研究生教学用书

矩阵分析

MATRIX ANALYSIS

刘丁酉 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

研究生教学用书

矩阵分析

MATRIX ANALYSIS

刘丁酉 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析/刘丁酉编著.—武汉：武汉大学出版社，2003.8
研究生教学用书
ISBN 7-307-03821-8

Ⅰ.矩…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.矩阵分析　Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059431 号

责任编辑：任　翔　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉大学出版社印刷总厂
开本：787×960　1/16　印张：17.75　字数：324 千字
版次：2003 年 8 月第 1 版　　2003 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03821-8/O・282　　定价：28.00 元

前　　言

本书是武汉大学工科硕士研究生必修的学位课程“矩阵论”的教学用书，它以工科院校通用的工科数学《线性代数》作为预备知识，并参照工科硕士研究生“矩阵论”课程教学的基本要求，结合我校相关学科的应用特点，在作者 1998 年 9 月所编《矩阵分析》(武测科大版)的基础上重新编写而成。

由于矩阵论既是一门发展完善、理论严谨、方法独特的数学基础课，又广泛应用于工程科学的各个领域，故该教材的基本内容在硕士研究生的培养过程中是不可缺少的组成部分，对培养学生的逻辑能力、推理能力及解决实际问题的能力等方面具有极其重要的地位和作用。

本书仅限于工科硕士研究生的专业需要及数学素质的培养，结合数学知识的自然延伸与专业实际的特点进行选材，力求在内容上更适当，在结构上更合理，既兼顾数学自身的系统性，又注重理论和方法在工程科学中的实用性。为此，本书根据作者历年的教学实践及工科硕士研究生数学课程设置的基本要求与教学规律，选择了线性代数基础和矩阵理论及应用的部分基本内容。其中第一部分由前四章构成，内容包括线性代数的有关概念、线性空间与线性变换、相似矩阵与 Jordan 标准形、内积空间，它们基本上是工科线性代数课程的补充和深化，同时也是后续内容赖以立足的预备知识，可以视为线性代数的基本内容。第二部分由五至七章构成，它是矩阵分析的基本内容。这里我们仅选择了专业上更实用的矩阵分解、矩阵分析以及广义逆矩阵等内容。

概括地讲，本书还力求突出以下几个特点：一是注重教学对象，低起点，高坡度。本书考虑到工科硕士研究生中有很大一部分为工作多年的非应届毕业生，解题及证明技巧已相当陌生，故增写第一章作为衔接，并在各章后面都编写了综合举例一节，增加了不少解题实例。二是注重专业需要，在原教材基础上补充了矩阵分解、矩阵微分方程及广义逆矩阵等方面的内容，已能够满足各专业所需。三是吸收了一部分近现代数学与科技中的矩阵分析新方法，如求 Jordan 标准形的波尔曼方法、矩阵幂级数等。各章还配有大量的习题供学生选做和复习，书后附有部分习题答案与提示。

本书在编写和出版过程中，还参考使用了多位专家的教材和专著，武汉大学研究生院及出版社为本书的出版提供了大力支持。在此特向所有支持本书出版的同志表示衷心的感谢。

书中不妥之处，敬请各位同行及读者批评指正。

目　录

第一章　线性代数的有关概念

由于我们置身于"宇宙"这个空间中，对于在该几何空间内所描述的几乎一切问题常常易于为我们的直觉所体察，因而我们习惯于用它来考察和研究有关问题，以至于遇到新情况时，我们也希望能像这个几何空间一样给出其形象直观的解释. 然而，随着科学技术的不断发展，研究对象已远远超出了几何空间的范围. 我们希望建立一些类似于$\mathbb{R}^3$但比之更抽象的结构，使得各种问题都能纳入一个统一的数学描述之中. 线性代数正是这一基本思想的直接产物.

当前，线性代数已成为工程技术领域的科技人员所必须掌握的数学课程之一. 许多专业课程也都把线性代数作为其重要的基础理论和方法. 此外，线性代数也是矩阵论等数学课程的基础. 作为预备，本章先介绍线性代数的有关概念，这些内容既是对已学线性代数知识的复习和深化，也是本课程的基础内容.

§1.1　n 阶行列式

行列式是研究矩阵性质的基本工具，也是其他科学技术领域常用的数学工具之一.

1.1.1　n 阶行列式的定义与性质

定义 1.1.1　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的一个 n **阶行列式**为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1.1}$$

即所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1.2}$$

的代数和，其中每一项的符号由排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性决定.

由定义，n 阶行列式(1.1.1)是由形如(1.1.2)式的 $n!$ 项之代数和组成的.

例 1 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 该行列式的左下角元素全为零，因而必有许多形如(1.1.2)式的项为零. 注意到(1.1.1)式中代数和的每一项皆取自不同行不同列，于是只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为零. 又因 $12\cdots n$ 为偶排列，故所求行列式

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

作为上例的特殊情形，我们称主对角线(从左上角到右下角这条对角线)以外的元素全为零的行列式为**对角形行列式**，易见它的值也等于主对角线上元素的乘积.

由行列式(1.1.1)的行下标与列下标地位的对称性，n 阶行列式的定义也可按列下标成自然顺序表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.1.3}$$

n 阶行列式具有以下性质：

1) 行列互换，行列式不变. 即对转置行列式 D^{T}，有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D$$

2) 行列式中每一行(或列)的公因子可以提到行列式之外，即用某一个数乘以行列式的一行(或列)就相当于用这个数乘以该行列式.

由性质 2) 可得：

(1) 若行列式中一行(或列)为零，则该行列式为零；

(2) 若用某一个数乘以 n 阶行列式的每一个元素，则相当于用这个数的 n 次幂乘以该行列式.

3) 对换行列式中两行(或两列)的位置，行列式反号.

4) 若行列式中有两行(或两列)相同，则该行列式为零.

由性质 1) 及 2) 可知，若行列式中有两行(或两列)对应成比例，则该行列式

为零.

5）若行列式中某一行（或列）是两组数的和，则该行列式等于两个行列式的和，且两行列式除去该行（或列）分别各取一组数外，其余各行（或列）都与原来行列式的对应行（或列）相同.

性质 5）还可推广到某一行（或列）为多组数的和的情形.

6）把行列式的某行（或列）的倍数加到另一行（或列），该行列式不变.

例 2　若一个 n 阶行列式 D 的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

则称它为**反对称行列式**，且有

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\a_{13}&a_{23}&0&\cdots&-a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^nD$$

特别地，当 n 为奇数时，有 $D=0$.

1.1.2　n 阶行列式的展开定理

在 n 阶行列式的展开式中，虽然每一项都是 n 个元素的连乘积，但因其取自不同行不同列，故对某一确定行的 n 个元素（如 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$）来说，每一项都仅含该行中的一个元素. 这意味着 n 阶行列式的 $n!$ 项可按该行的 n 个元素提取公因子而分成 n 组，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\tag{1.1.4}$$

其中 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 代表那些含有 a_{ij} 的项在提取公因子 a_{ij} 后的代数和.

为了分析这些 A_{ij} 的结构，我们引入以下定义.

定义 1.1.2　在 n 阶行列式 D 中任选 k 行和 k 列（$k\leqslant n$），将其交叉点上的 k^2 个元素按照原来位置排成一个 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 **k 阶子式**. 在 D 中划去 M 所在之 k 行 k 列后余下的 $(n-k)^2$ 个元素按照原来位置排成的 $n-k$ 阶行列式 M'，称为 **M 的余子式**.

由定义知 M 与 M' 互为余子式，有时也称 M 与 M' 为 D 的一对**互余子式**，例如四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

中的子式$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$与余子式$M' = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$就是一对互余子式,其中$M$取自第一、三行和第二、四列.

定义 1.1.3 设D的k阶子式M在D中所在的行列指标分别是$i_1, i_2, \cdots, i_k$和$j_1, j_2, \cdots, j_k$,则称

$$A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} \cdot M' \tag{1.1.5}$$

为M的**代数余子式**,其中M'为M的余子式.

引理 1.1.1 行列式D的任一子式M与其代数余子式A之积的每一项皆为D中的展开项.

证 设子式M位于D的第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行和第$j_1, j_2, \cdots, j_k$列,且

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_k$$

若变动D中的行和列使M位于D的左上角,并保持M的余子式M'的行列相对位置不变,则M'位于D的右下角,因此上述变动所进行的相对位置对换次数为

$$\begin{aligned}&(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_k - k) + (j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \cdots + (j_k - k) \\ &= (i_1 + i_2 + \cdots + i_k) + (j_1 + j_2 + \cdots + j_k) - 2(1 + 2 + \cdots + k)\end{aligned}$$

若记D_1为变换后的行列式,则

$$D_1 = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} \cdot D$$

不妨设D_1中的一对互余子式M_1与M_1'为

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad M'_1 = \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

此时M_1的代数余子式

$$A_1 = (-1)^{(1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)} \cdot M_1' = M_1'$$

且M_1的每一项都可写成

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{k\alpha_k}$$

M_1'的每一项也可写成

$$a_{k+1,\beta_1}\ a_{k+2,\beta_2} \cdots\ a_{n,\beta_{n-k}}$$

其中$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$是$1, 2, \cdots, k$的一个排列,$\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-k}$是$k+1, k+2, \cdots, n$的一个排列,于是两项乘积$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{k\alpha_k} a_{k+1,\beta_1} a_{k+2,\beta_2} \cdots a_{n,\beta_{n-k}}$的符号为

$$(-1)^{\tau(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)+\tau(\beta_1-k,\beta_2-k,\cdots,\beta_{n-k}-k)} = (-1)^{\tau(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-k})}$$

它正是 D_1 中的一项且符号相同，注意到 $M_1 = M, M_1' = M'$，即知 MA 的每一项都与 D 中的对应项相等且符号相同.

定理 1.1.1(拉普拉斯定理) 设在行列式 D 中任意取定 k 行 $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$，则由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

证 设取定后的一切 k 阶子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$，且它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$，于是由引理 1.1.1 知 $M_iA_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 中每一项皆为 D 中的项且符号相同，因此要证明

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t$$

只须证明等式两端项数相等即可. 易见右端为

$$t \cdot k! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$

定理得证.

在定理 1.1.1 中取 $k = 1$，即知(1.1.4) 式中的 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，这说明行列式 D 等于某行(或列) 的元素分别与其对应的代数余子式乘积之和，再结合行列式的性质 4) 易知，在行列式 D 中，某行(或列) 的元素与另一行(或列) 相应元素的代数余子式的乘积之和为零，于是有以下定理.

定理 1.1.2 设 n 阶行列式 D 的任一元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，则

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} D, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{sk}A_{sj} = \begin{cases} D, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \tag{1.1.6}$$

成立.

例 3 利用定理 1.1.1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解 取定 D 中第一、二行并利用定理 1.1.1 可得

$$\begin{aligned} D &= M_1A_1 + M_2A_2 + M_3A_3 + M_4A_4 + M_5A_5 + M_6A_6 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8 + 6 - 1 + 5 - 18 - 7 \\ &= -7 \end{aligned}$$

利用拉普拉斯定理还可证明以下定理.

定理 1.1.3 两个 n 阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

二者的乘积等于一个 n 阶行列式 C，其中元素 c_{ij} 是 D_1 的第 i 行元素与 D_2 的第 j 列对应元素乘积的和，即

$$C = D_1 D_2, \quad c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

该定理又称为**行列式的乘法定理**.

1.1.3 克莱姆法则

作为行列式的一个应用，这里简要回顾一下解线性方程组的克莱姆法则.

定理 1.1.4 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1.7}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.1.8}$$

则方程组(1.1.7)有惟一解，且 $x_i = D_i/D (i = 1,2,\cdots,n)$，其中 D_i 是将 D 中第 i 列换成(1.1.7)式右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得的行列式，即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

该定理通常称为**克莱姆法则**. 特别地，当 $b_i = 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 时，方程组(1.1.7)又称为**齐次线性方程组**. 若其系数行列式不为零，则由克莱姆法则知它必有惟一零解.

§1.2　n 维向量及其线性关系

1.2.1　n 维向量空间

在工程技术科学中,我们经常要接触各种各样的量及其相互关系. 例如,线性方程组是否有解完全由各方程间的关系所决定. 要讨论解的情况,必须研究方程间的关系.

设有一个 n 元方程为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

它可以用一个 $n+1$ 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$ 来表示,所以方程间的关系也可用有序数组间的关系来体现. 此外,在其他问题中也会碰到用多元有序数组来表达某些量和相互关系的情形. 为了在详细讨论数组的同时顾及到数的取值范围,这里先引入数域的概念.

定义 1.2.1　设 P 是由一些复数组成的集合,其中包括 0 和 1,若 P 中任意两个数(可重复)的和、差、积、商(除数不为零)仍在 P 中,则 P 称为一个数域.

显然,全体有理数、全体实数及全体复数各自组成的集合皆为数域,它们分别用$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ 来表示.

有了数域的概念后,我们就可在此基础上较为深入地讨论多元有序数组,并作为它们的一个较严谨的抽象,给出以下定义.

定义 1.2.2　由数域 P 中 n 个数所组成的有序数组

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为数域 P 上的一个 n 维向量,其中 $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**分量**.

为方便起见,以后经常用 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$ 字母代表向量. 类似于 $n = 2, 3$ 且 P 为实数域的情形,对 n 维向量,我们也可给出以下定义.

定义 1.2.3　设有数域 P 上的向量

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

我们规定:

1) **相等**　$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$;

2) **加法**　$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$;

3) **数量乘法**　$k\boldsymbol{\alpha} = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$;

此外还有

4) **零向量**　$\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$;

5) **负向量**　$-\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$,它称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.

由向量加法的定义可推得交换律和结合律成立:

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$$

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$$

再利用负向量和零向量，易知

$$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$$

且有减法

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$$

此外，对 n 维向量的加法与数量乘法，还有

$$\begin{cases}k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}\\(k+s)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+s\boldsymbol{\alpha}\\k(s\boldsymbol{\alpha})=(ks)\boldsymbol{\alpha}=s(k\boldsymbol{\alpha})\\1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\\(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}\\0\,\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\\k\,\mathbf{0}=\mathbf{0}\end{cases}$$

其中 $k,s,1,-1,0$ 为 P 中的常数. 显然，当 $k\neq 0,\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时，必有 $k\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

定义 1.2.4 以数域 P 中的数作为分量构成的 n 维向量的全体，同时考虑到定义在它上面的加法和数量乘法，称为数域 P 上的 **n 维向量空间**，记作 P^n.

由定义，当 P 为 $\mathbb{R}$ 时，P^n 即为 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$. 特别地，当 $n=3$ 时，三维实向量空间 $\mathbb{R}^3$ 就是几何空间中全体向量所成的空间.

为研究问题方便，我们称写成一行的向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

为**行向量**，而称写成一列的向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

为**列向量**，且简记为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$. 顺便指出，在不考虑运算的前提下，作为向量的表示，行向量与列向量的区别只是写法上不同.

1.2.2 求线性方程组的一般解

在讨论 n 维向量的线性关系时，常常需要转化为求一般线性方程组的解. 为此，下面先回顾一下求线性方程组的一般解的某些结果.

考虑一般线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}\tag{1.2.1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 仍代表 n 个未知量，s 是方程的个数，且 s 不一定等于 n. 只要知道了方程组(1.2.1) 的全部系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n)$ 和常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,s)$，方程组也就确定了.

易见当 $s\neq n$，或 $s=n$ 但系数行列式为零时，方程组(1.2.1) 不能用克莱姆法则求解. 此外，由初等代数的知识知道，用消元法求解二元及三元线性方程组也是很方便的，这种方法归纳起来可看做是反复地对线性方程组进行以下三种基本变换：

1) 用一非零的数乘某方程；

2) 将一个方程的倍数加到另一个方程；

3) 互换两方程的位置.

上述变换称为**线性方程组的初等变换**.

对一般的线性方程组(1.2.1) 也可施行消元法求解，且其消元过程也是对其反复施行初等变换的过程. 容易证明，初等变换总把方程组变为同解的方程组. 下面我们来简单说明一下利用初等变换求方程组(1.2.1) 的过程.

首先，若方程组(1.2.1) 中 x_1 的系数 $a_{i1}(i=1,2,\cdots,s)$ 全为零，则方程组(1.2.1) 对 x_1 无约束，此时方程组(1.2.1) 可视为关于 $x_2,\cdots,x_n$ 的方程组. 以下不妨设 x_1 的系数不全为零，则由变换 3)，可设 $a_{11}\neq 0$，再利用变换 2)，让

$$a'_{ij}=a_{ij}-a_{i1}a_{1j}/a_{11}\quad(i=2,\cdots,s;j=2,\cdots,n)$$

则方程组(1.2.1) 可转化为同解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sn}x_n=b'_s \end{cases} \tag{1.2.2}$$

若再对方程组(1.2.2) 的后 $s-1$ 个方程按上述方法进行初等变换，并一步步地做下去，则总可得到一个阶梯形的方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,r)$.

由于方程组(1.2.3) 与方程组(1.2.1) 同解，因而方程组(1.2.1) 是否有解取决于

$$0 = d_{r+1} \tag{1.2.4}$$

是否成立. 这意味着方程组(1.2.1) 有解的充要条件为 $d_{r+1}=0$. 具体地说,就是若方程组(1.2.3) 中含有(1.2.4) 式且 d_{r+1} 为一非零的数,则原方程组无解;反之,当 $d_{r+1}=0$ 时,原方程组就一定有解,且可分为两种情形:

1) $r=n$. 这时阶梯形方程组(1.2.3) 满足克莱姆法则的条件,所以(1.2.1) 必有惟一解,且该惟一解可由(1.2.3) 中的方程从下至上逐个给出.

2) $r<n$. 这时任给方程组(1.2.3) 中的 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组确定的值,都可惟一地求出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的一组对应值,从而得到方程组(1.2.1) 的一个解向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 一般地,还可将 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 通过 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表示出来. 这种表示就称为方程组(1.2.1) 的**一般解**,其中 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为一组**自由未知量**.

此外,$r>n$ 的情形不可能出现.

将上述结果应用到齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

就有以下的结论.

定理 1.2.1 在齐次线性方程组(1.2.5) 中,如果有 $s<n$,那么该方程组必有非零解.

证 在阶梯形方程组(1.2.3) 中,令

$$d_i=0\ (i=1,2,\cdots,s),$$

因为 $r\leqslant s<n$,所以解不是惟一的,即方程组(1.2.5) 有非零解.

1.2.3 n 维向量的线性相关性

以下我们总是在一固定的数域 P 上的 n 维向量空间中进行讨论.

定义 1.2.5 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的一个线性组合,若有数域 P 中的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s \tag{1.2.6}$$

特别地,两向量之间的线性组合关系表现为其分量对应成比例,而零向量则是任一向量组的线性组合.

当向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性组合时,我们也说 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ **线性表示**. 由定义,若给定了一组向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$,则对数域 P 中任意 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,向量

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s$$

必是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性组合. 反之,要考察向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是否为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性组

合，则要看是否能求出数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得(1.2.6)式成立.

例 1　任一 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,\cdots,0)\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,0,\cdots,1)\end{cases}\tag{1.2.7}$$

的一个线性组合，因为总有

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

成立. 特别称(1.2.7)式中向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 **n 维单位向量.**

定义 1.2.6　对于某给定的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 1)$，若在数域 P 中存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\tag{1.2.8}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**，否则就说它们**线性无关**.

定义 1.2.6 表明，如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，那么在(1.2.8)式中至少有一个 k_i 不等于零. 于是当 $s\geqslant 2$ 时，有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{1}{k_i}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)$$

即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中至少有一个向量是其余向量的线性组合. 因此可得以下定理.

定理 1.2.2　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

此外，后面常用到 n 维向量之间的下列性质：

1) 若一个向量线性相关，则这个向量是零向量；

2) 一个线性无关向量组的部分向量组必线性无关；

3) 若一向量组的部分向量组线性相关，则这个向量组线性相关.

特别地，任意一个包含零向量的向量组必然线性相关.

一般地，要判别一个向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad(i=1,2,\cdots,s)\tag{1.2.9}$$

是否线性相关，就是要看向量方程(1.2.8)有无非零解，按分量写出来也就是

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{s1}k_s=0\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{s2}k_s=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{sn}k_s=0\end{cases}\tag{1.2.10}$$

这是一个齐次线性方程组. 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是方程组(1.2.10)只有零解.

容易看出，若向量组(1.2.9)线性无关，则 $n+1$ 维向量