbook" M. I. T. Rad. Lab. Ser., McGraw-Hill Book Co. New York, N. Y., p. 147, 1951.
- [2] L. Lewin, "The impedance of unsymmetrical strips in rectangular waveguides" Proc. IEE, Vol. 99, pt. 4, pp. 168~176, Monograph No. 29: 1952.
- [3] L. Lewin, "A ferrite boundary value problem in a rectangular waveguide" Proc. IEE. Vol. 106, pt. B, pp. 559~563; November, 1959.
- [4] Marcuvitz, op. cit., p. 156.
- [5] L. Lewin, "Advanced Theory of Waveguides" Iliffe and Sons, London, England, p. 47; 1951.
- [6] F. G. Tricomi, "Integral Equations" Interscience Publishers, New York, N. Y., pp. 173~188; 1957.
- [7] C. B. Sharpe and D. S. Heim, "A ferrite boundary value problem in a rectangular waveguide" IRE Trans. Vol. MTT-6, pp. 42~46; January, 1958.
- [8] Marcuvitz, op. cit., p. 383.

(杜連耀譯)

2. 微波功率測量技術綜述

G. F. Engen

«P. I. E. E.» Part B Supplement, No. 23, Vol. 109, 1961, pp. 734~739 (英文)

(1) 引言

在射频频譜的微波部分，电压和电流的較低频率的概念失去了它們大部分的實際意义，而功率測量起着較为重要的作用。

輻射热測量技術广泛地用在微波功率的低电平測量方面，并以极大的努力来改进这种技术。实际上，測輻射热計或热敏电阻包括在波导結構或測輻射热計架中，架則端接于波导系統。測輻射热計是这样安置的：它既能耦合微波能源，也能耦合直流能源，并且常以固定的电阻值工作。这样，測輻射热計架的阻抗就不会随功率电平而变化，因而无需进行繁复的修正。同时也不需要准确地知道測輻射热計的电阻律（电阻与功率的函数关系）。使測輻射热計作为威斯登电桥的一臂可以达到固定电阻的工作状态。电桥的参量是这样选定的：当測輻射热計加热到它的額定工作电阻时，电桥平衡。

工作时，測輻射热計电桥首先由直流或音频电流供給能量，加热測輻射热計达到它的工作电平（由一个合适的电桥零点探测器指示）。損耗在測輻射热計上的直流功率或音频功率则由适当的輔助仪表确定。关于这个概念的一个可能的具体例子如图1所示。如果調节电流使电桥平衡，則損耗在这个装置中測輻射热計的功率为：

$$p = \frac{r}{4} i^2$$

如果再在測輻射热計上加微波功率，因为微波能量的加热作用，要維持电桥的平衡，就应减小这个电流。直流功率的差为：

$$P = \frac{r}{4} (i_1^2 - i_2^2) \quad (1)$$

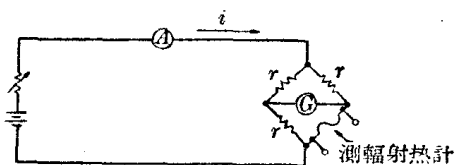


图1 測輻射热計电桥的基本电路

式中 i_1 和 i_2 是微波功率加入前后总的平衡电桥电流， r 是桥臂电阻。如果直流和微波功率对改变測輻射热計电阻等效的話，直流偏功率的这个差就等于測輻射热計吸收的微波功率。实际上，因为两种情况的空間电流分布、功率損耗和温度是不同的，所以这个假定只能近似地滿足。这种近似計算可以看作直流射频代替誤差，是測輻射热技术的主要問題之一。

还有第二个重要問題。因为輻射热測量技术充其量也只能測量損耗在測輻射热計中的微波功率。而实际上，我們常須知道整个測輻射热計架吸收的功率，而且有些能量还損耗在介质支架和金属表面等上。根据定义，測輻射热元件吸收的微波功率和整个測輻射热計架吸收的功率之比为測輻射热計架的效率。

最后，如果測輻射热計架沒有以傳輸綫的特性阻抗来端接傳輸綫，部分入射功率将会反射。实际上，如果要求准确的結果，常应考虑这个反射信号。

因之，要描述的輻射热測量技术的改进方面有下列几部分：

- 以改善的准确度来測量測輻射热計的或代替的直流偏功率。
- 計算直流射频代替誤差。
- 測量測輻射热計效率。
- 研究适当的技术以解决伴随功率測量的阻抗問題。

(2) 輻射热功率的測量及其技术

图1的基本綫路以及許多变型綫路在輻射热測量功率方面得到了广泛的应用。在这种基本綫路的一种常用的变型綫路中，測輻射热計电桥同时用音频和直流偏功率供电，并包括在音频振荡器的反饋电路中間，以使电桥自动平衡。用适当的电表指示測輻射热計偏功率的变化。因之，仪器变为直讀式功率計。但是，对于准确度要求高的測量，继采用这种自动平衡音频电桥之后，在較少的应用中仍然使用着手動平衡直流电桥。

理論上, 手动直流电桥在准确度方面是有优点的: 电桥的参数可以准确地建立起来、电桥的平衡可以准确地識別、有关的电流和电压可以准确地测量出来。但是由于这种技术耗費時間, 对测量系統其他部分提出稳定度的要求, 所以很难完全实现这些潜在的优点。这些因素是研制自动的或自平衡直流测辐射热計电桥的动机。这种装置除了保持高质量直流电桥所需要的准确度之外, 还有直讀式音频系統的快速和工作方便的优点。

电桥的平衡可利用高质量直流放大器来实现, 如图2所示。电桥的不平衡信号先放大, 然后用来增减恢复平衡所需的电桥的电流。在常规测量中放大器的一个特性为: 不大于0.02%的誤差是由放大器有限增益和零点不稳定等原因所引起。

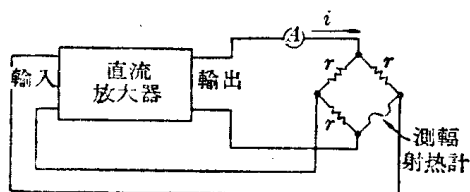


图2 自平衡直流测辐射热計电桥的基本电路

自平衡直流电桥有用的附属装置是輸出可調的定流发生器, 定流发生器的连接如图3所示。在测量小功率电平时这个装置特别有用, 这可由下面的討論看出。

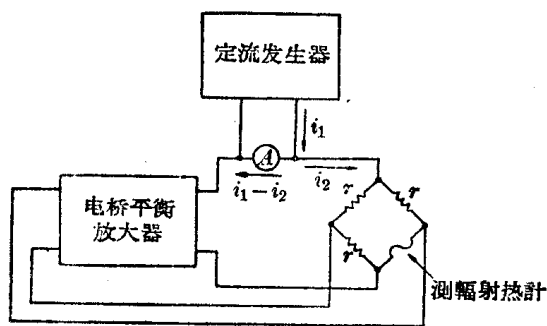


图3 功率测量中定流发生器的应用

式(1)可因子分解如下:

$$P = \frac{r}{4} (i_1 + i_2) (i_1 - i_2) \quad (2)$$

测量小的微波功率时 ($P \ll \frac{1}{4} i_1^2 r$), 总电桥电流 i_1 和 i_2 几乎相等。如果分别测量 (如图1的线路所示那样), 則需更高的准确度才能准确地求出式(2)所要求的 i_1 与 i_2 之差。在图3的线路中, 在沒有微波功率的情况下調节电流表A使得得到零讀数, 調节定流发生器的輸出使等于 i_1 , 加入微波功率后,

电桥电流将自动調整到等于 i_2 , 电流表便直接指示 $i_1 - i_2$ 。利用分裂場式功率計 (Split-field dynamometer) 也可使定流发生器直接讀出功率。虽然曾經成功地制作了这种仪器, 但由于电桥和定流发生器固有的准确度, 因此仍然可以使用精密电位器和适当的串联电阻来测量电流。在日常应用中, 测量代替的偏功率时, 准确度达 $\pm 0.1\% \pm 10^{-7}$ 瓦。

带有在恒温环境中工作的测辐射热計的自平衡直流电桥在微波功率稳定器中也用作功率探测器。在图4的方框图中, 用定向耦合器取样发生器的輸出。利用这个线路时, 耦合器的側臂輸出可以維持不变。但側臂輸出正比于正向的或发生的电波幅度。在理想情况下, 正是这个量是由稳定器的作用維持不变的。

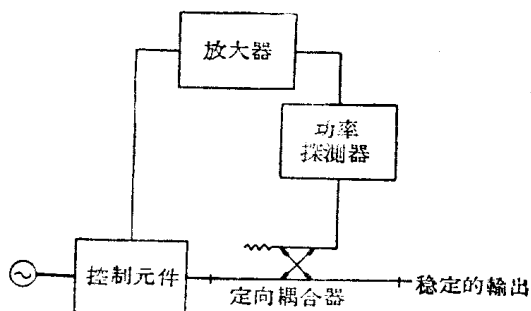


图4 功率稳定器的方框图

在测量应用中, 发生器发出的波一般最好和测量系統中端接的負載或其他变化无关。为了达到这个目的, 常需一个(阻抗)匹配的发生器。因为匹配一个工作的能源有許多实际問題, 广泛采用了衰减器和单向加载的隔离器。如上所述, 功率稳定器是既稳定又匹配的发生器的代用品。

这个技术不仅用于功率测量, 而且还用于高准确度衰减校准。在最新应用中, 在0.01~20分貝的范围内, 准确度为0.00005~0.01分貝。图5给出了当衰减器交替地置于0及0.01分貝位置时系統分辨力和稳定度的記錄。

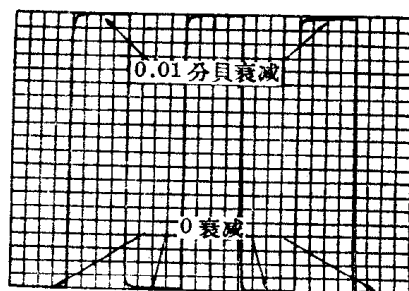


图5 在衰减测量应用中显示系統性能的记录

(3) 估計測輻射熱計架的 微量熱計法

必須指出，直流射頻代替誤差和測輻射熱計架效率是這樣定義的：給定這兩個量，就可以確定在輻射熱測量時測輻射熱計架中的微波功率損耗。反之，如果可以由合適的技術測量微波功率損耗，將這個損耗與測輻射功率加以比較就可以決定這兩種現象的綜合效應。

代替誤差和架效率的綜合效應可以認為是“有效效率”(η_c)，定義為代替的偏功率(如被測輻射熱計測量的功率)與在測輻射熱計架中的總微波功率損耗的比。

雖然有許多基本技術可以用於微波功率測量，但量熱技術是標準應用中特別有用的方法。量熱技術的基本工作原理一般是簡單的且為大家所熟知的，故通常可以對誤差的來源作更為全面的估計。這樣，在一定的測量中，準確度的界限就更為可靠。此外，這種方法很靈活，加以改變後，可以適應許多問題的需要。

對微波技術有特殊的意義的一種應用是確定在測輻射熱計架中的功率損耗，它是確定有效效率所必需的。

實際上，這種應用的基本原理因工程的改進而趨於複雜，但是，這種應用可簡述如下。

待測輻射熱計架放置在絕熱的密閉盒中，並且通過一小段薄壁(絕熱的)波導連接到恆溫的外波導系統。在測輻射熱計架中損耗的微波和直流功率產生溫升，如果這個輸入功率恒定不變時，測輻射熱計架的溫度將達到一個穩定的數值，它由架和外界的“熱穴”間導熱率所決定。大部分的热量是通过薄壁波導段而傳輸的，跨在這一波導段的溫差正比於測輻射熱架的輸入功率。

為了決定比例常數，首先只用直流功率加熱測輻射熱元件到它的工作電阻後，觀測測輻射熱計架的溫升。加入微波功率後，根據需要減小直流功率使測輻射熱計回到它的工作電阻，由溫度和以前決定的比例常數可以確定總的輸入功率(直流功率和微波功率)。減去直流分量可以得到微波功率，而測輻射熱的值得和這個值的比即有效效率。

圖6是微量熱計圖。它與上述裝置的最大差別是應用兩個測輻射熱計架，而不是一個。這種方法的一個比較重要的實際問題是測輻射熱計架中溫度

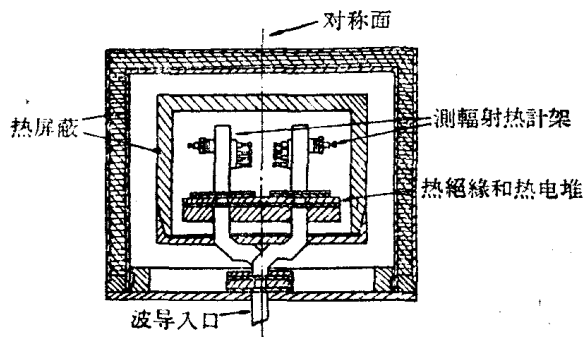


圖6 微量熱計截面圖

的升高僅約百分之幾度。如上所述，欲測量這個值到 10^4 分之一，外波導系統和“熱穴”就需要百萬分之幾度的穩定度。利用圖6的裝置可以避免這種要求，這種裝置稱為雙焦耳系統。從圖中可以看出，如果熱對稱面垂直於紙平面(如圖)，外界溫度改變時，在兩個架間不會產生溫差。工作時，功率只損耗在一個架中，另一個架則用作溫度參考點。這樣，對外“熱穴”穩定度的要求可減低到千分之幾度，這是不難實現的。測輻射熱計架間的溫差由熱電堆指示，熱電堆實際上會感知連接法蘭的溫度，如圖7所示。

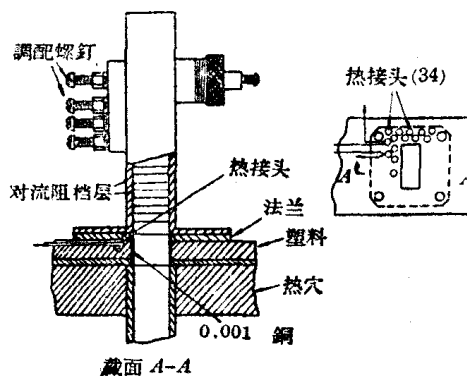


圖7 熱電堆結構詳圖

這種技術的誤差源可分為儀表誤差和等效誤差。儀表誤差因量熱計及其有關測量器械的非理想特性所引起。這種誤差的範圍可由實驗確定；首先利用測得的直流功率去定標這個系統，然後改變直流功率至另外的電平，再比較在這個電平的測量值和量熱法所確定的值。實驗表明，由這種來源預期誤差的保守範圍為0.1%。

等效誤差是因測輻射熱計架的溫度依賴於熱源的位置和幅度(功率損耗的位置)所引起的。因為這個理由，直流定標不是完全適用於測量微波功率。實際上，直流功率只損耗在測輻射熱計元件上，幸而，大部分微波也損耗在這裡，這就大大地減小了等效誤差。為了決定溫度和熱源位置的依賴關係，將輔

助的直流热源临时装入架中。由这种实验可以估计等效误差的范围。在这种情况下,误差也在0.1%以内,这可使测量等效效率的准确度达0.2%。

(4) 测量测辐射热计架效率的阻抗法

估计测辐射热计架的另一种技术是“阻抗”法,与上述量热计法相反,阻抗法给出测辐射热计架效率,而不是有效效率。此方法是基于这样的事实:测辐射热计架输入端的微波阻抗与测辐射热计元件的微波阻抗有函数关系。如果这个阻抗不同,则可以由测量对应的输入阻抗推导测辐射热计架的参数。

事实上,在测辐射热计元件上加偏压至不同的电阻值,可以得到变化的阻抗。对应用来说,只要微波阻抗的电阻分量比例于直流数值,而电抗分量维持不变或与直流电阻变化无关就够了。钨流电阻线(Barretter)或涅拉斯登线(Wollaston wire)型的测辐射热计充分满足这些标准,但是热敏电阻则不能满足。至今还没有证明,可以把热敏电阻的微波阻抗与它的直流电阻联系起来,用这样的技术来达到满意的结果。

由基本理论可给出下面的结果:设对应于测辐射热计电阻 R_1 , R_2 和 R_3 , 在测辐射热计架的输入端或法兰的反射系数为 Γ_1 , Γ_2 和 Γ_3 , 当 $R_1 = R_2$ 时,效率由下式给出

$$\eta = \left| \frac{(\Gamma_3 - \Gamma_2)(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_3 - \Gamma_1)(1 - |\Gamma_2|^2)} \right| \left| \frac{2R_2(R_3 - R_1)}{(R_3 - R_2)(R_2 - R_1)} \right| \quad (3)$$

研究包含在这个公式中的微波阻抗的测量技术是实行这个方法的一个主要的问题。

由一对定向耦合器和一对调配变换器组成的四臂波导接头(图8),和合适的检波器一起可以作为测量微波阻抗和有关应用的一个极重要的工具。由端接在臂3和臂4的检波器吸收的功率比可以由下式给出:

$$\frac{P_3}{P_4} = \left| \frac{A\Gamma_1 + B}{C\Gamma_1 + D} \right|^2 \quad (4)$$

式中 Γ_1 为臂2端接负载的反射系数, A 、 B 、 C 、 D 是臂4接头和检波器的参数。借助于调配器 T_x 及 T_y 可以对常数 A 、 B 、 C 、 D 提出各种条件。例如,一次调节就可以使 B 和 C 都消失,于是:

$$\frac{P_3}{P_4} = \left| \frac{A}{D} \right|^2 |\Gamma_1|^2 \quad (5)$$

$\left| \frac{A}{D} \right|^2$ 可以由观测 $\frac{P_3}{P_4}$ 而决定,这时臂2端接反射

系数幅度已知的负载,例如一个固定的短路器。接到臂2的其他负载的反射系数的幅度,则可由观测 $\frac{P_3}{P_4}$ 和利用式(5)来决定。

式(3)右方的第一个因子可以因子分解为:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\Gamma_3 - \Gamma_2)(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_3 - \Gamma_1)(1 - |\Gamma_2|^2)} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{\Gamma_3 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_3\Gamma_2^*} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_1\Gamma_2^*}}{\frac{\Gamma_3 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_3\Gamma_2^*} - \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_1\Gamma_2^*}} \right| \quad (6) \\ & \left| \frac{\Gamma_3 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_3\Gamma_2^*} \right| \text{ 及 } \left| \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_1\Gamma_2^*} \right| \text{ 项可以用图8的装置测出如下。} \end{aligned}$$

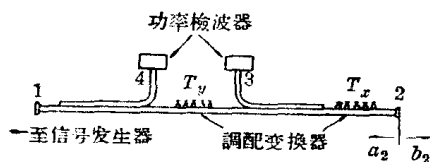


图8 微波应用中使用的四臂波导接头

臂2端接待测测辐射热计架,测辐射热计电阻则调节到所需效率时的数值。根据定义,现在四臂接头的臂2端接 Γ_2 ,再调节变换器 T_x ,使检波器3指示零。然后用可调短路器代替测辐射热计架(或总反射相角可变的其它负载),并且调节 T_y 使 $\frac{P_3}{P_4}$ 不变或使之与短路位置(相角)无关,完成这些调节后,可以看出式(4)变为:

$$\frac{P_3}{P_4} = \left| \frac{A}{D} \right|^2 \left| \frac{\Gamma - \Gamma_2}{1 - \Gamma\Gamma_2^*} \right|^2 \quad (7)$$

第二个因子正是式(6)中所需要的。如果 $|\Gamma| = 1$ 像短路那样,这个因子亦变为1,这样,简单地观测对应的 $\frac{P_3}{P_4}$,就可以计算出 $\left| \frac{A}{D} \right|$ 。

必须指出,式(6)的右边还包括项:

$$\left| \frac{\Gamma_3 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_3\Gamma_2^*} - \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_1\Gamma_2^*} \right|$$

虽然用图8线路的变型线路可以测量这种类型的量,但在大多数实用情况下,这个向量差的幅度几乎等于各个幅度的和或差。

为了获得最高的准确度,使用了上述测辐射热技术对臂3和臂4检波。用这个方法测量效率时,准确度约为0.5%。

在量热技术和阻抗技术间曾进行了多次比较,结果很好符合,一般约为千分之几。原则上,因为这两种方法相差一个代替误差,这是很有利的。因此,上述数据似乎意味着,代替误差的效应远比架效