粗糙管中水流的規律

J. 尼庫拉茲 著

水利出版社

粗糙管中水流的規律

J.尼庫拉茲　著
張　瑞　瑾　譯

水　利　出　版　社

1 9 5 7 年12月

本書系尼庫拉茲在粗糙管中所作試驗的报告。書中詳細說明了試驗的進行，以及試驗結果的分析。

本書根据華盛頓大学布里美伊尔的英譯本譯出。

本書可供水工、管流、水力学等方面的研究工作者参考。

粗糙管中水流的規律

原書名	STRÖMUNGSGESETZE IN RAUHEN ROHREN
原著者	J. NIKURADSE
原出版处	VDI-FORSHUNGSHEFT 361.
原出版年份	1933
譯者	張瑞瑾
出版者	水利出版社（北京和平門内北新華街 35 号） 北京市書刊出版業營業許可証出字第 080 号
印刷者	水利出版社印刷厂（北京西城成方街 13 号）
發行者	新華書店

41 千字　插表 7 頁　787×1092　1/25 开 3 1/5 印張

1957 年 12 月第一版　北京第一次印刷　印数1—— 1,300

統一書号：15047.119　定价：(10)0.48元

目　　錄

緒論 ……………………………………………………………… 1
Ⅰ. 試驗 …………………………………………………………… 5
1. 試驗設备的描述 ………………………………………………… 5
2. 糙率的制作和确定 ……………………………………………… 6
3. 压力坡度的測量 ………………………………………………… 7
4. 預备試驗 ………………………………………………………… 8
Ⅱ. 試驗結果的分析 ………………………………………………… 10
1. 阻力的規律 ……………………………………………………… 10
2. 流速分布 ………………………………………………………… 15
3. 指数規律 ………………………………………………………… 21
4. 勃蘭德尔的摻長 ………………………………………………… 22
5. 平均流速和最大流速之間的关系 ……………………………… 23
总結 ……………………………………………………………… 24
参考書目 …………………………………………………………… 27
附　表
附　圖

緒　論

近些时來，不少的研究工作[1]、[2]、[3]、[4]、[5]，大大地增加了我們对于光滑的管道、渠道以及平板間的紊流的知識，因而关于流速分布、影响阻力的規律、冲击以及掺長（mixing length）等，已有滿意的参考資料可尋。这些資料包括了这类水流的紊动特性。邏輯的發展，招示着对于控制粗糙的管道、渠道以及平板間的流体的紊流規律的研究。由于这类問題在实际中經常出現，对于它們的研究，較对于沿光滑面的水流的研究，更为重要；同时，作为我們对于紊流物理知識的增益，也有很大的意义。

粗糙管中的紊流，曾在上世紀中，被許多研究工作者進行探討，其中之卓著者將概略地在此处加以介紹。H. 达希[6]在由鑄鉄、鉛、鍛鉄、經柏油被复的鑄鉄以及玻璃制成的21个管子中，進行了全面細致的試驗。除玻璃管以外，其余管子的長度都为100公尺，直徑自1.2公分至50公分。他注意到流量与管子的表面形态有关，同时与管子的直徑及坡度有关。如果將他的試驗結果用現在采用的符号表达，并視阻力系数 λ 与雷諾数 Re 有关，則將發現：根据他的观測，对于給定的相对糙率 $\frac{k}{r}$，λ 只随雷諾数作輕微的改变（k 为平均糙率高度，r 为管的半徑，雷諾数 $Re=\bar{u}\frac{d}{\nu}$，其中 $\bar{u}$ 为平均流速，d 为管的直徑，ν 为运动粘滯性系数），阻力系数随雷諾数的增加而降低，其降低的速率随相对糙率的增加而变緩。对于某些固定的糙率，他的記錄說明阻力系数 λ 与雷諾数無关。对于同一雷諾数，λ 随相对糙率的增加作顯著的增加。作为达希的繼承者，H. 巴生[7]繼續進行这一

工作，并根据他与达希的記錄，推演出一个經驗公式，在这个公式中，流量系与坡度和管子的直徑有关。迄晚近为止，这一公式曾被引用于实际計算中。

R. v. 迈塞斯[8]在 1914 年作了一件極有价值的工作，用相似理論的观点，就彼时为人所知的全部試驗記錄，進行分析。主要地根据达希与巴生在圓管中的观測結果，他得到一个用雷諾数和相对糙率表达阻力系数 λ 的公式如下：

$$\lambda=0.0024+\sqrt{\frac{k}{r}}+\frac{0.3}{\sqrt{Re}}.$$

当雷諾数接近于臨界値时，也即是当雷諾数較小时，这一公式，表現为下列形式：

$$\lambda=\left(0.0024+\sqrt{\frac{k}{r}}\right)\left(1-\frac{1,000}{Re}\right)+\frac{0.3}{\sqrt{Re}}\sqrt{1-\frac{1,000}{Re}}+\frac{8}{Re}.$$

v. 迈塞斯首先將“相对糙率”这一名称用于比值$\frac{k}{r}$，此处 k 为絕对糙率。粗糙管中水流相似性的驗証，系由 T. E. 斯坦通[9]于 1911 年提供。他就兩种直徑不同的管子進行研究，管子的內壁面制成兩道方向相反的螺紋。为了得到几何相似的糙率高度，他变更螺紋的斜度和深度使与管子的直徑成正比。他曾就同一管中按照他的設备所能得到的最大的和最小的雷諾数的情况進行比較，并進而就不同直徑的管子里面的流速分布作比較。从無因次的流速圖观察，發現在第一种情况下，具有極完整的合諧性，但在第二种情况下，在緊鄰管壁附近有小的差异性出現。因此，斯坦通証明了粗糙管中水流的相似性。

更近些时，L. 席勒[10]作了关于阻力系数 λ 因雷諾数及表面形态而改变的進一步的观察。他的試驗系于拉制的黄銅管中進行。他采取与斯坦通相似的方法，在試驗管的內壁面制成不同深度和斜度的螺紋而得到粗糙表面。管子的直徑自 8 至 21 公厘。他的試驗說明臨界雷諾数与管壁形态無关。他并進而确定：对于很粗糙的表面，随着紊动的出現，阻力平方律立即生效。对于不很粗糙的表面，他观察到阻力系数随雷諾数作緩慢的增加。由于彼时哥廷根（Göttingen）的試驗

設备只能使雷諾数达到 10^5 左右。席勒未能确定，在較高的雷諾数下，这种增加的趋势是否將進入阻力平方律以內。他的試驗結果同样指出，当雷諾数一定时，阻力系数 λ 随糙率的增加而增加。

約与席勒同时，L. 霍尔夫[11]作了尋求函数关系 $\lambda=f\left(Re, \frac{k}{r}\right)$ 的若干試驗。他在具有不同深度和糙率（孔網、具有鋸齒狀表面的鋅板和兩种波形板）的矩形槽中進行了系統的試驗。其所以采用矩形断面，是为了在槽壁表面形态相同的情况下，以变更断面中水深的方式，來确定水力半徑（水力半徑 r' 等于断面積与濕周的比值）的影响㊀。由于霍尔夫的建議，这类試驗曾由 K. 傅若姆[12]繼續進行。霍尔夫曾根据他自己的、傅若姆的以及其他能够得到的試驗記錄得出結論：在粗糙管內的紊流中，具有兩种基本的糙率形态。他称之为表面糙率和表面波率的这兩种形态，各自遵循不同的規律。根据霍尔夫的見解，表面糙率系被这样的事实所表征：它的水头損失，与雷諾数無关，僅按照阻力平方律随壁面形态而改变。他認为当阻力系数既与壁面形态有关又与雷諾数有关时，則存在的是表面波率；它們之間的关系是这样的：若用对数値繪出，則对于不同的壁面形态，作为雷諾数函数的 λ 的不同的曲綫，將平行于同一条平滑的曲綫㊁。假設 a 为糙率的平均高度，b 为平面上兩个相鄰的凸起物的平均距离，則当 $\frac{a}{b}$ 的数値較小时，將存在表面波率，当 $\frac{a}{b}$ 的数値較大时，將存在表面糙率。

㊀ 此句英文譯本中原为：A rectangular section was selected in order to determine the effect of the hydraulic radius (hydraulic radius r' = area of section divided by wetted perimeter) on the variation in depth of section for a constant type of wall surface. 顯然是費解的。譯成中文时，忖度情理，作了一点改变——譯者。

㊁ 此句英文譯本中原为：He considers surface corrugation to exist when the friction factor as well as the Reynolds number depends upon the type of wall surface in such a manner that, if plotted logarithmically, the curves for λ as a function of the Reynolds number for various wall surfaces lie parallel to a smooth curve. 顯然有錯誤。譯成中文时，也作了一点变更——譯者。

圖 1 及圖 2 为霍尔夫、傅若姆、达希、巴生及其他的人的試驗总結，圖 1 表达表面糙率，圖 2 表达表面波率。对于位于表面糙率范圍內的阻力系数 λ，霍尔夫得出下列經驗公式：

$$\lambda=4\times10^{-2}\left(\frac{k}{r'}\right)^{0.314},$$

其中 r' 为渠槽的水力半徑$\left(r'=\frac{F}{U}\right.$ ● ；F = 断面面積；U = 湿周$\left.\right)$。

这一公式適用于鉄管、經水泥涂成塊狀的平板以及孔網● 。对于屬于表面波率的情况，他提出下式：

$$\lambda=\lambda_0\xi,$$

其中 λ_0 为光滑表面的糙率，ξ 为比例常数，对于木管，ξ 为 1.5 至 2.0，对于柏油被复的管子，ξ 为 1.2 至 1.5 。

与阻力規律一样，流速分布随壁面形态的变化也很重要。达希、巴生及斯坦通[9]曾就这一問題進行观察。然而，流体温度、壁面形态以及水头損失等必要的記錄皆付闕如。在較近的时期中，弗利希[13]曾根据 V.卡尔曼的建議，采用与霍尔夫、傅若姆相同的設备，進行过这种观察。槽長 200 公分，寬 15 公分，深度变化于 1.0 至 3.5 公分之間。因此，沿短的对称軸說，得到二度水流。他就下列各种壁面形态研究了流速分布：

1. 光滑的
2. 波狀的（浪形的）
3. 粗糙的

   I：（地板，有輕微波狀的玻璃板）
4. 粗糙的

   II．（加襯的玻璃）
5. 齒形的（傅若姆称之为鋸齒的）

弗利希發現，只要水头損失相同，各种表面形态下的流速分布，在同

● 英文譯本中原为 $r'=\frac{2F}{U}$，系錯誤的——譯者。

● 英文譯本中原为 This formula applies to iron pipes, cement, checkered plates and wire mesh. 費解。cement 后面的逗点“，”可能是錯的——譯者。

一水深中，都是相似的（緊貼壁面一層除外）。

涂利尔[14]、[15]在十分粗糙的槽中作了試驗，对阻力和流速分布進行了观察。从这些試驗以及从其他研究者們的試驗中，他發現流速分布只与切应力有关，不論切应力的变化系起因于糙率的变化或雷諾数的变化。

現有的为数众多并且其中部分是煞費苦心的試驗，虽然包括了許多不同形态的糙率，但都落在較小的雷諾数的范圍中。当前研究工作的目的，便在于探求在所有的雷諾数中粗的与細的糙率的影响，从而确定所顯示的規律。为此，便有必要分析当相对糙率$\frac{r}{k}$一定时，在較寬廣的雷諾数范圍內的情况，并确定当$\frac{r}{k}$为常数时，亦即在几何相似下，对于不同直徑的管子，$\lambda=f(Re)$是否系同一条曲綫。同时，問題还存在于：对于相同的$\frac{r}{k}$，流速分布是否相似并随雷諾数而变化；或者，如V.卡尔曼所說，对于不同的$\frac{r}{k}$，流速分布是相似的。

我願意向我的直接領導人教授L.勃蘭德尔博士表示由衷的感謝，他一直以其珍貴的指導帮助着我。

I 試 驗

1. 試驗設备的描述

圖3中的設备，系進行試驗时所采用。这套同样的設备，也曾被用于研究光滑管中紊流的流速。这套設备和測器的詳細描述見VDI-Forschungsheft 356●，此处僅作概略的介紹。用电动机em帶动的离心式抽水机kp將水从供水渠vk抽至水箱wk，然后，水經过試驗

● 参看本文所附原著者参考書目第〔5〕項——譯者。

管段 vr，回到供水渠 vk。这一装置供中、高雷諾数情况下的研究之用，为了進行低雷諾数情况下的观測，另裝溢流設备。水經供应管 zl，流至敞口水箱 wk，另有直立水管 str 与水箱相連，將溢流的水導至溢水箱，然后經溢水管 fr 下泄。通过試驗管段的流量可以随意控制。为了得到最大的雷諾数，水箱 wk 中須保持恆定的高压。观測項目为

1.水头損失；

2.緊接試驗管段下游的流速分布；

3.流量；

4.水温。

三根附有側孔的弯管用來測量水头損失，其詳細情况將于 I -3 中叙述。流速分布系用畢托管測量，畢托管的內徑为 0.2 公厘，安設于測速裝置 gm 上，可以作橫向与豎向的調整。雷諾数在 3×10^5 以下的流量，系用水箱 mb 測量，量时观測水深及时間。更大的流量，系根据流速分布曲綫積分而得。温度讀数系于測速裝置 gm 的出口处取得。試驗管系由拉制的黃銅圓管裝成，它的各种尺度見表 1。它的直徑，系借充水于管中之后，再測量管長和水重的方式，來确定的。

2. 糙率的制作和确定

如果要使兩只水管中發生力学相似的水流，則相似性要求这兩只水管具有相似的几何形态和相似的管壁表面。第一个条件因采用圓形斷面而滿足；第二个条件因維持水管半徑 r 与突起物高度 k 的定常比值而滿足。因此，用以產生糙率的物体之必須相似，是很重要的。D.托馬教授用沙子以达此目的之先例被采用了。

为了得到全管均匀的糙率，要求大小均匀的顆粒。將建筑中常用的沙子加以篩析。举例來說：如欲得到 0.8 公厘的平均粒徑，則使用孔徑为 0.82 与 0.78 公厘的篩子。再取經过篩析后的沙子数百粒，用蔡斯（Zeiss）厚度仪直接观測它們的粒徑，借以确定沙子实有的平均粒徑。其法为：將沙子散布于平板上，逐步移动平板，用蔡斯厚度仪（精度达 0.001 公厘）量得每一粒沙子的直徑。就所举的例子來說，算術平均值为 0.8 公厘。

圖 4 为均匀沙粒（直徑 0.8 公厘）的顯微照片，从該圖可以看出沙粒的形态。預备試驗提供了使管壁糙化的方式：將水管直立，封閉下面一端，用極稀薄的日本漆充滿管內，然后放空。經过約 30 分鐘后，管壁內表面的漆已干到"膠狀"程度，再將一定大小的沙子充滿管中，复使沙子从管底流出，从預备試驗得知：此后干燥时間的久暫，对于管壁沙粒的耐久性極为重要。干燥时期約需 2 至 3 星期，随空气中的溫度而异。將电灯泡放在管子下端，引起均匀对流，有助于管內的均匀干燥。干后，为了使沙子得到更好的粘合，再將漆充滿水管并放空，随后再干燥 3 至 4 星期。为了擺脫管子兩端的断面可能減小的情况，于兩端各截去約 10 公分。經过上述处理以后的管子，便可供試驗用了。

比值 $\frac{r}{k}$ 系壁面相似性的指标。上述的例子說明，欲使 $\frac{r}{k}$ 保持常数，則对于不同直徑的水管，須采用不同大小的沙粒。壁面的几何相似性，要求沙粒的形态不变，同时，由于糙率的凸起物具有水动力学的效果，因而也要求它不变。圖 4 表明在沙粒之間存在着空隙，具有水动力学效果的凸起高度 k 与沙粒的大小相等。为了确定根据上述方式測得的粒徑是否在实际上有效，曾在一平板上塗日本漆（漆的必需濃度在預备試驗中确定），按照所要求的步驟使平板表面粗糙化，并用前述办法量得沙粒凸出于表面的高度，从而得知：在漆的濃度达到一定程度的情况下，凸起高度的平均值与原來量得的粒徑相合。

3. 压力坡度● 的測量

光滑管中水流的压力坡度的測量，常采用在管壁鑽測压孔的方式進行。若粗糙管中的水头損失，也用这种方式去确定，則將招致顯著的誤差。原因是：由于水流繞过凸起物时所產生的渦流，將随鑽孔位置之不同，引起正压或負压。为了这个緣故，压力坡度的观測，系采用弯管進行。如圖 5 所示，这种測管作 90° 的弯曲，当裝置于試驗水管

● 英文譯本中原为：static pressure gradient，与我們的習慣用語不合。在譯成中文时，凡遇这个提法，都譯为"压力坡度"——譯者。

时，弯管的一枝（自由枝）与流向平行。在自由枝上僅鑽側孔。管子的外徑为2公厘。管子的其他性狀，与勃蘭德尔式畢托管的測压管的規格相合[16]。弯管的自由枝置于离試驗管管壁$\frac{1}{2}$半徑之处。固定枝在与自由枝的同一平面內另作60°的弯曲，因而可經常指示自由枝的方位。弯管与試驗水管結合处裝置閉塞盒。

圖6[(1)]顯示弯管中压力讀数随測管与流向的相对方位的不同而改变的情况。从該圖可以看出：只有当自由枝的方位对于流向的偏离不超过7.5°时，才能得到正确讀数。試驗管中納入弯管以后，將因后者所引起的阻力，而使压力差增加。兩只測压弯管的阻力損失必須从測得的压力差p_1-p_2中減去[●]。因此，弯管的阻力必須事先确定。确定弯管阻力的方式为：首先利用試驗管管壁的測压孔量得光滑管中在一定溫度下与各种流量相应的压头損失h，然后，利用弯管量得同一管段中在同一溫度下与各种流量相应的压头損失$h+a$，在同一流量下压头損失的增量a即系弯管的阻力。阻力的校正曲綫如圖7所示。

应該注意的是：弯管方位的偏离，旣將招致压力讀数的誤差，也会引起弯管阻力的增加。如將校正后的压力損失p_1-p_2除以观測段長度l（弯管側孔之間的距离），則得压力坡度：

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p_1-p_2}{l}.$$

4. 預备試驗

开始的时候，曾仿照D.多馬教授的方法[17]，將經过篩析的沙子与白漆的一定比值的混合物充滿底部封閉的管中，然后將混合物从管

---

(1) 此圖采自卡姆布魯赫的著作，見参考書目[16]。

● 如果在观測段的中間，不曾裝置第三只弯管，而只在观測段的首尾分別裝置一只弯管，則只应該从測得的压力差p_1-p_2中減去一只弯管的阻力損失。这里說应減去兩只弯管的阻力損失，是不正确的。不过，后文中所提出的校正方式，是完全正确的。因此，可能只是在說明中不夠恰当，而在实际校正計算中，仍沒有錯誤——譯者。

底放出。經2至3星期的干燥期后，通过預备試驗，对于具有水动力学效能的糙率凸起物之能否維持定常的問題，得到解答。在給定的雷諾数下，当平均流速 $\bar{u}$ 約为每秒20公尺时，每小时观測压力損失。結果發現，在几天之中，压力坡度作顯著的增加。同时，由供水渠中的沉積物說明漆被顯著冲掉；另一缺点为沙子被部分地冲走。压力坡度的增加被認为系由于漆被冲掉后糙率的凸起程度有所增加而使然。因此，为了保証在試驗过程中管壁表面能保持所要求的狀态，粘沙的方法必須改变。在試驗过程中，糙率凸起高度 k 必須保持定值，管壁表面沙粒的分布也必須保持不变。

为了避免沙粒之間的粘連現象，所用的漆很稀薄。一方面使漆直接在管壁上形成被复層，另一方面使漆在各沙粒之上形成被复層，后者的厚度不超过沙粒進入前者的深度。沙粒的原有形狀和大小保持不变。这一問題的决定因素在于借松脂摻量來控制的漆的濃度恰足使沙粒原有的大小保持不变。未加第二次漆的被复層的水管，經过試驗后，証明沙子將被冲掉。因此，第二次漆的被复層遂被采用。若兩次漆的被复層的干燥期都太短，則漆將被冲掉；若第一次太短，第二次較長，則兩層漆也都將被冲掉；若第一次較長，第二次太短，則仍將有若干沙粒被冲失。只有当兩次漆的被复層的干燥期都达到3至4星期，才能得到恆定的糙率。弯管的观測精度，系經过校訂，方式为：將安裝于光滑管的同一断面的弯管和管壁測压管分別連接于压差式測压管[●]的兩端，弯管与管壁測压管所顯示的压力应該相同，也即是压差式測压管的讀数应該为零。經过这种方式校訂的弯管，然后用于主要的观測。

最后，曾对过渡段長度 $\frac{x}{d}$ 予以确定。对于具有最大相对糙率 $\left(\frac{k}{r}=\frac{1}{15}\right)$ 的水管，曾進行流速分布測驗。当雷諾数 $Re=20\times10^3$，70×10^3 以及 150×10^3 的情况下，測量了距管口不同距离处的流速分

● 英文譯本中原为 manometer，但实际上指的是压差式測压管——譯者。

布。这种观测，系截取部分的試驗管段來進行的。試驗証明，雷諾数的变化对过渡段長度的影响不大●。过渡段的長度較光滑管中的$\frac{x}{d}\approx 40$稍短（圖8）。在試驗中，与处理光滑管中水流試驗的情况相似，采取了$\frac{x}{d}=50$。

II 試驗結果的分析

1. 阻力的規律

管流中的阻力系数 λ 可由下式表达：

$$\lambda=\frac{dp}{dx}\ \frac{d}{\bar{q}}, \tag{1}$$

其中 $\frac{dp}{dx}$ 为單位長度中的压力損失，d 为水管直徑，$\bar{q}=\rho\frac{\bar{u}^2}{2}$，系平均流速为 $\bar{u}$ 时的动压力，ρ 为密度。在雷諾数 $Re=600$ 至 10^6 的范圍內，進行了大量的系統試驗，研究了各种糙率下阻力系数与雷諾数的关系。六种不同的相对糙率曾被采用，相对糙率 $\frac{k}{r}$ 系平均凸起高度 k 与水管半徑 r 的比值。

在整理記錄时發現，引用相对糙率 $\frac{k}{r}$，似不如引用其倒数 $\frac{r}{k}$ 为好。圖9系在六种相对糙率的倒数 $\frac{r}{k}$ 的情况下，阻力系数与雷諾数的对数值的关系，同时列入光滑管的情况（参看表2至表7）。最下的一条曲線表示光滑管的情况。若就固定的相对糙率去研究代表 $\lambda=f(Re)$

● 此句英文譯本中原为：Tests show that changes in the approach length have small effect on the Reynolds number. 顯然是錯誤的。譯成中文时，作了改变——譯者。

的曲綫，则应分作三个部分或区域去考慮。

在第一个区域里，雷諾数較低，糙率对阻力不發生作用，相应于$\frac{r}{k}$的不同数値的曲綫$\lambda=f(Re)$与光滑管的曲綫相重合。这一区域，包括層流的全部和紊流的一部分，相对糙率愈小，则所包括的紊流部分愈多。在整个層流范圍內，阻力系数可表达为：

$$\lambda=\frac{64}{Re}. \tag{2}$$

上式在圖 9 中为坡度等于 1:1 的一条直綫所表达。屬于第一区域中的光滑管紊流，当雷諾数不超过 $Re=10^5$ 时，勃拉齐烏斯的阻力規律[18]是適用的，即：

$$\lambda=\frac{0.316}{Re^{\frac{1}{4}}}. \tag{3}$$

上式在圖 9 中为坡度等于 1:4 的一条直綫所表达。在各种相对糙率下的臨界雷諾数的位置，都与光滑管的情况相同，即介于 2,160 与 2,500 之間。

第二个区域，可名之为过渡区域，在这个区域中，糙率的作用，逐漸趋于顯著，阻力系数 λ 随雷諾数的增加而增加。这个过渡区域突出地为一个事实所特征：阻力系数旣与雷諾数有关也与相对糙率有关。

在第三个区域中，阻力系数与雷諾数無关，曲綫 $\lambda=f(Re)$ 变为与横軸平行。此即为適应于阻力平方律的区域。

曲綫 $\lambda=f(Re)$ 的三个区域可以从物理意义上解釋如下：在第一个区域中，層流边界層的厚度 δ（如众所周知，它系随雷諾数的增加而減小），尙大于平均凸起高度（$\delta>k$）。因此，由于糙率而引起的能力損失并不較光滑管中的能力損失为大。

在第二个区域中，边界層的厚度約与平均凸起高度相等（$\delta\approx k$），个别的凸起物穿过边界層，造成漩渦，并引起附加的能力損失。随着雷諾数的繼續增加，则因層流边界層的变薄，將有更多的凸起物穿过層流边界層，因而附加的能力損失，將随雷諾数的增加而增大。这个

情况，为曲綫 $\lambda=f(Re)$ 在此区域中的上升趋势所表达。

最后，在第三个区域中，边界層已經薄到足以使全部凸起物都能穿过它的程度，因漩渦而引起的能力損失达到定値，雷諾数的繼續增加將不会增加阻力損失●。

在第三个区域中，关系非常簡單。此处阻力系数与雷諾数無关，而僅与相对糙率有关，这种关联性可以下式表达：

$$\lambda=\frac{1}{\left(1.74+2\log\frac{r}{k}\right)^2}. \tag{4}$$

为了以試驗結果驗証这一公式，曾將 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 与 $\log\frac{r}{k}$ 的对应值繪入圖10中，發現穿过这些点子可以繪出直綫

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=1.74+2\log\frac{r}{k}. \tag{5}$$

包括試驗中整个雷諾数的范圍，繪出了 $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-2\log\frac{r}{k}$ 与 $\log\frac{v_*k}{\nu}$ 的关系。后者作为表面情況的特征数值，在尺度概念上特别適合。从下面的分析中可以看出，引用 $\log Re\sqrt{\lambda}-\log\frac{r}{k}$ 或較 $\log\frac{v_*k}{\nu}$ 更为方便。根据阻力系数的公式：

$$\lambda=\frac{dp}{dx}\,\frac{4r}{\rho u^2}, \tag{1}$$

可以得到切应力 τ_0 与阻力系数 λ 的关系。为了滿足長度为 dx、半徑为 r 的液柱的平衡要求，將有

$$2\pi r\tau_0=\frac{dp}{dx}\pi r^2,$$

或者从方程式（1）

● 这一句話是不夠确切的。在第三个区域中，只能說，阻力系数 λ 达到定値，不随雷諾数的增加而增加；而不能說，阻力損失达到定值，不随雷諾数的增加而增加——譯者。

$$\frac{\tau_0}{\rho}=\lambda\frac{\bar{u}^2}{8}, \tag{6 a}$$

或

$$\sqrt{\lambda}=2.83\frac{v_*}{\bar{u}} \tag{6 b}$$

其中 $v_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$，系摩阻流速。由此得到:

$$Re\sqrt{\lambda}=5.66\frac{v_* r}{\nu},$$

及

$$\log(Re\sqrt{\lambda})-\log\frac{r}{k}=\log\left(5.66\frac{v_* k}{\nu}\right), \tag{7 a}$$

或

$$\log\frac{v_* k}{\nu}=\text{const}+\log(Re\sqrt{\lambda})-\log\frac{r}{k}. \tag{7 b}$$

从方程式（5），可得:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-2\log\frac{r}{k}=1.74. \tag{5 a}$$

显然，在阻力平方律区域内，$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-2\log\frac{r}{k}$ 为一常数，但在其他区域内，該数量系随雷諾数而改变。以上的分析說明了：虽然对于光滑管曾采用 $\log(Re\sqrt{\lambda})$ 作为横坐标，而此处却采用 $\log(Re\sqrt{\lambda})-\log\frac{r}{k}$ 作为横坐标的道理。方程式（5 a）可改寫为:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-2\log\frac{r}{k}=f\left(\log\frac{v_* k}{\nu}\right). \tag{8}$$

这里出现了一个作为控制性系数的無因次量

$$\eta=\frac{v_* k}{\nu},$$

它可以从因次分析的观点推知。圖11（参看表2至表7）表达根据