$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

★ 职工高等工业专科学校教材

线性代数

★ 黎国良 黄显炘 编

★ 高等教育出版社

职工高等工业专科学校教材

线 性 代 数

黎国良　黄显炘　编

高等教育出版社

本书是根据职工高等工业专科学校《工程数学教学大纲》编写的。本书介绍了职工高等工业专科学校各专业课程需要的线性代数基本知识。全书共五章，主要内容是：行列式，矩阵，线性方程组，相似矩阵，二次型。

本书可供职工高等工业专科学校有关专业作试用教材，也可供工程技术员作参考书。

职工高等工业专科学校教材

线 性 代 数

黎国良　黄显炘　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张5.375　字数132 000

1987年8月第1版　1987年8月第1次印刷

印数 00 001—10 130

ISBN 7-04-000068-7/O·29

书号13010·01448　　定价0.92元

前　言

本书是根据1983年11月原教育部审订的职工高等工业专科学校《工程数学教学大纲》编写而成的．本书可作为职工大学、业余大学工科各专业《线性代数》课程的试用教材或教学参考书．

1984年10月和1985年9月先后在广州和北京召开了《线性代数》的审稿会议．与会代表认真审阅了全稿，并就如何结合职工高等工业专科学校的实际情况，对本书内容的取舍、结构的安排和文字的叙述都提出了十分宝贵的意见．在此基础上编者又对全稿进行了整理和修改．

于此谨向上海交通大学沈黛云同志、陈大新同志、四川汽轮机厂职工大学龙遂福同志、北京经济学院唐森玉同志表示衷心感谢．

由于编者水平有限，书中错误在所难免，希读者不吝指正．

编　者

一九八六年八月

目　录

第一章 行 列 式

行列式是求解线性方程组的一个重要工具. 本章首先在三阶行列式的基础上,把行列式的概念与性质推广至 n 阶行列式,并且运用行列式的性质来计算行列式. 最后给出利用行列式求解线性方程组的方法——克莱姆(Cramer)法则.

§1 n 阶行列式的概念

1.1 二阶和三阶行列式

我们知道, 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}, \tag{2}$$

这里

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

即把系数行列式 D 中第 1 列元素换成方程组 (1) 的常数项而得 D_1;把 D 中第 2 列元素换成方程组(1)的常数项而得 D_2.

同样, 对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{3}$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时,同样,方程组(3)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}, \tag{4}$$

这里

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

即在系数行列式D中分别把第 1 列、第 2 列与第 3 列的元素换成方程组(3)的常数项而得到行列式 D_1, D_2, D_3.

上面,我们复习了用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组(系数行列式不等于零). 下面,我们将二阶、三阶行列式的概念推广到n阶行列式,并用n阶行列式解n元线性方程组. 为此,我们首先分析三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由此看出,三阶行列式共有 6 项,每一项都是不同行不同列的三个元素乘积: $a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ a_{3j_3}$,并带有正号或负号;这三个元素的

第一个下标(称为行标)是按 1,2,3 的次序排列的，它表示在行列式的每一行各取一个元素. 第二个下标(称为列标)排列成 j_1, j_2, j_3,它是 1,2,3 三个数的某种排列，它表示从三个行中所取的元素取自不同的列. 由此可知行列式的每一项都是由每一行和每一列各取一个且仅取一个元素并带有正负符号的乘积. 1、2、3 三个数字的排列共有 6 种. 列标的 6 种排列正好对应着行列式的 6 项.

各项的正负号与列标的排列对照如下

带正号的三项,其列标排列是 123,231,312;

带负号的三项,其列标排列是 321,132,213.

分析各项所带的符号、由于各项的行标都是按 1、2、3 次序排列的，所以各项所带的符号仅与列标的排列有关. 为了说明其中的关系，下面引进排列逆序数的概念.

1.2 排列的逆序数

定义 1 由数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列 $j_1j_2\cdots j_n$称为 **n 级排列**,在这个排列中，如果某个数字 $j_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的前面(左边)有 m 个比 j_k 大的数字,则 m 称为数字 j_k 的**逆序数**;排列中所有各个数字的逆序数的总和称为**这个排列的逆序数**，并记为：$N(j_1j_2\cdots j_n)$.

计算排列逆序数的方法是：首先看有多少个数字排在“1”的前面,设为 m_1 个,其次把“1”划去;再看有多少个数字排在“2”的前面,设为 m_2 个，然后把“2”划去；再看有多少个数字排在“3”的前面,$\cdots$等等,依此类推,这个排列的逆序数等于

$$m_1+m_2+\cdots+m_n.$$

例 1 求 3 2 5 1 4 的逆序数.

解 在 3 2 5 1 4 中,1 的前面有三个数字,即 $m_1=3$,划去 1 后,得 $325\cancel{1}4$;2 的前面有一个数字,即 $m_2=1$，划去 2 后得 $3\cancel{2}5\cancel{1}4$，3 的前面没有数字,即 $m_3=0$,划去 3 后得 $\cancel{3}\cancel{2}5\cancel{1}4$；4 的前面只有一个数字,即 $m_4=1$：划去 4 后得 $\cancel{3}\cancel{2}5\cancel{1}\cancel{4}$，最后只余下 5 这个数字,

即 $m_5=0$. 所以

$$N(32514)=3+1+0+1+0=5.$$

同理

$$N(25341)=4+0+1+1+0=6.$$

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

3 2 5 1 4 是奇排列，2 5 3 4 1 是偶排列.

1 2 3 4 5 的逆序数为零，我们规定它是偶排列.

在三阶行列式的各项中，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时带正号，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时带负号.

于是三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1,j_2,j_3} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}, \tag{5}$$

这里 $\sum\limits_{j_1,j_2,j_3}$ 表示对所有三级排列求和.

1.3 n阶行列式的定义

定义 2 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{6}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数(称为元素)，作出表(6)中所有位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并置以符号 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$，得到形如

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{7}$$

的项，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 1, 2, 3, …, n 的一个全排列，$N(j_1j_2\cdots j_n)$ 为这个排列的逆序数. 由于这样的全排列共有 $n!$

个，因此形如(7)的项共有 $n!$ 项．所有这 $n!$ 项的和

$$\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $n=2,3$ 时，定义 2 与前面所讲的二、三阶行列式的定义是完全一致的．当 $n=1$ 时，$|a|$ 就是 a 本身，即 $|a|=a$，这里 $|a|$ 不代表 a 的绝对值．

例 2 按定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 按定义，行列式 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}, \tag{8}$$

由于 D 有很多元素为零，所以 D 有很多项为零．现在来看一下，形如(8)式的项有那些不为零．因一般项中第 1 个元素 a_{1j_1} 取自第 1 行，而第 1 行中只有 $a_{11}=3\neq0$，故 $j_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项才可能不为零，其它项均为零；第 2 个元素 a_{2j_2} 取自第 2 行，而第 2 行中有 $a_{21}=1$，$a_{22}=-4$ 不为零，但 a_{11} 已取自第 1 列，因此第 2 个元素不能再取自第 1 列，即不能取 a_{21}，所以第 2 个元素只能取 $a_{22}=-4$；同理 a_{3j_3} 只能取 $a_{33}=2$；a_{4j_4} 只能取 $a_{44}=-1$．因此 D 中除 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=3\cdot(-4)\cdot2\cdot(-1)$ 这一项外，其它项均为零．由于 $N(1\ 2\ 3\ 4)=0$，故这一项应取正号，于是可得

$$D=(-1)^{N(1234)}3\cdot(-4)\cdot2\cdot(-1)=24.$$

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线. 上面行列式D的特点是主对角线右上方的元素全为零. 主对角线上方的元素全为零的行列式称为下三角形行列式. 一般情形，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

相应地，主对角线左下方的元素全为零的行列式称为上三角形行列式，也有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

特别地,除主对角线上的元素外,其余元素都为零的行列式称为对角形行列式，仍有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三角形行列式及对角形行列式都等于它们的主对角线上元素的乘积.

例 3 求证

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

证 按行列式定义，行列式D的展开式中除含有a_{11}的项以外,其余的项均为零,所以

$$D=\sum(-1)^{N(1j_2j_3j_4)}a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$
$$=a_{11}\sum(-1)^{N(j_2j_3j_4)}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

§ 2　n阶行列式的性质

由行列式的定义直接计算行列式是很麻烦的，为了简化行列式的计算，我们叙述行列式的一些基本性质而不加以证明.

将行列式D的行、列互换后，得到新的行列式D'，D'称为D的**转置行列式.**

即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则
$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.

例 4　验算行列式D和它的转置行列式D'相等，设

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{vmatrix}=105+32+108-360-72-14$$

$$=-201,$$

$$D'=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}=105+108+32-360-14-72$$

$$=-201.$$

可以看到：$D=D'$.

因此，行列式对行成立的性质，对列也成立。故以后我们讨论行列式的性质时，只讨论行的性质.

性质 2 互换行列式任意两行(列)，行列式仅改变符号.

我们用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_j 表示第 j 列. 并用 $r_i\longleftrightarrow r_s$ 表示第 i 行与第 s 行互换，用 $c_j\longleftrightarrow c_t$ 表示第 j 列与第 t 列互换.

如果行列式的 r_i 与 r_s 互换，即有

$$\begin{array}{c} \\ \\ r_i \\ \\ r_s \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i\longleftrightarrow r_s}(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 5 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}=-33,$$

互换第 1 行与第 3 行后，得

$$\widetilde{D}=\begin{vmatrix}-2 & 2 & 7\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=33.$$

故有：$D=-\widetilde{D}$.

性质 3 如果行列式有两行(列)的对应元素相同，则这个行列式等于零.

因为把行列式D中相同的两行(列)互换，其结果仍是D，但由性质 2 可知互换两行(列)的结果为$-D$. 因此，$D=-D$，即$2D=0$，故$D=0$.

例 6 计算

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 2\\ 6 & -1 & -7 & -1\end{vmatrix}.$$

解 因为行列式的第 2 列与第 4 列对应元素相同，所以行列式$D=0$.

性质 4 以数k乘行列式中某一行(列)的所有元素，等于以数k乘这个行列式.

这个性质相当于：如果行列式某行(列)有公因子k，则这个公因子k可以提到行列式外面.

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 9 & 3 & 15\\ -2 & 2 & 7\end{vmatrix}.$$

解 将D中第二行的公因子 3 提到行列式外面，有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 9 & 3 & 15\\ -2 & 2 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot 5\\ -2 & 2 & 7\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}1&2&4\\3&1&5\\-2&2&7\end{vmatrix}=3\cdot(-33)=-99.$$

性质 5 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则这个行列式等于零.

例 8 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-3&-2\\-4&5&12&1\\2&4&-6&-4\\3&-7&-9&5\end{vmatrix}$$

的第 1、3 行成比例,验算行列式 D 等于零.

解 因为行列式D的第 3 行有公因子为 2，将这个公因子提到行列式外面.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-3&-2\\-4&5&12&1\\2&4&-6&-4\\3&-7&-9&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&-3&-2\\-4&5&12&1\\1&2&-3&-2\\3&-7&-9&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1=r_3}0.$$

性质 6 如果行列式中某一行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式的和，而且这两个行列式除了这一行(列)以外,其余的元素与原来行列式的对应元素相同,即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{i1}+c_{i1}&b_{i2}+c_{i2}&\cdots&b_{in}+c_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

例 9 计算

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.
$$

解 利用性质 6 将行列式 D 分解为两个行列式的和

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2+0 & 4+0 & 8+(-2) & 6+1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
=0+(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3.
$$

性质 7 将行列式的某一行(列)的各元素都乘以同一个数 k 后,加到另一行(列)的对应元素上,则行列式不变,即