考研 数学 题库

HZ BOOKS
华章教育

北方交通大学 赵达夫 编著

高等数学 习题集（提高篇）

第2版

机械工业出版社
China Machine Press

4

考研数学题库

013-44
Z341

第2版

北方交通大学 赵达夫 编著

高等数学习题集（提高篇）

考槁大學圖書館藏書

A1067030

机械工业出版社
China Machine Press

HAF92/01

本书由机械工业出版社出版，未经出版者书面许可，本书的任何部分不得以任何方式抄袭、复制。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集(提高篇)(第2版)/赵达夫编著. -北京:机械工业出版社,2003.4
(考研数学题库)
ISBN 7-111-11870-7

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第018976号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)
责任编辑：石会敏
北京奔腾印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2003年4月第2版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·16.5印张

定 价：28.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

出 版 前 言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研数学题库”、“本科生数学题库”、“2004 年全国研究生入学考试数学复习指导丛书”等共 12 本。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

在“考研数学题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质。

为了使得学生通过一定数量题目的练习，会更好地理解和掌握有关的基本概念和基本解题的方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心。在使用本书时应按照以下四个步骤学习才会有较大的收益：

1. 通过审题来正确理解题意(特别是概率统计部分，首先把题目的已知和要求的是什么弄清楚，而那种只有看完题解后才能正确理解题意的做法是万万不可取的)；

2. 分析题目来确定主要考核知识点(解答本题时要用到哪些知识点，需要哪些公式或定理要事先明确，这种训练是十分必要的)；

3. 选择适当的方法与技巧(解题技巧的掌握不仅要“看”，更重要的是“学”，即动手来解题，所谓“熟能生巧”就是这个道理)；

4. 学习解题格式及关键步骤表述(解题格式是大多数同学最容易忽视的一个问题，学习必要解题格式也是十分重要的。在各类考试中，必要的解题格式以及写出关键步骤是我们评判的重要标准，也是今后学习和工作中所需要的)。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知

识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

我们在出版这套书时力求能够体现出以上的特色，但是由于时间仓促，疏漏之处难免，恭请读者不吝指正。

在本书的编写过程中，北方交通大学的阿荣老师、刘晓老师、龚漫奇老师为本书的编写和校对付出了辛勤劳动，在此一并表示感谢。

机械工业出版社华章教育

2003年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第一章　函数、极限与连续

◆ 一、本章的重点内容与常见的典型题型

1. 本章的重点内容是极限，既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件，又要能正确求出各种极限.求极限的方法很多，在考试中常用的主要方法有：

(1) 利用极限的四则运算法则及函数的连续性；

(2) 利用两个重要极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

(3) 利用洛必达法则及泰勒公式求未定式的极限；

(4) 利用等价无穷小代替(常会使运算简化)；

(5) 利用夹逼定理；

(6) 先证明数列的极限存在(通常会用到“单调有界数列必有极限”的准则)，再利用关系式求出极限；

(7) 利用定积分求某些和式的极限；

(8) 利用导数的定义；

(9) 利用级数的收敛性证明数列的极限为零.

这里需要指出的是：题型与方法并不具有确定的关系，一种题型可以有几种计算的方法，一种方法也可能用于几种题型，有时在一个题目中要用到几种方法，所以还要具体问题具体分析，方法要灵活运用.

2. 由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续、判断函数的间断点类型等问题本质上仍是求极限，因此这部分也是重点.

3. 函数这一部分，重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

通过历年试题归类分析，本章常见的典型题型有：

1. 直接计算函数的极限值或给定函数极限值求函数表示式中的常数；

2. 讨论函数的连续性、判断间断点的类型；

3. 无穷小的比较；

4. 讨论连续函数在给定区间的零点,或讨论方程在给定区间有无实根;

5. 求分段函数的复合函数.

二、习　　题

(一) 填空题

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$, $g(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$ ______, $g[f(x)]=$ ______.

2. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 则 $\varphi(x)=$ ______的定义域为______.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ______.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$, 则 $a=$ ______.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续, 则 $a=$ ______.

6. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小: $\ln(1+x), x-\sin x, x\tan x, \dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}, \dfrac{1}{\ln|x|}$ 中: ______是 x 的低阶无穷小; ______是 x 的一阶无穷小; ______是 x 的二阶无穷小; ______是 x^2 的高阶无穷小.

7. 设 $\alpha>0, \beta\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$, 则 $(\alpha,\beta)=$ ______.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=$ ______.

9. 在区间 $[0,1]$ 上函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 的最大值记为 $M(n)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$ ______.

10. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{2}, & x>0, \\ a, & x=0, \\ \dfrac{\sin bx}{x}+cx, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则常数 a,b,c 分别等于 ______, ______, ______.

(二) 选择题

1. 设 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

(A) 偶函数；　(B) 无界函数；　(C) 周期函数；　(D) 单调函数.

2. 当 $x\to1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是(　　).

(A) 2；　(B) 0；

(C) ∞；　(D) 不存在但不为 ∞.

3. 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 低阶无穷小；　(B) 高阶无穷小；

(C) 等价无穷小；　(D) 同阶但不等价的无穷小.

4. $x\to0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶无穷小，则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$；　(B) $a=1,b=1$；

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$；　(D) $a=-1,b=1$.

5. 当 $x\to0$ 时，下列 4 个无穷小阶数最高的是(　　).

(A) $\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2$；　(B) $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$；

(C) $x-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x\right)\sin x$；　(D) $e^{x^4-x}-1$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在；　(B) 极限存在，但不连续；

(C) 连续，但不可导；　(D) 可导.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在；　(B) 极限存在，但不连续；

(C) 连续，但不可导；　(D) 可导.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续； (B) 连续但不可导；

(C) 可导但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续； (D) 可导且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

9. 设常数 $a_i>0\ (i=1,2,3)$，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 则方程 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ (　　).

(A) 没有根； (B) 正好有 1 个根；

(C) 正好有 2 个根； (D) 正好有 3 个根.

10. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导，且 $g(0)=g'(0)=0$. 并设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续； (B) 连续但不可导；

(C) 可导，但导函数不一定连续； (D) 导函数连续.

(三) 解答题

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(\sin x-x)}{x^3}, & x>0,\\ \dfrac{1}{x}\left(2\sin x-\displaystyle\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t\right), & x<0,\end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\displaystyle\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{\sin^{10}x}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

5. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

6. 确定 a,b,c 的值,使$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=C\ (C\neq0)$.

7. 设 $x\to0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,求常数 a 之值.

8. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$, $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1\right)$.

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

10. 设 $a>0$,数列$\{a_n\}$满足$\begin{cases}a_0>0,\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right),\end{cases}$ $n=0,1,2,\cdots$.求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

11. 设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$, $(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ 1-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant5,\\ x+3, & x>5.\end{cases}$ 讨论 $y=f(g(x))$ 的连续性,若有间断点并指出类型.

13. 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

14. 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

15. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$,求证:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A$.

16. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$f(a)=f(b)$,证明:至少存在 $x_0\in[a,b]$,使

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right).$$

17. 以$[x]$表示不超过 x 的最大整数,试确定常数 a 的值,使 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$存

在,并求出此极限.

18. 设 $G'(x)=e^{-x^2}$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t^2G(t)\mathrm{d}t$.

19. (1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$;

(2) 证明 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填: $f[g(x)]=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

分析 由 $g(x)\geqslant 0$,

$$f[g(x)]=\frac{1}{2}[g(x)+|g(x)|]=g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

由 $f(x)\geqslant 0$,

$$g[f(x)]=f^2(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

评注 本题主要考查分段函数的复合.要求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,实际上就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$.而这里的关键是要搞清 $u=\varphi(x)$ 的函数值 $\varphi(x)$ 落在 $y=f(u)$ 的定义域的哪一部分.

2. 应填: $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x\leqslant 0$.

分析 由 $f(x)=e^{x^2}$ 知, $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$, 又 $\varphi(x)\geqslant 0$, 则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x\leqslant 0$.

评注 本题主要考查函数的复合.

3. 应填: $\dfrac{6}{5}$.

分析 本题在经过倒数变换后,再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限.令 $x=\dfrac{1}{t}$,则 $x\to\infty$ 时, $t\to 0$,所以

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{3+5t^2}{5+3t}\cdot\frac{\sin 2t}{t}=\frac{6}{5}.$$

本题也可以利用等价无穷小，$\sin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}\quad(x\to\infty)$求解.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+5)}{(5x+3)}\cdot\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+10}{5x^2+3x}=\frac{6}{5}.$$

4. 应填：$\ln2$.

分析　由重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 确定 a.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8,$$

所以
$$3a=\ln8=3\ln2,\quad a=\ln2.$$

5. 应填：$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

分析　由连续性定义知

$$a=f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(\cos x)^{x^{-2}}=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{(\cos x)2x}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

6. 应填：$\dfrac{1}{\ln|x|}$，$\ln(1+x)$，$x\tan x$ 或$\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$，$x-\sin x$.

分析　由

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\dfrac{1}{\ln|x|}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0,$$

知$\dfrac{1}{\ln|x|}$是 x 的低阶无穷小.

由 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$ 知 $\ln(1+x)$ 是 x 的一阶无穷小.

由

$$1-\sqrt{\cos x^2}=\frac{1-\cos x^2}{1+\sqrt{\cos x^2}}\sim\frac{1}{4}x^4\quad(x\to0),$$

从而$\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$是 x 的$(6-4=2)$二阶无穷小.

由

$$x-\sin x=\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\quad(x\to0),$$

则 $x-\sin x$ 是x^2 高阶无穷小.

由 $\tan x\sim x$ 是x 的一阶无穷小,则 $x\tan x$ 是x 的二阶无穷小$(x\to0)$.

7. 应填：$\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

分析 通过变量替换化成$\frac{0}{0}$型后用洛必达法则或作适当变形后用泰勒公式求解.

解法一 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\alpha}t^{\alpha-2}=\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to0}t^{\alpha-2}=\begin{cases}0, & \alpha>2,\\ \frac{1}{2}, & \alpha=2,\\ \infty, & \alpha<2.\end{cases}$$

因为$\alpha>0,\beta\neq0$，所以$(\alpha,\beta)=\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

解法二 原式$=x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]=x^2\left[1+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)-1\right]$

$$=x^2\left[\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right]=x^{2-\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+O(1)\right]\quad(x\to+\infty),$$

由此得

$$(\alpha,\beta)=\left(2,\frac{1}{2}\right).$$

8. 应填：e^4.

分析 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

9. 应填：e^{-1}.

分析 由于

$$f'(x)=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x],$$

令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{n+1}$. 又因为$f(0)=f(1)=0$，所以

$$M(n)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}.$$

10. 应填：1,1,0.

分析　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，可得

$$f(0^{+})=a=\lim_{x\to0^{+}}f(x)=\lim_{x\to0^{+}}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}\right]=1,$$

$$f(0^{-})=\lim_{x\to0^{-}}\left[\frac{\sin bx}{x}+cx\right]=b.$$

所以 $b=a=1,f(0)=1$.

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}-1}{x}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{2\ln(1+x)+x^{2}-2x}{2x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^{+}}\frac{2x-x^{2}+o(x^{2})+x^{2}-2x}{2x^{2}}=0.$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\frac{\sin x}{x}+cx-1}{x}=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\sin x+cx^{2}-x}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\sin x-x}{x^{2}}+c=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\cos x-1}{2x}+c=c.$$

所以 $c=0$. 故 $a=1,b=1,c=0$.

(二) 选择题

1. 应选(B).

分析　(排除法)　由于 $f(-x)=x\tan x\mathrm{e}^{-\sin x}\neq f(x)$，当 $\sin x\neq0$ 时，$f(x)$ 不是偶函数. 由于 $f(0)=f(\pi)=0$ 知 $f(x)$ 不是单调函数，又 $f(x)$ 也不是周期函数，因此选(B).

(直接法)　由于 $\mathrm{e}^{\sin x}\geqslant\mathrm{e}^{-1}$ 及 $x\tan x$ 无界可以推出 $f(x)$ 无界. 因为 $x\tan x$ 无界，则 $\forall M>0,\exists x_0\in$ 定义域，$|x_0\tan x_0|>M\mathrm{e}$，进而 $|f(x_0)|=|x_0\tan x_0\mathrm{e}^{\sin x_0}|\geqslant M\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=M$.

评注　研究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的. 因此，常用的解题方法是两大类：一种是直接验证某个选项正确，则其余选项必定不正确(不必验证). 这种方法叫直接法；另一种方法是验证其中三个选项不正确，则剩下的一个选项必定正确(也不必验证)，这种方法通常称作排除法.

直接法就是直接验证某个选项正确，通常有两种途径，一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确，这种方法通常称为推演法；另一种方法是借助几何分析得出正确选项，这种方法叫几何法. 而排除法在使用时通常是举反例.

2. 应选(D).

分析　对这一类题目，一般是考察函数在该点的左、右极限. 因为左、右极限都存在且相等，是函数极限存在的充要条件.

由于

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}2e^{\frac{1}{x-1}}=0.$$

所以只有(D)是正确的.

评注 本题主要考查函数在一点的左、右极限.这里应特别注意的是 $\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,而 $\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$.本题的函数由两个因式相乘而得,其中 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$,故因式 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 是关键部分.所以解题中要善于抓住关键部分,才能提高效率.

3. 应选(B).

分析 多次利用洛必达法则,并利用 $\sin x\sim x\ (x\to0)$,求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)\cdot\sin(1-\cos x)^2}{x^4+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{x^3+x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x}{1+x}=0,$$

因此选(B).

评注 以上运算中,考察了求积分上限函数的导数,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt\right]=(f[\varphi(x)])\varphi'(x).$$

4. 应选(A).

分析 将 e^x 的麦克劳林展开式代入(因原式的 x^2 高阶无穷小,所以展开到二阶即可).

$$e^x-(ax^2+bx+1)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)-ax^2-bx-1$$

$$=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2),\quad x\to0,$$

由于原式是比 x^2 高阶的无穷小,所以 $a=\frac{1}{2},b=1$.

5. 应选(C).

分析 由于

$$\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}=1+x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x)^2+o_1(x^2)$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com